ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 12 (427)

УДК 514.172.45

В.Н. ШЕВЧЕНКО

О РАЗБИЕНИИ ВЫПУКЛОГО ПОЛИТОПА НА СИМПЛЕКСЫ БЕЗ НОВЫХ ВЕРШИН

1. *Введение.* Пусть $M = \mathrm{Conv}(v_1, \dots, v_l)$ — d-мерный политоп, заданный как выпуклая оболочка своих вершин v_k $(k = 1, \dots, l)$, $\Gamma_j(M)$ — множество j-мерных граней M и $f_j(M) = |\Gamma_j(M)|$ — их число $(j = 0, \dots, d)$, в частности, $\Gamma_0(M) = \{v_1, \dots, v_l\}$, $\Gamma_d(M) = M$, $f_0(M) = l$ и $f_d(M) = 1$. Вектор $f(M) = (f_0(M), \dots, f_d(M))$ назовем f-вектором политопа M. Так как M d-мерный, то $l \geq d + 1$. В частности, если $l = d + 1$ и $\Gamma_0(M)$ — аффинно независимое множество, то M называется d-мерным симплексом и $f_j(M) = \binom{d+1}{j+1}$, где $\binom{m}{n} = m!\,(n!\,(m-n)!\,)^{-1}$ при $m \geq n$ и $\binom{m}{n} = 0$ при $m < n$.

Рассмотрим множество $\mathcal{M}_d$ всех d-мерных политопов и множество $\mathcal{F}_f = \{f(M),\ M \in \mathcal{M}_d\}$. Хорошо известно (напр., [1]–[3]), что компоненты f-вектора $f(M)$ удовлетворяют уравнению Эйлера–Пуанкаре

$$\sum_{j=0}^{d} (-1)^j f_j(M) = 1 \tag{1}$$

и что размерность аффинной оболочки множества $\mathcal{F}_f$ равна d, т.е. она описывается одним уравнением (1). (Аффинную оболочку множества N будем обозначать через $\operatorname{aff} N$.)

Политоп $M \in \mathcal{M}_d$ называется симплициальным, если любая его $(d-1)$-мерная грань является симплексом. Обозначим через $\mathcal{S}_d$ подмножество симплициальных политопов из $\mathcal{M}_d$ и рассмотрим множество $G_d = \{f(M),\ M \in \mathcal{S}_d\}$. Известно [1]–[3], что для $f(M) \in G_d$ кроме уравнения (1) выполняются уравнения Дена–Соммервиля

$$\sum_{j=k}^{d-1} (-1)^j \binom{j+1}{k+1} f_j(M) = (-1)^{d-1} f_k(M), \quad k = 0, 1, \dots, d-2, \tag{2}$$

и что размерность $\operatorname{aff} G_d$ равна $\lfloor d/2 \rfloor$, где $\lfloor \alpha \rfloor$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее α.

Определение 1. Множество $T(M) = \{S_1, \dots, S_t\}$, где $S_1, \dots, S_t$ — d-мерные симплексы, назовем *покрытием* политопа M, если

$$M = \bigcup_{\tau=1}^{t} S_\tau. \tag{3}$$

Покрытие $T(M)$ назовем *разбиением* политопа M, если

$$\operatorname{int} S_\tau \cap \operatorname{int} S_\sigma = \emptyset, \quad \tau \neq \sigma, \tag{4}$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00639).

где $\operatorname{int} M$ — множество внутренних точек политопа M. Если условие (4) заменить более сильным

условием (A) $S_\tau \cap S_\sigma$ либо пусто, либо является их общей гранью,

то $T(M)$ назовем *триангуляцией* M.

Покрытие, разбиение, триангуляцию $T(M)$ будем называть *правильными*, если

$$\Gamma_0(S_\tau) \subset \Gamma_0(M), \quad \tau = 1, \ldots, t. \tag{5}$$

При $j = 0, \ldots, d$ положим $\Gamma_j(TM) = \bigcup\limits_{\tau=1}^{t} \Gamma_j(S_\tau)$, $f_j(TM) = |\Gamma_j(TM)|$, $\mathcal{K}_\tau(M) = \bigcup\limits_{j=0}^{d} \Gamma_j(TM)$, $f(TM) = (f_0(TM), \ldots, f_d(TM))$. Заметим, что если $T(M)$ — триангуляция, то из условия (4) следует ([6], с. 25), что $\mathcal{K}_T(M)$ — симплициальный комплекс. Для симплициального комплекса $\mathcal{K}$ обозначим через $f_j(\mathcal{K})$ число j-мерных симплексов, принадлежащих $\mathcal{K}$, а через $\chi(\mathcal{K}) = \sum\limits_{j}^{d}(-1)^j f_j(\mathcal{K})$ — эйлерову характеристику комплекса $\mathcal{K}$. Хорошо известно (это следует, например, из теорем 9 и 16 книги [6]), что для любых триангуляций любых политопов (в частности, для симплекса) эйлеровы характеристики совпадают и, следовательно,

$$\chi(\mathcal{K}(M)) = \sum_{j=0}^{d}(-1)^j f_j(TM) = 1. \tag{6}$$

Симплекс $S_\tau \in T(M)$ будем задавать характеристическим вектором $s(\tau)$, k-я координата которого $s_k(\tau) = 1$, если $v_k \in S_\tau$, и $s_k(\tau) = 0$ в противном случае ($\tau = 1, \ldots, t$; $k = 1, \ldots, l$). В качестве иллюстрации рассмотрим 3-мерный октаэдр M с вершинами $v_j = e_j$, $v_{3+j} = -e_j$ ($j = 1, 2, 3$), где j-я координата e_j равна 1, а остальные — 0. Если $T(M) = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, где $s(1) = (1,1,1,1,0,0)$, $s(2) = (1,0,1,1,1,0)$, $s(3) = (1,1,0,0,1,1)$, $s(4) = (0,1,0,1,1,1)$, то $T(M)$ является правильным разбиением, но не является триангуляцией M. Из ([4], с. 35) следует, что любое правильное разбиение трехмерного октаэдра содержит 4 симплекса. Более интересный пример в этом смысле представляет куб: нетрудно найти его правильные триангуляции, содержащие 5 и 6 симплексов; несколько сложнее убедиться в том, что правильных разбиений куба с другим числом симплексов не существует.

Через $\mathcal{T}(M)$ обозначим множество всех правильных триангуляций $T(M)$ политопа M, через $\mathcal{H}(M) = \{f(TM),\ T(M) \in \mathcal{T}(M)\}$ — множество соответствующих f-векторов. Положим $\mathcal{H}_d = \bigcup\limits_{M \in \mathcal{M}_d} \mathcal{H}(M)$, $\mathcal{H}_{d,l} = \bigcup\limits_{M \in \mathcal{M}_{d,l}} \mathcal{H}(M)$, где $\mathcal{M}_{d,l}$ — множество d-мерных политопов с l вершинами, и поставим задачу описания множеств $\mathcal{H}(M)$, $\mathcal{H}_{d,l}$ и $\mathcal{H}_d$. По-видимому, это трудные задачи, т.к. до сих пор неизвестно решение аналогичной задачи описания множества $\mathcal{F}_d$ при $d > 3$ и лишь недавно описано множество G_d ([1], с. 210).

В предлагаемой работе получен аналог уравнений Дена–Соммервиля, которым удовлетворяют f-векторы произвольных триангуляций, что позволило, в частности, описать множества $\operatorname{aff} \mathcal{H}_{d,l}$ и $\operatorname{aff} \mathcal{H}_d$ в виде системы линейных уравнений. При $d = 3$ этого оказалось достаточно для описания множеств $\mathcal{H}_{3,l}$ и $\mathcal{H}_3$, что и сделано в последнем пункте. Ранее ([4], с. 31; [5]) рассматривалась величина $\nu(M) = \min f_d(TM)$, где минимум берется по всем правильным разбиениям политопа M, и получены ее оценки. Например, исследуя величину $\nu(d,m) = \max \nu(M)$ на классе $\mathcal{M}_d(m)$ d-мерных политопов, описываемых не более, чем m неравенствами, А.Ю. Чирков показал [5], что $d^{-1}\xi_d(m) \le \nu(d,m) \le d!\,\xi_d(m)$, где $\xi_d(m) = \binom{m-\lfloor (d-1)/2\rfloor-1}{\lfloor d/2\rfloor} + \binom{m-\lfloor d/2\rfloor-1}{\lfloor (d-1)/2\rfloor}$.

В [7] анонсированы значения величины $\nu(M)$ для некоторых классов 3-мерных политопов.

2. *Алгоритмы.* Существование правильных покрытий следует из теоремы Каратеодори (см., напр., [2], с. 17), утверждающей, в частности, что M совпадает с объединением всех d-мерных симплексов, для которых выполнено условие (5). Отсюда следует, что для любого правильного покрытия $T(M)$ политопа $M \in \mathcal{M}_{d,l}$ выполняются неравенства

$$f_j(M) \le f_j(TM) \le \binom{l}{j+1}, \quad j = 0, \dots, d. \tag{7}$$

Опишем более экономный алгоритм $\mathcal{A}_0$ правильного покрытия политопа M. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l) \neq 0$ — решение системы линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{l} \alpha_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{l} \alpha_k v_k = 0, \tag{8}$$

$K_+ = \{k,\ \alpha_k > 0\}$, $K_- = \{k,\ \alpha_k < 0\}$. Заметим, что такое α не существует тогда и только тогда, когда M — симплекс (т.е. $l = d+1$). Если же $l > d+1$, то первое из уравнений системы (8) гарантирует, что K_+ и K_- не пусты и, значит, содержат по крайней мере по два элемента, т.к. в противном случае некоторая вершина M являлась бы выпуклой комбинацией остальных. Алгоритм $\mathcal{A}_0$ основан на следующем результате, доказанном в ([4], с. 16).

Лемма 1. *Пусть $l > d+1$ и $M_k = \mathrm{Conv}(v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_l)$. Тогда*

$$M = \bigcup_{k \in K_+} M_k = \bigcup_{k \in K_-} M_k. \tag{9}$$

Если $l = d+2$, то каждое из равенств (9) *дает правильное разбиение M, а других правильных разбиений не существует.*

Рассмотрим при $d \ge 4$ политоп M с вершинами $v_k = e_k$ $(k = 1, \dots, d)$, $v_{d+1} = \sum\limits_{k=1}^{d} v_k$, $v_{d+2} = 0$. По лемме 1 существуют только две правильные триангуляции T_1 и T_2 политопа M, для одной из которых $f_d(T_1 M) = 2$ и для другой $f_d(T_2 M) = d$, и не существует T, для которой $f_d(TM) = 3$. При $d = 3$ примеры такого рода "дыр" автору неизвестны.

Приведем два алгоритма построения правильных триангуляций $T(M)$. В алгоритме $\mathcal{A}_1$ ([8], с. 244), использующем индукцию по размерности d, выбирается начальная вершина $\omega_0 \in \Gamma_0(M)$ и находится множество $\Gamma_{d-1}(\omega_0)$ граней M размерности $d-1$, не имеющих ω_0 своей вершиной. Далее, для каждой $F \in \Gamma_{d-1}(\omega_0)$ строится правильная триангуляция $T(F)$. Обозначим множество получившихся при этом $(d-1)$-мерных симплексов S' через T', и пусть $S = \mathrm{Conv}(\omega_0,\ S')$ — d-мерный симплекс, полученный добавлением вершины ω_0 к d вершинам S'. Тогда множество $\{S,\ S' \in T'\}$ дает правильную триангуляцию M.

В алгоритме $\mathcal{A}_2$ используется представление политопа M в виде $M = \mathrm{Conv}(\omega_0,\ M')$, где $\omega_0 \in \Gamma_0(M)$, а M' — политоп, порожденный остальными вершинами M. Если размерность M' равна $d-1$, то применяем алгоритм $\mathcal{A}_1$. В противном случае через $\Gamma'(\omega_0)$ обозначим множество замкнутых $(d-1)$-мерных граней M', отделяющих ω_0 от M', и будем считать известной правильную триангуляцию $T(M')$. Ясно, что $T(M')$ порождает правильную триангуляцию и для каждой $F \in \Gamma'_{d-1}(\omega_0)$. Обозначим множество получившихся при этом $(d-1)$-мерных симплексов S' через T' и положим $S = \mathrm{Conv}(\omega_0,\ S')$. Тогда, добавив множество $\{S,\ S' \in T'\}$ к $T(M')$, получим правильную триангуляцию политопа M. Доказательство следует из теоремы 1.31 ([4], с. 34).

Нетрудно привести примеры, показывающие, что число симплексов $|T(M)|$, получаемых как алгоритмом $\mathcal{A}_1$, так и алгоритмом $\mathcal{A}_2$, вообще говоря, зависит от выбора ω_0. Заметим также, что не любое возможное значение $|T(M)|$ можно получить, используя лишь один их этих алгоритмов, но не ясно, можно ли это сделать, комбинируя их.

Нахождение правильных разбиений или триангуляций политопа M (может быть, с какими-то дополнительными ограничениями) как правило легко сводится к задаче целочисленного программирования. Например, нахождение правильной триангуляции с максимальным числом симплексов равносильно задаче о максимальном независимом множестве на графе $G(M)$, вершины которого соответствуют всевозможным d-мерным симплексам S_τ, удовлетворяющим условию (5), и ребро соединяет вершины с номерами τ и σ, если не выполнено условие (A).

В качестве другого примера рассмотрим задачу нахождения числа $\nu(M)$ и соответствующего минимального разбиения. Пусть известен объем $V(M)$ политопа M и для каждого $\tau = 1, \ldots, \binom{l}{d+1}$ — объем V_τ политопа $S_\tau = \mathrm{Conv}(K_\tau)$, где K_τ — $(d+1)$-элементное подмножество $\Gamma_0(M)$. Введем переменные Z_τ, принимающие значение 1, если $S_\tau \in T(M)$, и 0 в противном случае. Тогда нетрудно проверить, что $\nu(M)$ есть решение задачи булева программирования — минимизировать $\sum\limits_\tau Z_\tau$ при ограничениях $Z_\tau + Z_\sigma \geq 1$, если не выполнено условие (4) и

$$\sum_\tau V_\tau Z_\tau = V(M). \tag{10}$$

Анализ последней задачи (точнее, условия (10)) позволил получить ([4], с. 35) нижнюю экспоненциальную от d оценку $\nu(M)$ для случая, когда M — d-мерный куб.

Проверка условия (4) сильно упрощается в случае, когда симплексы S_τ и S_σ имеют общую $(d-1)$-мерную грань.

Лемма 2. *Пусть* $T(M)$ — *правильное разбиение* M, $S = \mathrm{Conv}(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_d) \in T(M)$, $S' = \mathrm{Conv}(\omega_1, \ldots, \omega_d, \omega_{d+1}) \in T(M)$ *и* $bx = b_0$ — *уравнение гиперплоскости* Π, *проходящей через* $\omega_1, \ldots, \omega_d$. *Тогда* Π *разделяет* ω_0 *и* ω_{d+1}, *т.е.*

$$(b\omega_0 - b_0)(b\omega_{d+1} - b_0) < 0. \tag{11}$$

Доказательство. Найдем такие числа β_j $(j = 0, \ldots, d)$, что $\sum\limits_{j=0}^{d} \beta_j = 1$ и $\sum\limits_{j=0}^{d} \beta_j \omega_j = \omega_{d+1}$ (они существуют и единственны, т.к. S — d-мерный симплекс, причем $\beta_0 \neq 0$, т.к. S' — d-мерный симплекс). Тогда $b\omega_{d+1} - b_0 = \sum\limits_{j=0}^{d} \beta_j (b\omega_j - b_0) = \beta_0 (b\omega_0 - b_0)$ и для доказательства неравенства (11) достаточно показать, что $\beta_0 < 0$. Предположим противное и рассмотрим точку $\omega(\varepsilon) = \varepsilon\omega_0 + (1-\varepsilon) \sum\limits_{j=1}^{d} \omega_j / d$. Нетрудно проверить, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ $\omega(\varepsilon) \in \mathrm{int}\, S \cap \mathrm{int}\, S'$. Так как это противоречит условию (4), то лемма доказана.

Определение 2. Грань $F \in \Gamma_j(TM)$ назовем *внешней*, если F принадлежит границе M, и *внутренней* — в противном случае.

Следствие 1. Пусть $\mathcal{K}_T(M)$ — комплекс правильной триангуляции $T(M)$, $(d-1)$-мерная грань $F \in \mathcal{K}_T(M)$ и $f_d(F)$ — число симплексов из $T(M)$, содержащих F. Тогда если F внешняя, то $f_d(F) = 1$, а если F внутренняя, то $f_d(F) = 2$.

Теорема 1. *Если* M — *симплициальный политоп и* $T(M)$ — *его правильная триангуляция, то*

$$2\, f_{d-1}(TM) - f_{d-1}(M) = (d+1) f_d(TM). \tag{12}$$

Для доказательства заметим сначала, что $f_d(TM)$ симплексов имеют $(d+1)f_d(TM)$ $(d-1)$-мерных граней, каждая из которых либо внешняя, либо внутренняя. Обозначим число внутренних через g_{d-1}. Тогда $f_{d-1}(TM) = f_{d-1}(M) + g_{d-1}$ и по следствию 1 $f_{d-1}(M) + 2g_{d-1} = (d+1)f_d(TM)$, откуда и следует доказываемое равенство (12).

3. *Вывод аналога уравнений Дена–Соммервиля.* В этом пункте потребуются некоторые топологические понятия и результаты, которые можно найти, например, в [9]. Здесь под $T(M)$ понимается некоторая (не обязательно правильная) триангуляция политопа M.

Лемма 3. *Пусть f_j^F обозначает число j-мерных граней из $\mathcal{K}(M)$, содержащих F, и $\chi(F) = \sum\limits_{j=0}^{d}(-1)^j f_j(F)$. Тогда $\chi(F) = 0$, если F внешняя, и $\chi(F) = (-1)^d$, если F внутренняя.*

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathcal{K}_F(M)$ граней из $\mathcal{K}(M)$, не содержащих F. Очевидно, $\mathcal{K}_F(M)$ — симплициальный комплекс. Нетрудно видеть также, что если F — внешняя грань, то комплекс $\mathcal{K}_F(M)$ стягиваем в точку, а если F — внутренняя грань, то $\mathcal{K}_F(M)$ гомотопически эквивалентен $(d-1)$-мерной сфере. Отсюда следует, что в первом случае $\chi(\mathcal{K}_F(M)) = 1$ и $\chi(\mathcal{K}_F(M)) = 1 + (-1)^{d-1}$ — во втором случае. Так как $\chi(\mathcal{K}_F(M)) + \chi(F) = \chi(\mathcal{K}(M)) = 1$, то лемма доказана.

Следующий результат можно считать аналогом уравнений Дена–Соммервиля для триангуляций политопа M.

Теорема 2. *Если M — d-мерный политоп, $T(M)$ — его триангуляция и $g_i(TM)$ — число внутренних i-мерных граней $F \in \Gamma_i(TM)$, то при $i = 0, \dots, d-1$ выполняется равенство*

$$\sum_{j=i}^{d} \binom{j+1}{i+1} (-1)^j f_j(TM) = (-1)^d g_i(TM). \tag{13}$$

Доказательство. При $F \in \Gamma_i(TM)$ и $G \in \Gamma_j(TM)$ положим $\sigma(F,G)$ равным единице, если $F \subset G$, и нулю в противном случае. Тогда

$$\sum_{G \in \Gamma_j(TM)} \sigma(F,G) = f_j^F, \qquad \sum_{F \in \Gamma_i(TM)} \sigma(F,G) = \binom{j+1}{i+1}$$

и, следовательно,

$$\sum_{F \in \Gamma_i(TM)} f_j^F = \sum_{F \in \Gamma_i(TM)} \sum_{G \in \Gamma_j(TM)} \sigma(F,G) = \binom{j+1}{i+1} f_j(TM).$$

Воспользовавшись этим, преобразуем левую часть равенства (13)

$$\sum_{j=i}^{d} (-1)^j \binom{j+1}{i+1} f_j(TM) = \sum_{j=i}^{d} (-1)^j \sum_{F \in \Gamma_i(TM)} f_i^F = \sum_{F \in \Gamma_i(TM)} \chi(F).$$

По лемме 3 последняя сумма совпадает с правой частью равенства (13), что и доказывает теорему.

Заметим, что если M — симплициальный, то $g_i(TM) = f_i(TM) - f_i(M)$ и, в частности, при $i = d-1$ (13) равносильно равенству (12), доказательство которого, не опирающееся на лемму 3, сохранено как менее топологическое.

4. *Аффинная оболочка f-векторов правильных триангуляций.* Итак, мы показали, что компоненты f-вектора любой триангуляции политопа M удовлетворяют системе линейных уравнений (6), (13). Для правильных триангуляций $g_0(TM) = 0$ и эту систему можно переписать в виде

$$\sum_{j=0}^{d} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 0, 1, \dots, d, \tag{14}$$

где $x_j = f_j(TM)$ $(j = 0, \dots, d)$; $b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $b_i = (-1)^{d-1}(f_{i-1}(TM) - g_{i-1}(TM))$, $a_{i\,i-1} = (-1)^{i-1} - (-1)^d$ $(i = 2, \dots, d)$; $a_{ij} = (-1)^j \binom{j+1}{i}$ при остальных значениях i и j.

Лемма 4. *Ранг матрицы $A_d = (a_{ij})$ ограничений системы* (14) *равен* $\lfloor (d+4)/2 \rfloor$.

Доказательство. Действительно, обозначим ранг матрицы A_d через r_d и заметим, что ее последняя и предпоследняя строки пропорциональны и соответственно равны

$$(-1)^d \left(0, \ldots, 0, -d, \binom{d+1}{2}\right) \quad \text{и} \quad (-1)^d (0, \ldots, 0, -2, d+1).$$

Отсюда следует, что $r_{d+2} \geq r_d + 1$. Для доказательства противоположного неравенства при нечетном $d \geq 3$ рассмотрим многочлен $x_d(t) = (t+1)^{\delta+1}$, где $\delta = \lfloor d/2 \rfloor$, а при четном $d \geq 4$ — многочлен $x_d(t) = (t+2)x_{d-1}(t)$. Используя разложение $x_d(t) = \sum\limits_{j=0}^{d} x_j t^{d-j}$, несложными комбинаторными вычислениями покажем

$$\sum_{j=0}^{d} a_{ij} x_j = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, d, \tag{15}$$

и, следовательно, $r_{d+2} \leq r_d + 1$. Для окончания доказательства леммы достаточно теперь проверить ее утверждение для $d = 1, 2$ и воспользоваться математической индукцией.

Следствие 2. Положим $t^{2i} x_{d-2i}(t) = \sum\limits_{j=0}^{d} h_{ij} t^{d-j}$ и $h^i = (h_{i0}, \ldots, h_{id})$. Тогда векторы h^i ($i = 0, \ldots, \lfloor (d-3)/2 \rfloor$) составляют фундаментальную систему решений системы (15).

Следствие 3. Размерность $\operatorname{aff} \mathcal{H}(M)$ не превосходит $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$.

Определение 3 (ср. [1], с. 142). Политоп M называется *α-смежностным*, если

$$f_i(M) = \binom{l}{i+1} \quad (i = 0, \ldots, \alpha - 1).$$

Известно ([1], с. 143), что при $\alpha > \lfloor d/2 \rfloor$ единственным α-смежностным политопом является симплекс и что при $\alpha \leq \lfloor d/2 \rfloor$ для любого $l \geq d+1$ существует α-смежностный политоп. Из неравенства (7) и следствия 1 вытекает утверждение, обобщающее следствие 3.

Следствие 4. Если M — α-смежностный политоп, то размерность $\operatorname{aff} \mathcal{H}(M)$ не превосходит $\lfloor (d+1)/2 \rfloor - \alpha$. При нечетном d и $\alpha = d/2$ $|\mathcal{H}(M)| = 1$.

Перейдем теперь к описанию аффинной оболочки множеств $\mathcal{H}_{d,l}$ и $\mathcal{H}_d$, обозначив ее размерность соответственно через $h_{d,l}$ и h_d. Уже доказано, что компоненты любого вектора $f = (f_0, \ldots, f_d) \in \mathcal{H}_d$ удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\sum_{j=0}^{d} (-1)^j f_j = 1, \quad \sum_{j=0}^{d} (-1)^j (1+j) f_j = 0, \tag{16}$$

и, следовательно, $h_d \leq d-1$. Кроме того, очевидно, $h_{d,l} = h_d - 1$, $\mathcal{H}_{2,l} = \{(l, 2l-3, l-2)\}$ и $h_2 = 1$.

Покажем, что $h_d = d-1$, для чего рассмотрим два класса политопов: пирамиды и бипирамиды (см., напр, [2], с. 42).

Определение 4. Политоп $M' = \operatorname{Conv}(v_0, M)$ называется *d-мерной пирамидой с основанием M и вершиной v_0*, если $M \in \mathcal{M}_d$ и $v_0 \notin \operatorname{aff} M$.

Определение 5. Политоп $M' = \operatorname{Conv}(v_0, M, v_{l+1})$ называется *d-мерной бипирамидой с основанием M*, если $M \in \mathcal{M}_{d-1}$ и существует единственное число λ такое, что $0 < \lambda < 1$ и $\lambda v_0 + (1-\lambda) v_{l+1} \in \operatorname{int} M$.

Очевидна

Лемма 5. *Если $M' = \mathrm{Conv}(v_0, M)$ — d-мерная пирамида, $T(M) = \{S_1, \dots, S_t\}$ — триангуляция политопа M и $S'_\tau = \mathrm{Conv}(v_0, S_\tau)$ $(\tau = 1, \dots, t)$, то $\{S'_1, \dots, S'_t\}$ — правильная триангуляция политопа M', а других триангуляций M' не существует.*

Следствие 5. Если $f = (f_0, \dots, f_{d-1}) \in \mathcal{H}_{d-1,l}$, то $f' = (f_0 + 1, f_1 + f_0, \dots, f_{d-1} + f_{d-2}, f_{d-1}) \in \mathcal{H}_{d,l+1}$.

Если применить алгоритм $\mathcal{A}_2$ к бипирамиде $M' = \mathrm{Conv}(v_0, M, v_{l+1})$, взяв за начальную вершину v_0, то получим правильную триангуляцию $t(M') = \{\mathrm{Conv}(v_0, S_\tau), \mathrm{Conv}(v_{l+1}, \mathcal{S}_\tau), \mathcal{S}_\tau \in T(M)\}$ и, следовательно, $f_j(TM') = 2 f_{j-1}(TM) + f_j(TM)$, где $j = 0, \dots, d$, $f_{-1}(TM) = 1$, $f_d(TM) = 0$. Таким образом, справедливо

Следствие 6. Если $f = (f_0, \dots, f_{d-1}) \in \mathcal{H}_{d-1,l}$, то $f' = (f_0 + 2, f_1 + 2 f_0, \dots, f_{d-1} + 2 f_{d-2}, 2 f_d) \in \mathcal{H}_{d,l+2}$.

Теорема 3. *Аффинная оболочка множества $\mathcal{H}_d$ совпадает с множеством решений системы* (16). *При добавлении условия $f_0 = l$ система* (16) *описывает множество* $\mathrm{aff}\,\mathcal{H}_{d,l}$.

Доказательство. Рассмотрим при $i = 0, \dots, d-2$ многочлен $h_i(t) = (t+1)^{d-i}(t+2)^i = \sum\limits_{j=0}^{d} h_{ij} t^{d-j}$ и соответствующий ему вектор $h^i = (h_{i0}, \dots, h_{id})$. Индукцией по d покажем, что существует такой вектор g, при котором $\lambda h^i + g \in \mathcal{H}_d$ для любого неотрицательного числа λ. Очевидно, при $d = 2$ для проверки этого утверждения достаточно положить $g = (3, 3, 1)$. Предположив утверждение доказанным при $d-1$, воспользуемся следствиями 5 и 6. Нетрудно видеть, что следствие 5 приводит к умножению $h_i(t)$ на $t+1$, а следствие 6 — на $t+2$. Отсюда следует справедливость доказываемого утверждения для d. Для окончания доказательства теоремы осталось убедиться в линейной независимости системы многочленов $h_i(t)$ $(i = 0, \dots, d-2)$. Проще всего это сделать, заменив $t+1$ на t.

Следствие 7. Если $g \in \mathcal{H}_d$ и $g' \in \mathcal{H}_d$, то найдутся такие целые числа λ_i $(i = 1, \dots, d-2)$, что

$$g' - g = \sum_{i=0}^{d-2} \lambda_i h^i.$$

Действительно, существование (и единственность) чисел λ_i уже доказано, а их целочисленность следует из того, что матрица коэффициентов разложения многочленов $h_0(t-1), \dots, h_{d-2}(t-1)$ по степеням t одним из своих миноров $(d-1)$-го порядка имеет треугольный определитель с единицами по диагонали.

5. *Правильные триангуляции циклических политопов.* Рассмотрим один часто встречающийся пример симплициального политопа. Пусть при $d \geq 2$ в евклидовом пространстве R^d задана параметрическая кривая $y(\alpha) = (y_1(\alpha), \dots, y_d(\alpha))$, где $y_j(\alpha) = \alpha^j$, $j = 1, \dots, d$, и при $\alpha_1 < \dots < \alpha_l$ — множество точек $y(\alpha_1), \dots, y(\alpha_l)$ на этой кривой. Политоп $C_d(\alpha_1, \dots, \alpha_l) = \mathrm{Conv}(y(\alpha_1), \dots, y(\alpha_l))$ назовем *циклическим*, а множество всех d-мерных циклических политопов с l вершинами обозначим через $C(d, l)$. Известно (см., напр., [2], с. 24), что если $M \in C(d, l)$, то M является $\lfloor d/2 \rfloor$-смежностным, $f_j(M) = \binom{l}{j+1}$ при $j = 1, \dots, \lfloor d/2 \rfloor - 1$, а при остальных j однозначно определяются уравнениями (2) и могут быть выражены следующими формулами ([1], с. 175): при $d = 2\delta$

$$f_{d-j-1}(M) = \sum_{j=1}^{\delta} \binom{i}{j} \binom{l-d+i-1}{i} + \sum_{i=0}^{\delta-1} \binom{d-i}{j} \binom{l-d+i-1}{i}, \tag{17}$$

при $d = 2\delta + 1$

$$f_{d-j-1}(M) = \sum_{j=1}^{\delta} \left(\binom{i}{j} + \binom{d-i}{i} \right) \binom{l-d+i-1}{i}. \tag{18}$$

Далее, циклические политопы имеют максимальное число граней всех размерностей в классе $\mathcal{M}_{d,l}$ ([2], с. 93). Рассмотрим $(d-1)$-мерные грани циклического политопа и покажем, как упрощаются формулы (17) и (18) в этом случае. Любое d-элементное подмножество V вершин циклического политопа $M \in C(d,l)$ аффинно независимо, и можно определить, в каких случаях $\operatorname{Conv} V$ является гранью M, введя следующее понятие. Будем говорить, что вершина $y(\alpha_j)$ *разделяет* вершины $y(\alpha_i)$ и $y(\alpha_k)$, если $\alpha_i < \alpha_j < \alpha_k$. Ответ на поставленный вопрос дает следующее условие четности Д. Гейла.

Лемма 6 ([3], с. 62). *Любая пара вершин циклического политопа M, не принадлежащая d-элементному подмножеству V, разделяется четным числом вершин из V тогда и только тогда, когда V порождает грань политопа M.*

Отсюда следует ([3], с. 63), что при $M \in C(d,l)$

$$f_{d-1}(M) = \frac{l}{l-\delta}\binom{l-\delta}{\delta} \quad \text{для } d = 2\delta,$$

$$f_{d-1}(M) = 2\binom{l-\delta-1}{\delta} \quad \text{для } d = 2\delta+1.$$

Занумеруем все $(d-1)$-мерные грани F циклического политопа $M = C_d(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ в порядке лексикографического убывания характеристических векторов $x(F)$ и рассмотрим матрицу $A(M) = (a_{k\mu})$, элемент которой $a_{k\mu} = 1$, если $v_k = y(\alpha_k)$ является вершиной μ-й грани, и $a_{k\mu} = 0$ в противном случае ($k = 1, \ldots, l$; $\mu = 1, \ldots, m = f_{d-1}(M)$). Из леммы 6 следует, что для любого $M' = C_d(\alpha'_1, \ldots \alpha'_l)$ $A(M) = A(M')$ (напомним, что неравенства $\alpha_1 < \cdots < \alpha_l$ и $\alpha'_1 < \cdots < \alpha'_l$ предполагаются выполненными). Это позволяет обозначить $A(M)$ через $A(d,l)$ и $\sum\limits_{\mu=1}^{m} a_{k\mu}$ через $a_k(d,l)$.

Лемма 7. *Справедливы следующие равенства:*

$$a_{l-k+1}(d,l) = a_k(d,l), \quad k = 1, \ldots, l, \tag{19}$$

$$a_k(2\delta, l) = 2\binom{l-\delta-1}{\delta-1}, \quad k = 1, \ldots, l, \tag{20}$$

$$a_1(2\delta+1,\, l) = \binom{l-\delta-1}{\delta} + \binom{l-\delta-2}{\delta-1}, \tag{21}$$

$$a_{k+1}(2\delta+1,\, l) - a_k(2\delta+1,\, l) = \left\{ \begin{matrix} (-1)^k \binom{l-\delta-k-2}{\delta-k+1}, & k = 1, \ldots, \delta+1; \\ 0, & k = \delta+2, \ldots, \lfloor \frac{l+1}{2} \rfloor \end{matrix} \right\}. \tag{22}$$

Для доказательства равенства (19) достаточно переставить строки матрицы $A(d,l)$ в обратном порядке. Действительно, из леммы 6 следует, что это равносильно некоторой перестановке ее столбцов, т.к. условие четности Гейла останется выполненным.

Для доказательства равенства (20) допустим, что найдутся i и k, для которых $a_i(2\delta,\, l) \neq a_k(2\delta,\, l)$. Тогда, начиная алгоритм $\mathcal{A}_1$ с вершины v_i или v_k, получим разное число симплексов в правильной триангуляции M, что противоречит лемме 4. Итак, $a_1(2\delta,\, l) = \cdots = a_l(2\delta,\, l)$ и, подсчитав $\sum\limits_{k=1}^{l}\sum\limits_{\mu=1}^{m} a_{k\mu}$ двумя способыми, получим (20).

Формулы (21) и (22) легко проверяются при $l = 2\delta + 2$. Поэтому далее будем считать, что $l \geq 2\delta + 3$. Обозначим через $\mathcal{M}_0(d,l)$ и $\mathcal{M}_1(d,l)$ соответственно множество столбцов матрицы $A(d,l)$, начинающихся четным и нечетным числом единиц, и положим $a_k^\nu(d,l) = \sum a_{k\mu}$, где $\nu = 0,1$ и суммирование ведется по столбцам из множества $\mathcal{M}_\nu(d,l)$. Для столбца $a = (a_1,\dots,a_l)^T$ матрицы $A(d,l)$ положим $\varphi(a) = (a_2,\dots,a_l)^T$, $\psi_0(a) = (0,a_1,\dots,a_l)^T$ и $\psi_1(a) = (1,a_1,\dots,a_l)^T$. Из леммы 6 следует, что 1) $\psi_0(a)$ — столбец матрицы $A(d+1,\, l+1)$; 2) $\psi_0(a)$ — столбец матрицы $A(a,\, l+1)$ тогда и только тогда, когда $a \in \mathcal{M}_0(d,l)$; 3) если $a_1 = 1$, то $\varphi(a)$ — столбец матрицы $A(d-1,\, l-1)$; 4) если $a_1 = 0$, то $a \in \mathcal{M}_0(d,l)$ и $\varphi(a) \in \mathcal{M}_0(d,\, l-1)$; 5) если $a_1 = 0$ и $d = 2\delta+1$, то при $a_l = 1$ $a' = (a_2,\dots,a_{l-1})^T \in \mathcal{M}_0(2\delta,\, l-2)$ и обратно, приписав единицу к любому a' из $\mathcal{M}_0(2\delta,\, l-2)$, получим $\varphi(a) \in \mathcal{M}_0(d,\, l-1)$. Из утверждений 1) и 3) следует равенство (21), а из 2) и 4) — равенство $a_{k+1}(d,\, l+1) = a_k(d-1,\, l) + a_k^0(d,\, l)$ $(k = 1,\dots,l)$. Отсюда и из 5) получаем при $k = 1,\dots,l$ $a_{k+1}(2\delta+1,\, l+2) = a_k(2\delta,\, l+1) + a_k^0(2\delta,\, l) = 4\binom{l-\delta}{\delta-1} - a_k(2\delta-1,\, l)$, что позволяет доказать равенство (22) индукцией по δ. Лемма 7 доказана полностью.

Рассмотрим политоп $M = C_d(\alpha_1,\dots,\alpha_l)$, при $k = 0,\dots,l$ такое число β, что $\alpha_k < \beta < \alpha_{k+1}$, точку $v = y(\beta)$ и политоп $M' = C_d(\alpha_1,\dots,\alpha_k,\beta,\alpha_{k+1},\dots,\alpha_l)$. Пусть $F \in \Gamma_{d-1}(M)$ и π — гиперплоскость, содержащая F. Если π отделяет v от M, то отнесем F к множеству $\mathcal{F}'$, а в противоположном случае — к множеству $\mathcal{F}''$ и положим $\varphi_k(d,l) = |\mathcal{F}'|$. Следующий результат получен совместно с Д.В. Груздевым.

Лемма 8. *При* $k = 0,\dots,l$ $\varphi_k(2\delta,l) = \binom{l-\delta-1}{\delta-1}$ *и*

$$\varphi_n(2\delta+1,l) = a_{k+1}(2\delta+1,l+1) - 2\binom{l-\delta-1}{\delta-1}. \tag{23}$$

Для доказательства рассмотрим $F \in \mathcal{F}''$ и ее характеристический вектор $x(F)$. Тогда $x'(F) = (x_1(F),\dots,x_k(F),0,x_{k+1}(F),\dots,x_l(F))$ — характеристический вектор некоторой грани $F' \in \Gamma_{d-1}(M')$, не содержащей точку v, и обратно. Следовательно, $|\mathcal{F}''| = f_{d-1}(M') - a_{k+1}(d,\, l+1)$, откуда и получаются доказываемые равенства.

Рассмотрим множество $\mathcal{H}(M)$ для $M \in C(d,l)$. По следствию 4 при четном $d = 2\delta$ $\mathcal{H}(M)$ содержит единственный вектор $g^0 = (g_0^0,\dots,g_d^0)$, компоненты которого однозначно определяются значением l. Их можно найти из системы (14) с учетом условий

$$g_j^0 = f_j(M), \quad j = 1,\dots,\delta-1. \tag{24}$$

При нечетном $d = 2\delta+1$ условий (24) недостаточно для однозначности решения системы (14). Дополним систему (24) еще одним условием $g_\delta^0 = f_\delta(M)$. Тогда решение системы (14) также существует и единственно, обозначим его через g^0. Заметим, что формула (18) в этом случае тоже упрощается ([2], с. 104)

$$f_\delta(M) = \binom{l}{\delta+1} - \binom{l-\delta-2}{\delta+1}. \tag{25}$$

Теперь, используя только что построенный вектор g^0 и вектор h^0 (j-я координата которого $h_{0j} = \binom{\delta+1}{j-\delta}$ при $j = \delta,\dots,d$ и $h_{0j} = 0$ при $j < \delta$) из следствия 2, можно локализовать $\mathcal{H}(M)$.

Теорема 4. *Если* $M \in C(d,l)$ *и* $d = 2\delta+1$, *то*

$$\mathcal{H}(M) = \left\{ g^0 + \lambda h^0,\ \lambda = 0,\dots,\binom{l-\delta-2}{\delta+1} \right\}. \tag{26}$$

Доказательство. Обозначим правую часть соотношения (26) через $\mathcal{H}(d,l)$ и рассмотрим $M = C_d(\alpha_1,\dots,\alpha_l)$, где $l \ge d+1$ и $\alpha_1 < \dots < \alpha_l$. Следствие 4 показывает, что каждый вектор из $\mathcal{H}(M)$ представляется в виде $g^0 + \lambda h^0$. Из формулы (25) и неравенства (7) следует, что $0 \le \lambda \le \binom{l-\delta-2}{\delta+1}$, т.е. $\mathcal{H}(M) \subset \mathcal{H}(d,l)$. Для доказательства противоположного включения рассмотрим множество $\Phi(d,l) = \{f_d(TM),\ T \in (M)\}$ и индукцией по l докажем, что $\Phi(d,l)$ содержит все целые числа от $\binom{l-\delta-2}{\delta}$ до $\binom{l-\delta-1}{\delta+1}$. При $l = d+1$, дающем основание индукции, M — симплекс, и проверка тривиальна. В противном случае рассмотрим политоп $M_\beta = \mathrm{Conv}(y(\beta), M)$ и применим к нему алгоритм $\mathcal{A}_2$, выбрав $y(\beta)$ в качестве ω_0. Обозначим множество $(d-1)$-мерных граней политопа M, не являющихся гранями политопа M_β, через Φ_β. Тогда $|\Phi_\beta| = \varphi_i(d,l)$ при $\alpha_i < \beta < \alpha_{i+1}$ $(i = 0,\dots,l)$. Из описания алгоритма $\mathcal{A}_2$ следует, что если $z \in \Phi(d,l)$, то $z + \varphi_i(d,l) \in \Phi(d,l+1)$. Таким образом, $\Phi(d,l+1)$ содержит множество Π_i всех целых чисел z таких, что

$$\binom{l-\delta-2}{\delta} + \varphi_i(d,l) \ge z \ge \binom{l-\delta-1}{\delta+1} + \varphi_i(d,l),$$

и, в частности, числа

$$\binom{l-\delta-2}{\delta} + \varphi_1(d,l) = \binom{l-\delta-1}{\delta} \qquad \text{и} \qquad \binom{l-\delta-1}{\delta+1} + \varphi_0(d,l) = \binom{l-\delta}{\delta+1}.$$

Осталось доказать, что любое целое число z такое, что $\binom{l-\delta-1}{\delta} < z < \binom{l-\delta}{\delta+1}$ тоже принадлежит $\Phi(d,l+1)$, для чего достаточно проверить, что $\prod\limits_{i-1} \bigcap \prod\limits_{i+1} \ne \emptyset$. Поскольку из лемм 8 и 7 следует, что $\varphi_{i+1}(d,l+1) - \varphi_{i-1}(d,l+1) = (-1)^i \binom{1-\delta-i-1}{\delta-i+1}$, то это равносильно неравенству $\binom{l-\delta-2}{\delta} + \varphi_{i+1}(d,l) \le \binom{l-\delta-1}{\delta+1} + \varphi_{i-1}(d,l)$ при четном i и неравенству $\binom{l-\delta-2}{\delta} + \varphi_{i-1}(d,l) \le \binom{l-\delta-1}{\delta+1} + \varphi_{i+1}(d,l)$ при нечетном i. Так как в обоих случаях доказываемое утверждение сводится к очевидному при $l > 2\delta+2$ неравенству $\binom{l-\delta-i-2}{\delta-i+1} \le \binom{l-\delta-2}{\delta+1}$, то теорема доказана полностью.

6. *Трехмерный случай.* Приведем несколько анонсированных в [7], [10] результатов, легко получающихся из предыдущего при $d = 3$. Полное описание множества $\mathcal{H}_{3,l}$ (а следовательно, и $\mathcal{H}_3 = \bigcup\limits_{l \ge 4} \mathcal{H}_{3,l}$) дает

Теорема 5. *Для любой правильной триангуляции $T(M)$ политопа $M \in \mathcal{M}_{3,l}$ существует натуральное число λ такое, что*

$$f(TM) = (l,\ 2l-3,\ l-2,\ 0) + \lambda(0,1,2,1), \tag{27}$$

$$l - 3 \le \lambda \le \binom{l-2}{2}. \tag{28}$$

Для любого натурального числа λ, удовлетворяющего неравенствам (28), *существует правильная триангуляция $T(M)$ циклического политопа $M \in C(3,l)$, для которой вектор $f(TM)$ удовлетворяет уравнению* (27).

Действительно, первое утверждение следует из теоремы 3 и неравенства (7), а второе — из теоремы 4.

Следствие 8. Если $M \in C(3,l)$, то $H_{3,l} = \mathcal{H}(M)$.

Теорема 6. *Если $M \in \mathcal{M}_{3,l}$, $T(M)$ — его правильная триангуляция, $g_i = g_i(TM)$ — число внутренних i-мерных граней в $\mathcal{K}(M)$ $(i = 1,2)$, то $f_3(TM) = l + g_1 - 3 = 1 + g_2 - g_1 = (l + g_2 - 2)/2$.*

Следствие 9. При $d = 3$ четыре задачи минимизации чисел: $f_3(TM)$, $g_1(TM)$, $g_2(TM)$, $g_2(TM) - g_1(TM)$ равносильны. Аналогичное утверждение справедливо и для задачи максимизации.

В заключение благодарю Е.И. Яковлева за полезное обсуждение доказательства леммы 3.

Литература

1. Бренстед А. *Введение в теорию выпуклых многогранников.* – М.: Мир, 1988. – 240 с.
2. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. *Многогранники, графы, оптимизация.* – М,: Наука, 1981. – 344 с.
3. Grunbaum B. *Convex polytopes.* – N. Y.: Wiley, 1967. – 456 p.
4. Шевченко В.Н. *Качественные вопросы целочисленного программирования.* – М.: Физматлит, 1995. – 192 с.
5. Чирков А.Ю. *Теорема Каратеодори и покрытие многогранника симплексами.* Деп. в ВИНИТИ 19.03.93, № 668-В93.
6. Понтрягин Л.С. *Основы комбинаторной топологии.* – 2-е изд., М.: Наука, 1976. – 136 с.
7. Шевченко В.Н., Груздев Д.В. *О разбиении политопа на симплексы* // Ассоциация математического программирования. – Екатеринбург: УрО РАН, 1997. – № 7. – С. 234.
8. *Энциклопедия элементарной математики.* Кн. 5. – *Геометрия.* – М.: Наука, 1966. – 624 с.
9. Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Л.А., Фоменко Т.Н. *Введение в топологию.* – 2-е изд., М.: Наука, Физматлит, 1995. – 416 с.
10. Шевченко В.Н. *О разбиении выпуклого многогранника на тетраэдры* // Пробл. оптимизации и экономические прилож. Тез. междунар. конф. – Омск, 1997. – С. 171.

Нижегородский государственный университет

Поступила
22.07.1997