

С.Ю. НОВАК

## СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО СОБСТВЕННОГО ЧИСЛА МАТРИЦЫ

Задача приближенного вычисления максимального собственного числа матрицы высокой размерности имеет многочисленные приложения в инженерной математике, теории графов и других областях (см., напр., [1]–[5]).

В данной статье предлагается процедура приближенного вычисления максимального собственного числа матрицы с неотрицательными элементами. Полученные результаты дают частичный ответ на задачу 5 работы ([6], §9.5).

Излагается теоретическое обоснование рассматриваемой процедуры, опирающееся на теорию цепей Маркова, оценивается точность аппроксимации. Приводится пример машинной реализации данной процедуры на конкретной матрице, для которой применение прямых методов вычисления собственных чисел не эффективно.

В разделе 1 помещены теоретические результаты, необходимые для обоснования предлагаемой процедуры. В разделе 2 описывается сама процедура, дается пример ее реализации. Доказательства результатов п.1 отнесены в раздел 3.

### 1. Статистическое оценивание максимального собственного числа фрагмента матрицы переходных вероятностей

Пусть  $\{X_i, i \geq 1\}$  — марковская цепь с конечным множеством состояний  $S$  и переходными вероятностями  $\|p_{ij}\|$ ,  $A$  — некоторое подмножество  $S$ , попадание в которое трактуется как “успех”.

Положим  $U = \|p_{ij}\|_{i,j \in A}$ , и пусть  $d$  — максимальное собственное число матрицы  $U$ . Будем предполагать, что (i) цепь имеет лишь один класс  $C$  существенных состояний; (ii) класс  $C$  не содержит циклических подклассов; (iii)  $A \cap C \neq \emptyset$ ; (iv)  $0 < d < 1$ .

Обозначим

$$L(n) = \max\{k \leq n : \max_{0 \leq i \leq n-k} 1\{X_{i+1} \in A, \dots, X_{i+k} \in A\} = 1\}.$$

Случайная величина  $L(n)$  является максимумом длин серий “успехов” среди  $X_1, \dots, X_n$ .

Изучению распределения случайной величины  $L(n)$  посвящена довольно обширная литература (см., к примеру, ссылки в [7]). В работе [8] доказана следующая

**Теорема А.** Оценка  $d_n = n^{-1/L(n)}$  максимального собственного числа  $d$  сильно состоятельна и асимптотически несмещена.

В настоящем разделе изучается точность аппроксимации числа  $d$  статистикой  $d_n$ .

Положим

$$\begin{aligned} Z(n) &= L(n) - \log n, \\ R(n) &= (d_n - d)(\log n)/d \ln(1/d), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где  $\log$  берется по основанию  $1/d$  (если не оговорено противное).

**Теорема 1.** Для любого  $t > 0$  найдется постоянная  $c \equiv c(t)$  такая, что

$$\mathbb{E}|R(n)|^t \leq c \quad (n \geq 1). \quad (1.2)$$

Обозначим через  $q \equiv \|q_i\|$  вектор стационарного распределения цепи, и пусть

$$v(k) = q_A(E - U)v^k \bar{1},$$

где  $q_A = \|q_i\|_{i \in A}$ ,  $v = d^{-1}U$ ,  $E$  — единичная матрица,  $\bar{1}$  — вектор из единиц.

Положим

$$v_* = \liminf v(k), \quad v^* = \limsup v(k)$$

$$f(n) = \log \ln \log n,$$

$$g(n) = {}^2 \log n + {}^3 \log n + \dots + {}^{s(n)} \log n + s(n) \log \ln 1/d,$$

где  ${}^m \log$  означает операцию  $m$ -кратного логарифмирования, функция  $s(n)$  введена в [8]. Отметим, что

$$0 < s(n) \nearrow \infty, \quad s(n)/{}^m \log \rightarrow 0 \quad (\forall m \geq 1), \quad {}^{s(n)} \log n \leq \text{const} < \infty$$

**Теорема 2.** С вероятностью 1

$$v_* \leq \liminf (R(n) + f(n)) \leq v^*,$$

$$\limsup (R(n) - g(n))/s(n) = 0.$$

Из теоремы 2 следует, в частности, что с вероятностью 1

$$-\log \ln \ln n \leq R(n) \leq 2 \log \ln n \quad (n \rightarrow \infty).$$

Следовательно, с вероятностью 1

$$-e^{-1} \ln \ln \ln n \leq (d_n - d)(\ln n) \leq 2e^{-1} \ln \ln n. \quad (1.3)$$

## 2. Оценка максимального собственного числа матрицы с неотрицательными коэффициентами

Пусть дана матрица  $A = \|a_{ij}\|$  размерности  $m \times m$  с неотрицательными элементами и требуется оценить максимальное собственное число  $d \equiv d(A)$  матрицы  $A$ . Положим

$$s^* = \max_i (a_{i1} + \dots + a_{im}), \quad \beta = \alpha + s^*,$$

где  $\alpha > 0$  (напр., можно взять  $\alpha = \min_{ij} \{a_{ij} : a_{ij} > 0\}$ ). Обозначим  $S = \{1, \dots, m+1\}$ ,  $T = \{1, \dots, m\}$ , и пусть  $P \equiv \|p_{ij}\|$  есть матрица размерности  $(m+1) \times (m+1)$  с элементами

$$p_{ij} = \beta^{-1} a_{ij} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m)$$

$$p_{im+1} = 1 - \beta^{-1} (a_{i1} + \dots + a_{im}) \quad (1 \leq i \leq m)$$

$$p_{m+1 m+1} = 0, \quad p_{m+1 j} = 1/m \quad (1 \leq j \leq m).$$

Тогда  $U \equiv \|p_{ij}\|_{i,j \in T} = \beta^{-1} A$ .

Предположим, что  $d > 0$ . Пользуясь генератором случайных чисел, мы моделируем марковскую цепь  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ , отвечающую матрице переходных вероятностей  $P$ . Условия (i)–(iv) выполнены. Следовательно, число  $d_n = \beta n^{-1/L(n)}$  может быть взято в качестве приближенного значения максимального собственного числа  $d$ .

Результаты предыдущего раздела дают определенную информацию о точности такой аппроксимации. В частности, из (1.3) следует, что с вероятностью 1 при  $n \rightarrow \infty$

$$|d_n - d| \leq 2\beta(\ln \ln n)/(\ln n)e.$$

Указанная выше процедура была реализована автором на компьютере типа IBM AT-286 для матрицы размерности  $141 \times 141$  с элементами  $10^3$  на главной диагонали, 2 над главной диагональю, нулями на прочих местах. Было подсчитано, что  $d_n = 1000.4976$  ( $d = 1000$ ) при  $n = 5 \cdot 10^6$ .

Отметим, что погрешность машинного представления нуля составляет примерно  $10^{-39}$ . Поэтому ошибка при вычислении прямыми методами может оказаться того же порядка, что и само собственное число. Рассматриваемая процедура нечувствительна к подобным эффектам, поскольку не требует многократного перемножения чисел.

### 3. Доказательства

**Доказательство теоремы 1.** Из тождеств

$$n = d^{-\log n}, \quad e^x = 1 + x \int_0^1 e^{ux} du$$

и (1.1) следует

$$R(n) = \frac{\log n}{L(n)} z(n) \int_0^1 d^{-uZ(n)/L(n)} du. \quad (3.1)$$

Заметим, что  $L(n) \geq 1$ . Поэтому

$$\mathbb{E}\{|R(n)|^t 1\{L(n) \leq 0.5 \log n\}\} \leq (\log n)^{2t} \mathbb{P}(L(n) \leq 0.5 \log n). \quad (3.2)$$

Из ([8], теорема 2.1) следует

$$\mathbb{P}(L(n) \leq 0.5 \log n) \leq c_1 n^{-1/2} + \exp(-c_2 n^{1/2}). \quad (3.3)$$

Далее, в ([8], теорема 1.4) установлено, что при  $|h| < 1$  справедлива оценка

$$\mathbb{E}d^{h|Z(n)|} < c(h) < \infty \quad (n \geq 1).$$

Поэтому

$$\mathbb{E}\{|R(n)|^t 1\{L(n) > 0.5 \log n\}\} \leq 2^t \mathbb{E}|Z(n)|^t d^{-2t|Z(n)|/\log n} \leq c_3 < \infty \quad (3.4)$$

для всех достаточно больших  $n$ . Объединяя (3.1)–(3.4), получим (1.2).  $\square$

**Доказательство теоремы 2.** Пользуясь неравенством

$$x \leq e^x - 1 \leq xe^x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

выводим

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 (d^{-uZ(n)/L(n)} - 1) du \right| \leq \\ & \leq |Z(n)|(L(n))^{-1} \ln(1/d) \int_0^1 d^{-u|Z(n)|/L(n)} u du \leq \\ & \leq |Z(n)|(L(n))^{-1} \ln(1/d) d^{-|Z(n)|/L(n)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Как установлено в [8], с вероятностью 1

$$\begin{aligned} v_* & \leq \liminf(Z(n) + f(n)) \leq v^*, \\ \limsup(Z(n) - g(n))/s(n) & = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из (3.5), (3.6) следует

$$1 - \int_0^1 d^{-uZ(n)/L(n)} du = O\left(\frac{\ln \ln n}{\ln n}\right) \quad (\text{п. н.}).$$

Поэтому с вероятностью 1

$$\begin{aligned} R(n) &= Z(n) \frac{\log n}{L(n)} \left( 1 + O\left(\frac{\ln \ln n}{\ln n}\right) \right) = \\ &= Z(n) \left( 1 + O\left(\frac{\ln \ln n}{\ln n}\right) \right) = Z(n) + o(1). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Утверждение теоремы 2 вытекает из (3.6) и (3.7).  $\square$

В заключение отметим, что в работе [8] использовалось также следующее условие (v): отвечающий  $d$  правый собственный вектор  $u$  матрицы  $U$  положителен:  $\min_1 u_1 > 0$ . Это условие позволило получить неравенство

$$c_1 d^k \leq q_A U^k \bar{1} \leq c_2 d^k, \quad (3.8)$$

где константы  $c_1 > 0$ ,  $c_2 < \infty$  не зависят от  $k$ . Нетрудно убедиться, что в случае марковской цепи с конечным числом состояний условие (v) может быть опущено, т.к. оценка (3.8) вытекает из известного разложения для матричных моментов [9].

### Литература

1. Pötschke Dieter. *Maximaler Eigenwert und R-Isomorphie-klassen von endlichen Graphen* // Zentralinst. Kybern. Informat. – 1982. – № 3. – P. 14–50.
2. Powers D.L. *Bounds on graph eigenvalues* // Linear Algebra and Appl. – 1989. – V. 117. – P. 1–6.
3. Brighman R.C., Dutton R.D. *Bounds on graph spectra* // J. Combin. Theory. – 1984. – V. B37. – № 3. – P. 228–234.
4. Yuan Hong. *The  $k$ -th largest eigenvalue of a tree* // Linear Algebra and Appl. – 1986. – V. 73. – P. 151–155.
5. Cvetković D.M., Gutman I. *On spectral structure of graphs having the maximal eigenvalue not greater than two* // Publis. inst. math. – 1975. – Т. 18. – P. 39–45.
6. Cvetković D.M., Doob M., Sachs H. *Spectra of graphs: theory and application*. – Berlin: Dtsch. Verl. Wiss, 1982. – 368 p.
7. Новак С.Ю. *Скорость сходимости в задаче о максимуме длин серий “успехов”* // Сиб. матем. журн. – 1991. – Т. 32. – № 3. – С. 112–118.
8. Новак С.Ю. *Об отрезках времени постоянного пребывания однородной марковской цепи в фиксированном подмножестве состояний* // Сиб. матем. журн. – 1988. – Т. 29. – № 1. – С. 129–140.
9. Gantmaher F.R. *The theory of matrices*. – New York: Chelsea, 1959.

Новосибирский институт инженеров  
геодезии, аэрофотосъемки  
и картографии

Поступила  
23.06.1994