ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 2 (489)

УДК 517.552

А.Б. СЕКЕРИН

ПРИМЕНЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА В ТЕОРИИ ПЛЮРИСУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В теории субгармонических функций одного комплексного переменного фундаментальную роль играет интегральное представление Рисса. Это представление ставит в соответствие субгармонической функции $u(z)$, заданной в области $\Omega \subset \mathbb{C}$, положительную меру $\mu = \Delta u/2\pi$. При этом в любой ограниченной области $\Omega_1 \Subset \Omega$ справедливо представление

$$u(z) = \int_{\Omega_1} \ln|z-w|d\mu(w) + H_{\Omega_1}(z),$$

где функция $H_{\Omega_1}(z)$ гармонична в Ω_1. Значение этого представления состоит, во-первых, в том, что оно устанавливает связь между субгармоническими и аналитическими функциями — каждая субгармоническая функция представляет собой интеграл по параметру от семейства логарифмов модулей аналитических функций. Во-вторых, представление Рисса устанавливает однозначное (с точностью до гармонического слагаемого) соответствие между субгармоническими функциями и положительными мерами, заданными в данной области. В пространстве $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, ядром представления Рисса служит функция $|z-w|^{-2n+2}$, не являющаяся плюрисубгармонической функцией. Поэтому данное представление не может эффективно использоваться для изучения свойств плюрисубгармонических функций. В связи с этим в современной теории плюрисубгармонических функций и комплексной теории потенциала вместо оператора Лапласа (ставящего в соответствие субгармонической функции ее меру Рисса) используются степени оператора dd^c и, в частности, оператор Монжа–Ампера $(dd^c)^n$, где n — размерность пространства. Начала данной теории восходят к работам [1], [2], а также [3]. Одним из существенных моментов, осложняющих многие аспекты данной теории, является ее нелинейность. В работах [4]–[7] автором разрабатывался другой подход к вопросу поиска многомерных аналогов представления Рисса. При этом изначально ставилась задача сохранения свойств линейности. Было показано, что для этой цели могут успешно использоваться свойства комплексного преобразования Радона. Было получено необходимое и достаточное условие представимости плюрисубгармонической функции $u(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, интегралом

$$\int_{\mathbb{R}\times S^{2n-1}} \ln|t - \langle z,w\rangle| d\mu(t,w), \tag{1}$$

где $\mu(t,w)$ — положительная мера, заданная на $\mathbb{R}\times S^{2n-1}$ (через S^{2n-1} здесь и далее обозначается единичная сфера в $\mathbb{C}^n$). Указанное необходимое и достаточное условие формулируется в терминах преобразования Радона [4], [5]. Было показано, что класс плюрисубгармонических функций, допускающих представление потенциалом (1), не совпадает с классом всех плюрисубгармонических функций, но является достаточно широким, обеспечивающим ряд приложений к задаче представления аналитических функций многих переменных рядами экспонент [8]. Кроме того, было доказано [9], что любая достаточно гладкая функция представляется разностью

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Российской Федерации “Преобразование Радона в комплексном пространстве и его применения к исследованию свойств плюрисубгармонических и аналитических функций”, грант № Е00-1.0-105.

потенциалов вида (1). При условии представимости функции $u(z)$ потенциалом (1) мера $\mu(t,w)$ связана с этой функцией линейным соответствием. Вместе с тем, это соответствие не может быть выражено, например, дифференциальным оператором, поскольку, как показано в [10], любая достаточно гладкая строго плюрисубгармоническая функция допускает локальное представление потенциалом (1). Если бы указанное соответствие выражалось дифференциальным оператором, то из локальной представимости вытекала бы глобальная, что неверно. С целью обобщения указанных результатов была рассмотрена [6], [7] задача представимости плюрисубгармонических функций потенциалом

$$\int \ln|P(z)|d\mu(P), \tag{2}$$

где $\mu(P)$ — положительная мера, заданная на множестве полиномов, степень которых не превосходит заданного числа. В этом случае произвольная плюрисубгармоническая функция также не допускает представления потенциалом (2). Поэтому возникла задача дальнейших обобщений отмеченных результатов. Рассмотрению этой задачи посвящена предлагаемая статья. Основным результатом данной работы является теорема 4, устанавливающая линейный изоморфизм между множеством плюрисубгармонических функций, заданных в области Рунге, и множеством линейных положительных функционалов, заданных на пространстве функций, непрерывных на локально-компактном пространстве специального вида. Этот результат можно считать аналогом представления Рисса субгармонических функций одного переменного, устанавливающего линейный изоморфизм между множеством субгармонических функций и множеством положительных мер. Теорема 4 дает возможность при исследовании, например, вопросов плюрисубгармонического продолжения использовать аппарат теории обычных положительных функционалов на пространстве непрерывных функций, который более развит, чем теория положительных замкнутых потоков на пространствах дифференциальных форм.

Введем необходимые обозначения. Для области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ через $H(\Omega)$, $SH(\Omega)$, $PSH(\Omega)$ будем соответственно обозначать пространства голоморфных, субгармонических и плюрисубгармонических функций в Ω. Через $\mathcal{D}(\Omega)$ обозначается пространство гладких $\mathbb{C}$-значных, финитных функций, носители которых — компакты, содержащиеся в Ω. Далее, $\mathcal{D}^{(n-1,n-1)}(\Omega)$ — пространство форм бистепени $(n-1,n-1)$ с коэффициентами из $\mathcal{D}(\Omega)$. Любая форма из $\mathcal{D}^{(n-1,n-1)}(\Omega)$ имеет вид

$$\varphi = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{ij} \wedge \omega_{ij}. \tag{3}$$

При этом $\varphi_{ij} \in \mathcal{D}(\Omega)$, а формы ω_{ij} единственным образом определяются соотношением

$$\frac{i}{2} dz_i \wedge d\bar{z}_j \wedge \omega_{ij} = \omega_{2n},$$

где $\omega_{2n} = (i/2)^n dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_n$ — фундаментальная форма в $\mathbb{C}^n$. Оператор dd^c определяется равенством $dd^c = 2i\partial\overline{\partial}$.

Определение. Пусть Ω — область в $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{F}$ — некоторое семейство функций, голоморфных в Ω. Тогда $\mathcal{F}$-преобразованием Радона формы $\varphi \in \mathcal{D}^{(n-1,n-1)}(\Omega)$ вида (3) назовем функцию

$$\widehat{\varphi}(P) = \langle \ln|P|, dd^c\varphi \rangle = \int \ln|P(z)| \sum_{i,j=1}^{n} 4\frac{\partial^2 \varphi_{ij}(z)}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} d\omega_{2n}(z), \quad P \in \mathcal{F}. \tag{4}$$

Отметим, что в силу формулы Пуанкаре–Лелона ([11], с. 19; [12], с. 71) $\mathcal{F}$-преобразование Радона формы $\varphi \in \mathcal{D}^{(n-1,n-1)}(\Omega)$ совпадает с набором значений $2\pi[D_P](\varphi)$, где $[D_P]$ — поток, соответствующий нулевому множеству функции $P \in \mathcal{F}$. Далее, если семейство $\mathcal{F}$ совпадает с множеством линейных функций $s - \langle z, \xi \rangle$, $(s,\xi) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C}^n \setminus 0)$, то $\mathcal{F}$-преобразование Радона представляет собой классическое преобразование Радона формы φ [13].

Лемма 1. *Пусть $\varphi \in \mathcal{D}^{(n-1,n-1)}(\mathbb{C}^n)$ и семейство $\mathcal{F}$ содержит множество линейных функций $s - \langle z, \xi \rangle$, $(s, \xi) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C}^n \setminus 0)$. Тогда $\mathcal{F}$-преобразование Радона формы φ равно нулю в том и только том случае, когда $dd^c\varphi = 0$, т. е. коэффициенты φ_{ij} представления (3) удовлетворяют уравнению*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_{ij}(z)}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} = 0. \tag{5}$$

Функция $\widehat{\varphi}(P)$, $P \in \mathcal{F}$, является действительнозначной тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Im}\Big(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_{ij}(z)}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}\Big) = 0.$$

Доказательство. Если форма $\varphi \in \mathcal{D}^{(n-1,n-1)}(\mathbb{C}^n)$ удовлетворяет соотношению (5), то ее $\mathcal{F}$-преобразование Радона равно нулю по определению. Обратно, пусть $\mathcal{F}$-преобразование Радона формы φ равно нулю. Тогда, в частности, для любых $(s, w) \in (\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ в силу (4) имеем

$$\int \ln|s - \langle z, w \rangle| \sum_{i,j=1}^{n} 4 \frac{\partial^2 \varphi_{ij}(z)}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} d\omega_{2n}(z) = 0. \tag{6}$$

Для любой функции $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ верно (напр., [7])

$$\int \ln|s - \langle z, w \rangle| \frac{\partial^2 \psi(z)}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} d\omega_{2n}(z) = \frac{\pi}{2} \widehat{\psi}(s, w) w_i \overline{w}_j,$$

где $\widehat{\psi}(s, w)$ — комплексное преобразование Радона функции ψ. Поэтому из (6) следует для любых $(s, w) \in (\mathbb{C} \times S^{2n-1})$

$$\sum_{i,j=1}^{n} w_i \overline{w}_j \widehat{\varphi}_{ij}(s, w) = 0.$$

Дифференцируя это равенство, получим

$$\sum_{i,j=1}^{n} w_i \overline{w}_j \frac{\partial^2 \widehat{\varphi}_{ij}}{\partial s \partial \overline{s}}(s, w) \equiv 0.$$

Но выражение в левой части этого равенства совпадает с классическим преобразованием Радона функции $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_{ij}}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}$ ([13]). Так как гладкая финитная функция однозначно определяется своим преобразованием Радона, то отсюда следует (5). Аналогично доказывается второе утверждение леммы. $\square$

Для доказательства основного результата данной работы необходима

Теорема 1. *Пусть функция $u(z)$ плюрисубгармонична в псевдовыпуклой области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Тогда существуют последовательности голоморфных в Ω функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ и натуральных чисел $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ таких, что в $L^1_{loc}(\Omega)$ верно*

$$\lim_{k \to \infty} N_k^{-1} \ln|f_k(z)| = u(z),$$

т. е. для любого компакта $K \subset \Omega$

$$\lim_{k \to \infty} \int_K \left| N_k^{-1} \ln|f_k(z)| - u(z) \right| d\omega_{2n}(z) = 0.$$

Для случая $\Omega = \mathbb{C}^n$ теорема 1 доказана в ([14], с. 320). При этом основой доказательства являются результаты о разрешимости $\overline{\partial}$-уравнения с оценками. Наше доказательство будет основываться на теореме Бремермана. Приведем формулировку этой теоремы с учетом замечания к ней, сделанного в [15].

Теорема 2 ([16], [15]). *Пусть Ω — псевдовыпуклая область в $\mathbb{C}^n$, функция $u(z)$ плюрисубгармонична в Ω. Тогда существует последовательность голоморфных в Ω функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что*

$$u(z) = \varlimsup_{k\to\infty} \alpha_k \ln|f_k(z)|, \quad \alpha_k \geq 0.$$

Если функция $u(z)$ непрерывна в Ω, то для любого компакта $K \subset \Omega$ и любого $\varepsilon > 0$ существует конечный набор голоморфных в Ω функций $f_1, \dots, f_m$ и положительных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ таких, что

$$\max\{\alpha_1 \ln|f_1(z)|, \dots, \alpha_m \ln|f_m(z)|\} \leq u(z) \leq \max\{\alpha_1 \ln|f_1(z)|, \dots, \alpha_m \ln|f_m(z)|\} + \varepsilon, \quad z \in K.$$

Существенную роль при доказательстве теоремы 1 играет тот факт, что любая функция, плюрисубгармоническая в псевдовыпуклой области Ω, является пределом убывающей последовательности гладких плюрисубгармонических в Ω функций [15]. Будет использоваться также

Теорема 3 ([17], с. 120). *Пусть $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность субгармонических функций в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, равномерно ограниченных сверху на любом компакте. Тогда*

а) *если последовательность $\{v_k(x)\}$ не сходится к $-\infty$ равномерно на любом компакте из Ω, то у нее существует подпоследовательность $\{v_{k_m}(x)\}$, сходящаяся в $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$;*

б) *если $v(x)$ — субгармоническая функция и $v_k(x) \to v(x)$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$, то $v_k(x) \to v(x)$ в $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ и*

$$\varlimsup_{k\to\infty} v_k(x) \leq v(x), \quad x \in \Omega,$$

причем почти всюду левая и правая части равны и конечны.

Доказательство теоремы 1. Предположим сначала, что

$$u(z) = \max\{\alpha_1 \ln|f_1(z)|, \dots, \alpha_m \ln|f_m(z)|\},$$

где $f_j \in H(\Omega)$, $f_j \not\equiv 0$, α_j — положительные рациональные числа. Тогда $\alpha_j = m_j/p$, где m_j, p — натуральные числа, и, полагая

$$g_j(z) = f_j^{m_j}(z), \quad v(z) = \max\{\ln|g_1(z)|, \dots, \ln|g_m(z)|\},$$

имеем $u(z) = v(z)/p$. Очевидно, можно считать $|g_i(z)| \not\equiv |g_j(z)|$ для $i \neq j$. Покажем, что в $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$

$$v(z) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln\left|g_1^N(z) + \dots + g_m^N(z)\right|.$$

Действительно, для $i \neq j$ рассмотрим множества

$$M_{ij} = \{z \in \Omega \mid |g_i(z)| = |g_j(z)|\}.$$

Покажем, что каждое из этих множеств имеет нулевую лебегову меру. Пусть $Z_k = \{z \in \Omega \mid g_k(z) = 0\}$ — нулевое множество g_k. Тогда $Z_i \cup Z_j$ — множество нулевой лебеговой меры (нулевое множество голоморфной функции является частным случаем полярного множества, которое ([18], с. 50) имеет нулевую лебегову меру). Далее, функция $\ln|g_1(z)| - \ln|g_2(z)|$ не равна тождественно нулю, плюригармонична в области $\Omega \setminus (Z_i \cup Z_j)$ и поэтому почти всюду в этой области отлична от нуля. Так как

$$M_{ij} \subset (M_{ij} \cap (\Omega \setminus (Z_i \cup Z_j))) \cup (Z_i \cup Z_j),$$

то M_{ij} — множество нулевой лебеговой меры. Следовательно, объединение $M = \bigcup\limits_{1\leq i<j\leq m} M_{ij}$ также имеет нулевую лебегову меру. Пусть

$$v_N(z) = \frac{1}{N} \ln\left|g_1^N(z) + \dots + g_m^N(z)\right|.$$

Для любого $z_0 \in \Omega \setminus M$ найдется номер j_0 такой, что $|g_{j_0}(z_0)| > \max\{|g_j(z_0)|, j \neq j_0\}$. Поэтому

$$v_N(z_0) - v(z_0) = \frac{1}{N} \ln \left| 1 + \sum_{j \neq j_0} \left(g_j(z_0)/g_{j_0}(z_0) \right)^N \right|.$$

Легко видеть, что при $N \to \infty$ правая часть последнего равенства стремится к нулю. Таким образом, почти всюду в Ω имеем $v_N(z) \to v(z)$. При этом, очевидно, $v_N(z) \leq v(z) + (\ln m)/N$. Предположим, что последовательность $v_N(z)$ не сходится к $v(z)$ в $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Тогда для некоторых компакта $K \subset \Omega$, $\varepsilon_0 > 0$ и последовательности $N_k \to \infty$ верно

$$\int_K |v_{N_k}(z) - v(z)|\, d\omega_{2n}(z) \geq \varepsilon_0. \tag{7}$$

Но по теореме 3 некоторая подпоследовательность v_{m_q} последовательности v_{N_k} сходится в $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ к субгармонической в Ω функции $w(z)$, причем почти всюду (п. в.)

$$\overline{\lim_{m_q \to \infty}} v_{m_q} = w(z).$$

Так как п. в. $v_N(z) \to v(z)$, то $w(z) = v(z)$ п. в. (и, следовательно, всюду в Ω). Тогда сходимость v_{m_q} в $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ противоречит (7). Таким образом, вся последовательность v_N сходится к $v(z)$ в $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, т. е. $v_N(z)/p$ сходится в $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ к $u(z)$.

Пусть $\alpha_j \geq 0$ для $j = 1, \ldots, m$ и последовательность положительных рациональных чисел q_{jk} сходится к α_j. Тогда, очевидно, в $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$

$$\max\{q_{1k} \ln|f_1|, \ldots, q_{mk} \ln|f_m|\} \to \max\{\alpha_1 \ln|f_1|, \ldots, \alpha_m \ln|f_m|\}.$$

Пусть E — множество функций вида $\{(1/p) \ln|f(z)|\}$, $p \in \mathbb{N}$, $f \in H(\Omega)$, $f \not\equiv 0$. Из доказанного следует, что замыкание E в $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ содержит все функции вида

$$\max\{\alpha_1 \ln|f_1|, \ldots, \alpha_m \ln|f_m|\}.$$

Поэтому из теоремы 2 следует, что замыкание E содержит все непрерывные плюрисубгармонические в Ω функции. Далее, для произвольной плюрисубгармонической в Ω функции существует последовательность гладких плюрисубгармонических в Ω функций, сходящаяся к ней в $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Тогда замыкание E совпадает с $PSH(\Omega)$. $\square$

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ — псевдовыпуклая область. Пусть, как и выше, $\mathcal{D}^{(n-1,n-1)}(\Omega)$ — пространство форм бистепени $(n-1, n-1)$ с коэффициентами из $\mathcal{D}(\Omega)$. Если форма $\varphi \in \mathcal{D}^{(n-1,n-1)}(\Omega)$ такова, что для любой функции $f \in H(\Omega)$ верно

$$\langle \ln|f|, dd^c\varphi \rangle \geq 0,$$

то для любой плюрисубгармонической в Ω функции $u(z)$ верно

$$\langle u, dd^c\varphi \rangle \geq 0.$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ — псевдовыпуклая область. Рассмотрим множество H, состоящее из аналитических в Ω функций, удовлетворяющих следующим условиям:

$$|f(z)| \leq \exp|z|, \tag{8}$$

$$f \not\equiv 0, \tag{9}$$

$$D_f = \{z \in \Omega | f(z) = 0\} \neq \emptyset. \tag{10}$$

Зададим на H топологию, индуцированную из $H(\Omega)$, т. е. на H зададим метрику

$$\rho(f, g) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\|f - g\|_m}{1 + \|f - g\|_m}.$$

Здесь для $f \in H$ полагаем $\|f\|_m = \max\{|f(z)|,\ z \in \overline{\Omega}_m\}$, $\{\Omega\}_{m=1}^{\infty}$ — последовательность ограниченных областей, исчерпывающая Ω, т. е. $\overline{\Omega}_m \subset \Omega_{m+1}$, $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \Omega_m = \Omega$. Обозначим через H_m множество всех функций из H таких, что $D_f \cap \overline{\Omega}_m \neq \emptyset$. Легко видеть, что для любого m множество H_m замкнуто в H. Введем множества

$$H_{m,1/m} = \{f \in H_m \mid \rho(f,0) \geq 1/m\}\,.$$

Лемма 2. *H — локально компактное пространство, являющееся счетным объединением компактов $H_{m,1/m}$.*

Доказательство. Так как функции из H равномерно ограничены на каждом компакте из Ω, то ([19], с. 23) любая последовательность функций из H содержит подпоследовательность, сходящуюся равномерно на каждом компакте из Ω к некоторой функции из $H(\Omega)$. Если при этом исходная последовательность лежит в $H_{m,1/m}$, то предельная функция также будет принадлежать $H_{m,1/m}$. Таким образом, множества $H_{m,1/m}$ — компакты в H. Из теоремы Гурвица ([20], с. 426) следует, что множество $\widetilde{H}_m = \{f \in H \mid D_f \cap \Omega_m \neq \emptyset\}$ открыто в H. Тогда

$$H_{m,1/m} \subset \widetilde{H}_{m+1} \bigcap \{f \in H \mid \rho(f,0) > 1/(m+1)\} \subset \overset{\circ}{H}_{m+1,1/(m+1)}$$

и из определения H следует $H = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} H_{m,1/m}$.

Таким образом, любая точка $f \in H$ обладает замкнутой окрестностью, содержащейся для некоторого p в $H_{p,1/p}$. Кроме того, любой компакт $K \subset H$ содержится в некотором множестве $H_{q,1/q}$. $\square$

Считая, что Ω — псевдовыпуклая область, и сохраняя предыдущие обозначения, рассмотрим в $\mathcal{D}^{(n-1,n-1)}(\Omega)$ подпространство M (над $\mathbb{R}$), образованное формами вида

$$\varphi = \sum_{i=1,j=1}^{n} \varphi_{ij}(z) \wedge \omega_{ij},$$

удовлетворяющими условию

$$\operatorname{Im}\left(\sum_{i=1,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_{ij}}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}\right) \equiv 0.$$

Очевидно, H-преобразование Радона любой формы из M непрерывно на H. Обозначим через $C(H)$ пространство действительнозначных, непрерывных на H функций. Тогда H-преобразования Радона форм из M образуют подпространство в $C(H)$, которое обозначим через R. Пусть далее $\widetilde{R}$ — подпространство в $C(H)$, которое образуют функции, мажорируемые функциями из R, т. е. $\psi \in \widetilde{R}$ тогда и только тогда, когда существует функция $\widehat{\varphi} \in R$ такая, что $|\psi| \leq \widehat{\varphi}$.

Лемма 3. *Пространство $\widetilde{R}$ содержит все финитные функции из $C(H)$. Любая функция h из $\widetilde{R}$ имеет вид $h = q\widehat{\varphi}$, где q — непрерывная ограниченная функция, $\widehat{\varphi} \in R$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала для произвольного m неотрицательную функцию $\psi_m \in \mathcal{D}(\Omega)$, равную единице на $\overline{\Omega}_{m+1}$. Положим $\varphi_m = \sum\limits_{i=1}^{n} \psi_m \wedge \omega_{ii}$. Тогда $dd^c\varphi_m = \Delta\psi_m$ и для $P \in H_m$ имеем $\widehat{\varphi}_m(P) \geq c_n \mu_P(\overline{\Omega}_{m+1})$, где μ_P — риссовская мера функции $\ln|P(z)|$. Существует $\varepsilon_m > 0$ такое, что ε_m-расширение $\overline{\Omega}_m$ содержится в Ω_{m+1}. Тогда, т. к. функция $P \in H_m$ обращается в нуль в некоторой точке $\overline{\Omega}_m$, то ([21], с. 147) $\mu_P(\overline{\Omega}_{m+1}) \geq d_n \varepsilon_m^{2n-2}$. Таким образом, для некоторой постоянной a_n и любого $P \in H_m$ имеем $\widehat{\varphi}_m(P) \geq a_n \varepsilon_m^{2n-2}$. Если $h \in C(H)$ — произвольная функция с компактным носителем, то ее носитель для некоторого m содержится в $H_{m,1/m}$ и в силу доказанного для некоторой постоянной A верно $|h| \le A\widehat{\varphi}_m$. Если $h \in \widetilde{R}$ — произвольная функция, по определению имеем $|h| \le \widehat{\psi}$, где $\widehat{\psi}$ — H-преобразование Радона некоторой формы

$$\psi = \sum_{i,j=1}^{n} \psi_{ij} \wedge \omega_{ij} \in M.$$

Объединение носителей функций ψ_{ij} содержится в некоторой области Ω_m. Если неотрицательная функция $f_m \in \mathcal{D}(\Omega)$ равна единице на $\overline{\Omega}_{m+1}$, то для некоторой постоянной $A > 0$ форма $A\varphi_m - \psi^*$, где

$$\psi^* = \sum_{i,j=1}^{n} (1/2)(\psi_{ij} + \overline{\psi}_{ji}) \wedge \omega_{ij}, \quad \varphi_m = \sum_{i=1}^{n} f_m \wedge \omega_{ii},$$

положительна (по определению положительной формы в [21], с. 248). Следовательно, для любой голоморфной в Ω функции f имеем $\langle dd^c \ln|f|, A\varphi_m - \psi^* \rangle \ge 0$. В частности, отсюда следует, что H-преобразование Радона формы $A\varphi_m - \psi^*$ неотрицательно, т. е. $A\widehat{\varphi}_m \ge \widehat{\psi}^*$. Так как $\psi \in M$, то H-преобразования Радона форм ψ и ψ^* совпадают, поэтому верно $A\widehat{\varphi}_m \ge \widehat{\psi}$. При этом для $P \notin H_m$ имеем $\widehat{\psi}(P) = 0$, а для $P \in H_m$ верно $\widehat{\varphi}_m \ge c_0 > 0$. Так как $|h| \le \widehat{\psi}$, то $h/\widehat{\varphi}_m$ — ограниченная функция. Эта функция непрерывна, т. к. $h(P) = 0$ для $P \notin H_m$, а на H_m $\widehat{\varphi}_m \ge c_0 > 0$. □

Пусть, как и выше, Ω — псевдовыпуклая область. Обозначим через $\mathcal{P}(\Omega)$ множество классов эквивалентности функций из $PSH(\Omega)$, считая две функции эквивалентными, если их разность плюригармонична в Ω. Далее, сохраняя предыдущие обозначения, введем множество $F(\Omega)$ классов эквивалентности положительных функционалов на $\widetilde{R}$, считая эквивалентными функционалы, совпадающие на R, где, как и выше, R — множество H-преобразований Радона форм из $\mathcal{D}^{(n-1,n-1)}(\Omega)$.

Теорема 4. *Если Ω — область Рунге такая, что фактор-группа $H^2(\Omega, \mathbb{C})$ d-замкнутых форм второй степени по d-точным тривиальна, то пространства $\mathcal{P}(\Omega)$ и $F(\Omega)$ линейно изоморфны.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что область Ω удовлетворяет условию разрешимости dd^c-уравнения в потоках [22]. Пусть $u(z) \in PSH(\Omega)$. Определим на R функционал F, полагая $\langle F, \widehat{\varphi} \rangle = \langle u, dd^c\varphi \rangle$ для $\widehat{\varphi} \in R$. Покажем, что функционал F определен корректно. Пусть для $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}^{(n-1,n-1)}(\Omega)$ верно $\widehat{\varphi}_1 = \widehat{\varphi}_2$. Тогда согласно нашим обозначениям верно $\langle dd^c \ln|f|, \varphi_1 - \varphi_2 \rangle = 0$ для любой функции $f \in H$, т. е. для любой функции, голоморфной в Ω и удовлетворяющей условиям (8)–(10). Для любой линейной функции $s - \langle z, \xi \rangle$, нулевое множество которой пересекается с Ω, найдется постоянная C такая, что $C(s - \langle z, \xi \rangle) \in H$, и в этом случае

$$\langle dd^c \ln|(s - \langle z, \xi \rangle)|, \varphi_1 - \varphi_2 \rangle = \langle dd^c \ln|C(s - \langle z, \xi \rangle)|, \varphi_1 - \varphi_2 \rangle = 0.$$

Если же функция $f(z) = s - \langle z, \xi \rangle$ не имеет нулей в Ω, то, т. к. носитель $\varphi_1 - \varphi_2$ содержится в Ω, $\langle dd^c \ln|f|, \varphi_1 - \varphi_2 \rangle = 0$. Таким образом, для любой линейной функции f имеем $\langle dd^c \ln|f|, \varphi_1 - \varphi_2 \rangle = 0$. Тогда $dd^c\varphi_1 = dd^c\varphi_2$ по лемме 1, т. е. $\langle dd^c u, \varphi_1 - \varphi_2 \rangle = 0$. Таким образом, функционал F корректно определен. Покажем, что F — положительный функционал на R. Действительно, если для $\varphi \in \mathcal{D}^{(n-1,n-1)}(\Omega)$ верно $\widehat{\varphi} \ge 0$, то по условию для любой функции из H имеем $\langle dd^c \ln|f|, \varphi \rangle \ge 0$. Произвольный полином $p(z)$ для некоторой постоянной C удовлетворяет оценке $|Cp(z)| \le \exp|z|$, поэтому для любого полинома $p(z)$, имеющего нули в Ω, верно $\langle dd^c \ln|p|, \varphi \rangle \ge 0$. Для полинома, не имеющего нулей в Ω, последнее неравенство очевидно, поэтому в силу того, что Ω — область Рунге, для любой функции $g \in H(\Omega)$ верно $\langle dd^c \ln|g|, \varphi \rangle \ge 0$. Тогда из следствия теоремы 1 вытекает, что для любой функции $u \in PSH(\Omega)$ верно неравенство $\langle dd^c u, \varphi \rangle \ge 0$. Таким образом, F — положительный функционал.

По определению пространства $\widetilde{R}$ функционал F продолжается на $\widetilde{R}$ с сохранением положительности ([23], с. 270). Класс эквивалентности этих продолжений обозначим через $A(u)$, а через

A — оператор, ставящий в соответствие плюрисубгармонической функции u класс эквивалентности положительных функционалов. Оператор A линеен. Если $A(u) = 0$, то по определению это означает, что для любой формы $\varphi \in \mathcal{D}^{(n-1,n-1)}(\Omega)$ имеем $\langle dd^c u, \varphi\rangle = 0$, т. е. функция u плюригармонична в Ω. Таким образом, если оператор A рассматривать на классах эквивалентности плюрисубгармонических функций, то он представляет собой инъективный линейный оператор. Покажем, что оператор A сюръективен. Рассмотрим произвольный положительный функционал на $\widetilde{R}$. Пусть $\widetilde{R}'$ — множество всех $\mathbb{R}$-линейных $\mathbb{R}$-значных функционалов на $\widetilde{R}$. Тогда $(\widetilde{R}, \widetilde{R}')$ — дуальная пара ([24], с. 157). Пусть B — подмножество в $\widetilde{R}'$, которое образуют функционалы вида $\alpha\delta_P$, $\alpha \geq 0$, $P \in H$, где $\langle \alpha\delta_P, \varphi\rangle = \alpha\varphi(P)$. Пусть $B^\circ \subset \widetilde{R}$ – поляра множества B, $B^{\circ\circ} \subset \widetilde{R}'$ — биполяра, т. е.

$$B^\circ = \{\varphi \in \widetilde{R} \mid \sup_{f\in B} f(\varphi) \leq 1\}, \quad B^{\circ\circ} = \{f \in \widetilde{R}' \mid \sup_{\varphi\in B^\circ} f(\varphi) \leq 1\}.$$

Тогда B° совпадает с множеством $\left\{\varphi \in \widetilde{R} \mid \varphi \leq 0\right\}$, а $B^{\circ\circ}$ — с множеством положительных функционалов на $\widetilde{R}$. Поэтому ([24], с. 160) для любой функции $\varphi \in \widetilde{R}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует функционал μ_ε, равный конечной линейной комбинации функционалов вида $\mu_{k,\varepsilon} = \alpha_{k,\varepsilon}\delta_{P_{k,\varepsilon}}$, $\alpha_{k,\varepsilon} \geq 0$, $P_{k,\varepsilon} \in H$, и такой, что $|\mu_\varepsilon(\varphi) - F(\varphi)| \leq \varepsilon$. Тогда для любой функции $\varphi \in \widetilde{R}$ существует последовательность (зависящая от φ) функционалов

$$\mu_m = \sum \alpha_{km}\delta_{P_{km}}$$

таких, что $\mu_m(\varphi) \to F(\varphi)$. Определим на $\mathcal{D}^{(n-1,n-1)}(\Omega)$ поток T, полагая $\langle T, \varphi\rangle = \langle F, \widehat{\varphi}\rangle$ для $\varphi \in \mathcal{D}^{(n-1,n-1)}(\Omega)$, где $\widehat{\varphi}$ — H-преобразование Радона φ. Очевидно, поток T положителен. Так как

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle F, \widehat{\varphi}\rangle = \lim_{m\to\infty} \sum \alpha_{km}\widehat{\varphi}(P_{km}) = \lim_{m\to\infty} \sum \alpha_{km}\langle \ln|P_{km}|, dd^c\varphi\rangle,$$

то поток T d-замкнут. Поскольку Ω удовлетворяет условию разрешимости dd^c-уравнения в потоках, то существует плюрисубгармоническая в Ω функция $u(z)$ такая, что $\langle T, \varphi\rangle = \langle u, dd^c\varphi\rangle$. При этом по определению оператора A имеем $A(u) = \{F\}$, где $\{F\}$ — класс эквивалентности, содержащий положительный функционал F. $\square$

Литература

1. Bedford E., Taylor B.A. *The Dirichlet problem for a complex Monge–Ampere equation* // Invent. math. – 1976. – V. 37. – № 1. – P. 1–44.
2. Bedford E., Taylor B.A. *A new capacity for plurisubharmonic functions* // Acta Math. – 1982. – V. 149. – № 1–2. – P. 1-40.
3. Садуллаев А. *Плюрисубгармонические меры и емкости на комплексных многообразиях* // УМН. – 1981. – Т. 36. – Вып. 4. – С. 53–105.
4. Секерин А.Б. *Об интегральном представлении субгармонических функций* // Матем. заметки. – 1984. – Т. 36. – Вып. 6. – С. 865–871.
5. Секерин А.Б. *Применения преобразования Радона в теории аппроксимации.* – Уфа: Башкирск. научн. центр УрО АН СССР, 1991. – 192 с.
6. Секерин А.Б. *О приводимости нулевых множеств целых функций многих переменных* // Сиб. матем. журн. – 1993. – Т. 34. – № 2. – С. 154–165.
7. Sekerin A.B. *Representation of functions by logarithmic potential and reducibility of analytic functions of several variables* // Collectanea math. – 1996. – V. 47. – № 2. – P. 187–206.
8. Секерин А.Б. *О представлении аналитических функций многих переменных рядами экспонент* // Известия РАН. Сер. матем. – 1992. – Т. 56. – № 3. – С. 538–565.
9. Секерин А.Б. *Представление бесконечно дифференцируемой функции разностью плюрисубгармонических* // Матем. заметки. – 1986. – Т. 40. – Вып. 5. – С. 598–607.

10. Секерин А.Б. *Локальное интегральное представление строго плюрисубгармонических функций* // Матем. заметки. – 1993. – Т. 53. – Вып. 6. – С. 108–115.
11. Харви Р. *Голоморфные цепи и их границы.* – М.: Мир, 1979. – 160 с.
12. Шабат Б.В. *Распределение значений голоморфных отображений.* – М.: Наука, 1982. – 288 с.
13. Гельфанд И.М., Гиндикин С.Г., Граев М.И. *Интегральная геометрия в аффинном и проективном пространствах* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. матем. – 1980. – Т. 16. – С. 53–226.
14. Хёрмандер Л. *Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.* – М. : Мир, 1986. – 455 с.
15. Садуллаев А. *Плюрисубгармонические функции* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. матем. – 1985. – Т. 8. – С. 65–113.
16. Bremermann H. *On the conjecture of the equivalence of the plurisubharmonic functions and the Hartogs functions* // Math. Ann. – 1956. – V. 131. – № 1. – P. 76–86.
17. Хёрмандер Л. *Теория распределений и анализ Фурье.* – М.: Мир, 1986. – 462 с.
18. Ронкин Л.И. *Введение в теорию целых функций многих переменных.* – М.: Наука, 1971. – 432 с.
19. Ганнинг Р., Росси Х. *Аналитические функции многих комплексных переменных.* – М.: Мир, 1969. – 395 с.
20. Маркушевич А.И. *Теория аналитических функций.* – М.: Наука, 1967. – Т. 1. – 488 с.
21. Чирка Е.М. *Комплексные аналитические множества.* – М.: Наука, 1985. – 272 с.
22. Чирка Е.М. *Потоки и некоторые их применения* / Добавление к книге Харви Р. *Голоморфные цепи и их границы.* – М.: Мир, 1979. – С. 122–154.
23. Мейер П.А. *Вероятность и потенциалы.* – М.: Мир, 1973. – 324 с.
24. Шефер Х. *Топологические векторные пространства.* – М.: Мир, 1971. – 359 с.

Орловский государственный университет

Поступила
25.10.2001