ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 10 (497)

УДК 517.958

С.Н. ТИМЕРГАЛИЕВ

К ВОПРОСУ О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Данная статья посвящена выводу условий, при которых краевая задача геометрически и физически нелинейной теории тонких анизотропных упругих оболочек имеет единственное решение. Показано, что при достаточно малых по норме внешних нагрузках задача в шаре малого радиуса имеет единственное решение.

1. Построение математической модели

В основе исследований лежат следующие соотношения нелинейной теории тонких оболочек ([1], с. 30):

$$\begin{gathered}
\varepsilon^0_{jj} \equiv \gamma^0_{jj} = w_{j\alpha^j} - G^k_{jj} w_k - B_{jj} w_3 + \omega_j^2/2, \quad j = 1,2,\\
2\varepsilon^0_{12} \equiv \gamma^0_{12} = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2G^k_{12} w_k - 2B_{12} w_3 + \omega_1\omega_2;\\
\varepsilon^1_{jj} \equiv \gamma^1_{jj} = -\omega_{j\alpha^j} + G^k_{jj}\omega_k, \quad j = 1,2,\\
2\varepsilon^1_{12} \equiv \gamma^1_{12} = -\omega_{1\alpha^2} - \omega_{2\alpha^1} + 2G^k_{12}\omega_k;
\end{gathered} \tag{1}$$

$$\sigma^{\lambda\mu} = B^{\lambda\mu qs}\gamma_{qs} - \sigma^{\lambda\mu}_* \equiv \sigma^{\lambda\mu}_\tau - \sigma^{\lambda\mu}_*, \quad \lambda \le \mu, \quad q \le s, \quad \lambda,\mu,q,s = 1,2, \tag{2}$$

где $\omega_j = w_{3\alpha^j} + B^k_j w_k$ (здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование); ε^0_{ij}, ε^1_{ij} — компоненты тангенциальной и изгибной деформации срединной поверхности S_0 оболочки; B_{ij}, B^j_i — ковариантные и смешанные составляющие тензора кривизны S_0; G^k_{ij} — символы Кристоффеля второго рода; $\sigma^{\lambda\mu}$ — компоненты тензора напряжений; $\sigma^{\lambda\mu}_\tau$, $\sigma^{\lambda\mu}_*$ — линейная и нелинейная части $\sigma^{\lambda\mu}$; $B^{\lambda\mu qs}$ — упругие характеристики оболочки; α^1, α^2 — декартовы координаты точек плоской ограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей $\Gamma \in C^1_\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, гомеоморфной S_0; w_k, w_3 — тангенциальные и нормальное перемещения точек S_0, удовлетворяющие граничным условиям

$$w_j|_\Gamma = \widetilde{w}_j, \quad j = \overline{1,4}; \quad w_4 = \partial w_3/\partial m, \tag{3}$$

где $\widetilde{w}_j$ — известные функции, m — орт нормали к Γ.

Построение математической модели задачи об изгибе оболочки в рамках (1)–(3) включает в себя следующие основные этапы: 1) вывод основных соотношений для компонент деформации и перемещения через вспомогательные функции; 2) построение гильбертова пространства; 3) введение в нем понятия обобщенного решения задачи и сведение его к нелинейному операторному уравнению.

1.1. *Вывод основных соотношений.* Пусть $D_w(\overline{\Omega})$ есть пространство перемещений $w = (w_1, w_2, w_3)$ класса w_i, $w_{3\alpha^i} \in C(\overline{\Omega})$, $w_{i\alpha^j}, w_{3\alpha^i\alpha^j} \in L_p(\overline{\Omega})$, $p > 2$, удовлетворяющих однородным граничным условиям (3). Каждому вектору перемещения w из $D_w(\overline{\Omega})$ по формулам

$$\varepsilon_1 = w_{1\alpha^1} - w_{2\alpha^2}, \quad \varepsilon_2 = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1}, \quad \varepsilon_3 = -w_{3\alpha^1\alpha^1} - w_{3\alpha^2\alpha^2} \tag{4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 99-01-00410).

поставим в соответствие вектор-функцию $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Множество векторов ε, которое, очевидно, является линейным пространством и его элементы $\varepsilon_j \in L_p(\overline{\Omega})$, $p > 2$, обозначим через $D_\varepsilon(\overline{\Omega})$. В дальнейшем ε_j $(j = \overline{1,3})$ будем называть условной деформацией.

Введем комплексные функции

$$W_1(z) = -w_{3\alpha^1} + iw_{3\alpha^2}, \quad W_2(z) = w_1 + iw_2, \quad z = \alpha^1 + i\alpha^2. \tag{5}$$

С их помощью соотношения (4) можно представить в комплексной форме

$$W_{j\overline{z}} = f_j/2, \quad j = 1, 2, \tag{6}$$

где $f_1 = \varepsilon_3$, $f_2 \equiv \varepsilon_0 = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$, $W_{j\overline{z}} = (W_{j\alpha^1} + iW_{j\alpha^2})/2$. Однородные граничные условия (3) примут вид

$$W_j(z) = 0 \ \text{ на } \ \Gamma, \quad j = 1, 2. \tag{7}$$

Используя формулу (6.10) из ([2], с. 42) и учитывая (6), (7), для комплексных перемещений $W_j(z)$ будем иметь следующие представления через $\varepsilon \in D_\varepsilon(\overline{\Omega})$:

$$W_j(z) = (Tf_j)(z)/2, \quad j = 1, 2, \tag{8}$$

где $T_\Omega f \equiv Tf = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_\Omega \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi\, d\eta$, $\zeta = \xi + i\eta$. Известно ([2], сс. 39, 46, 66), что Tf — вполне непрерывный оператор из $L_p(\overline{\Omega})$ в $L_q(\overline{\Omega})$ $(1 < q < 2p/(2-p))$, если $1 \le p \le 2$, и из $L_p(\overline{\Omega})$ в $C_{(p-2)/p}(\overline{\Omega})$, если $p > 2$; $(Tf)(z)$ допускает обобщенные производные

$$\frac{\partial Tf}{\partial \overline{z}} = f, \quad \frac{\partial Tf}{\partial z} \equiv Sf \equiv S_\Omega f = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_\Omega \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi\, d\eta, \tag{9}$$

где интеграл следует понимать в смысле главного значения по Коши и Sf является линейным ограниченным оператором в $L_p(\overline{\Omega})$, $p > 1$. Кроме того, можно показать, что Tf — вполне непрерывный оператор из $L_p(\overline{\Omega})$ $(1 < p \le 2)$ в $L_\gamma(\Gamma)$ $(1 < \gamma < p/(2-p))$.

С учетом (5) и известной формулы (6.10) из ([2], с. 42) компоненты вектора перемещения $w \in D_w(\overline{\Omega})$ удовлетворяют соотношениям

$$w_1 = \frac{1}{2}\operatorname{Re} T\varepsilon_0, \quad w_2 = \frac{1}{2}\operatorname{Im} T\varepsilon_0, \quad w_3 = -\frac{1}{4}T\overline{T\varepsilon_3} \equiv \frac{1}{2}\widetilde{T}\varepsilon_3, \tag{10}$$

$\frac{\partial w_3}{\partial \overline{z}} = (w_{3\alpha^1} + iw_{3\alpha^2})/2 = -\overline{W_1(z)}/2 = -\overline{T\varepsilon_3}/4$.

Соотношения (10) являются искомыми интегральными представлениями для перемещений, удовлетворяющих однородным граничным условиям (3). Для удовлетворения неоднородным граничным условиям (3) положим

$$w_1 = \mathring{w}_1 + \frac{1}{2}\operatorname{Re} T\varepsilon_0, \quad w_2 = \mathring{w}_2 + \frac{1}{2}\operatorname{Im} T\varepsilon_0, \quad w_3 = \mathring{w}_3 - \frac{1}{4}T\overline{T\varepsilon_3}, \tag{11}$$

оставив для новой переменной то же обозначение w. Здесь $\mathring{w} = (\mathring{w}_1, \mathring{w}_2, \mathring{w}_3) \in W(\overline{\Omega}) \equiv W_2^{(1)}(\overline{\Omega}) \times W_2^{(1)} \times W_2^{(2)}(\overline{\Omega})$ — известная функция, удовлетворяющая граничным условиям (3). Для существования такой функции необходимо и достаточно, чтобы $\widetilde{w}_j$ $(j = \overline{1,4})$ были допустимыми ([1], сс. 96, 108).

Находя при помощи формул (8), (9), (11) производные $w_{i\alpha^j}$, $w_{3\alpha^i\alpha^j}$ и подставляя их вместе с (11) в соотношения (1), после некоторых несложных преобразований для компонент деформаций получаем следующие представления через $\varepsilon \in D_\varepsilon(\overline{\Omega})$:

$$\gamma^k_{\lambda\mu} \equiv \gamma^k_{\lambda\mu}(\varepsilon) = t^k_{\lambda\mu}(\varepsilon) + \tau^k_{\lambda\mu}(\varepsilon) + \theta^k_{\lambda\mu}(\varepsilon) + \chi^k_{\lambda\mu}(\varepsilon) + \widetilde{\gamma}^k_{\lambda\mu}, \quad k = 0, 1, \quad \lambda, \mu = 1, 2, \tag{12}$$

которые в векторной форме будем записывать в виде

$$\gamma \equiv \gamma(\varepsilon) = t(\varepsilon) + \tau(\varepsilon) + \theta(\varepsilon) + \chi(\varepsilon) + \widetilde{\gamma}.$$

Здесь

$$t^0_{jj} = (\operatorname{Re} S\varepsilon_0 - (-1)^j \varepsilon_1)/2 - \operatorname{Re}(g_{jj} T\varepsilon_0), \quad j = 1,2,$$
$$t^0_{12} = \varepsilon_2 - 2\operatorname{Re}(g_{12} T\varepsilon_0),$$
$$t^1_{jj} = (\varepsilon_3 - (-1)^j \operatorname{Re} S\varepsilon_3)/2 - \operatorname{Re}(\overline{g}_{jj} T\varepsilon_3) - \operatorname{Re}[(-i)^{j-1}\beta_j(\varepsilon_0 - (-1)^j S\varepsilon_0) + g_j T\varepsilon_0], \quad j = 1,2, \quad (13)$$
$$t^1_{12} = -\operatorname{Im} S\varepsilon_3 - 2\operatorname{Re}(\overline{g}_{12} T\varepsilon_0) - \operatorname{Re}[i\beta_1(S\varepsilon_0 - \varepsilon_0) + \beta_2(\varepsilon_0 + S\varepsilon_0) + g_3 T\varepsilon_0];$$

$$\tau^0_{ij} = b_{ij}\widetilde{T}\varepsilon_3, \quad \tau^1_{ij} \equiv 0, \quad i,j = 1,2; \tag{14}$$

$$\theta^0_{jj} = \widetilde{\omega}_j \omega_j(\varepsilon), \quad \theta^0_{12} = \widetilde{\omega}_1\omega_2(\varepsilon) + \widetilde{\omega}_2\omega_1(\varepsilon), \quad \theta^1_{ij} \equiv 0, \quad i,j = 1,2, \tag{15}$$

$$\chi^0_{jj} = \omega^2_j(\varepsilon)/2, \quad \chi^0_{12} = \omega_1(\varepsilon)\omega_2(\varepsilon), \quad \chi^1_{ij} \equiv 0, \quad i,j = 1,2, \tag{16}$$

где $\widetilde{\gamma}^k_{ij} \equiv \gamma^k_{ij}(\mathring{w})$ — известные функции, определенные по формулам (1) с $\mathring{w} \in W(\overline{\Omega})$;

$$\widetilde{\omega}_j = \mathring{w}_{3\alpha^j} + B^k_j \mathring{w}_k, \quad \omega_j(\varepsilon) = \operatorname{Re}\Big[-\frac{1}{2} i^{j-1} T\varepsilon_3 + \beta_j T\varepsilon_0\Big],$$
$$b_{jj} = -\frac{1}{2}B_{jj}, \quad g_{\lambda j} = (G^1_{\lambda j} - iG^2_{\lambda j})/2, \quad \beta_j = (B^1_j - iB^2_j)/2,$$
$$g_j = \frac{1}{2}[B^1_{j\alpha^j} - G^k_{jj}B^1_k - i(B^2_{j\alpha^j} - G^k_{jj}B^2_k)], \quad \lambda, j = 1,2; \tag{17}$$
$$g_3 = B^1_{1\alpha^2} + B^1_{2\alpha^1} - 2G^k_{12}B^1_k - i(B^2_{1\alpha^2} + B^2_{2\alpha^1} - 2G^k_{12}B^2_k), \quad b_{12} = -B_{12}.$$

Используя соотношения (2), (11), (12) для вариации потенциальной энергии δU деформации, и элементарной работы δA внешних сил, нетрудно получить следующие представления через $\varepsilon \in D_\varepsilon(\overline{\Omega})$:

$$\delta U = \iint\limits_\Omega [Q\{t(\varepsilon); t(\delta\varepsilon)\} + Q_c(\varepsilon;\delta\varepsilon)]d\Omega - \iint\limits_\Omega [\sigma^{\lambda\mu}_1(\varepsilon)\gamma^0_{\delta,\lambda\mu}(\varepsilon;\delta\varepsilon) + \sigma^{\lambda\mu}_2(\varepsilon)\gamma^1_{\delta,\lambda\mu}(\varepsilon;\delta\varepsilon)]d\Omega, \tag{18}$$

$$\delta A \equiv A(\delta\varepsilon) = \operatorname{Re}\iint\limits_\Omega K(R,L;\delta\varepsilon)d\Omega, \tag{19}$$

где

$$Q_c(\varepsilon;\delta\varepsilon) = Q\{\gamma(\varepsilon); \tau(\delta\varepsilon) + \theta(\delta\varepsilon) + \chi_\delta(\varepsilon;\delta\varepsilon)\} +$$
$$+Q\{\tau(\varepsilon) + \theta(\varepsilon) + \chi(\varepsilon) + \widetilde{\gamma}; t(\delta\varepsilon)\}, \quad \sigma^{\lambda\mu}_k = \int_{-h}^{h} \sigma^{\lambda\mu}_*(\alpha^3)^{k-1}d\alpha^3, \quad k = 1,2, \tag{20}$$

$$K(R,L;\delta\varepsilon) = \frac{1}{2}[(R^1 - iR^2)T\delta\varepsilon_0 - R^3\widetilde{T}\delta\varepsilon_3 + (L^1 + iL^2)T\delta\varepsilon_3], \tag{21}$$

$Q\{\gamma_1;\gamma_2\}$ — билинейная форма переменных $\gamma_k = (\gamma_{k,11}, \gamma_{k,12}, \gamma_{k,22})$, $\gamma_{k,\lambda\mu} = \gamma^0_{k,\lambda\mu} + \alpha^3\gamma^1_{k,\lambda\mu}$, определенная формулой

$$Q\{\gamma_1;\gamma_2\} = \int_{-h}^{h} B^{\lambda\mu qs}\gamma_{1,\lambda\mu}\gamma_{2,qs}d\alpha^3 = D^{\lambda\mu qs}_p \gamma^0_{1,\lambda\mu}\gamma^0_{2,qs} +$$
$$+ D^{\lambda\mu qs}_*(\gamma^0_{1,\lambda\mu}\gamma^1_{2,qs} + \gamma^1_{1,\lambda\mu}\gamma^0_{2,qs}) + D^{\lambda\mu qs}_u \gamma^1_{1,\lambda\mu}\gamma^1_{2,qs}; \tag{22}$$

символы $\gamma^k_{\delta,\lambda\mu}(\varepsilon;\delta\varepsilon)$, $\chi^k_{\delta,\lambda\mu}(\varepsilon;\delta\varepsilon)$ обозначают вариации $\gamma^k_{\lambda\mu}(\varepsilon)$, $\chi^k_{\lambda\mu}(\varepsilon)$:

$$\gamma^k_{\delta,\lambda\mu}(\varepsilon;\delta\varepsilon) \equiv \delta\gamma^k_{\lambda\mu}(\varepsilon) = t^k_{\lambda\mu}(\delta\varepsilon) + \tau^k_{\lambda\mu}(\delta\varepsilon) + \theta^k_{\lambda\mu}(\delta\varepsilon) + \chi^k_{\delta,\lambda\mu}(\varepsilon;\delta\varepsilon)$$

(в векторной форме $\gamma_\delta(\varepsilon;\delta\varepsilon) = t(\delta\varepsilon) + \tau(\delta\varepsilon) + \theta(\delta\varepsilon) + \chi_\delta(\varepsilon;\delta\varepsilon)$); $2h = \mathrm{const}$ — толщина оболочки; $R, L \in L_2(\overline{\Omega})$, $P, M \in L_2(\Gamma)$ — известные вектор-функции, зависящие от внешних сил.

В дальнейшем всюду будем считать, что $B^{\lambda\mu qs}\gamma_{\lambda\mu}\gamma_{qs}$ — положительно определенная квадратичная форма. Тогда, как легко видеть, квадратичная форма $Q\{\gamma;\gamma\} \equiv Q\{\gamma\}$, порожденная билинейной формой (22), также является положительно определенной в $\overline{\Omega}$.

1.2. *Построение основного пространства.* Каждой паре элементов $\varepsilon^j \in D_\varepsilon(\overline{\Omega})$, $j = 1,2$, поставим в соответствие число

$$(\varepsilon^1, \varepsilon^2)_E = \iint\limits_{\Omega} Q\{t(\varepsilon^1); t(\varepsilon^2)\} d\Omega, \tag{23}$$

где билинейная форма Q дается формулой (22).

Соотношение (23) удовлетворяет всем условиям скалярного произведения. Подлежит проверке лишь то, что из $(\varepsilon,\varepsilon)_E = 0$ следует $\varepsilon = 0$ в $\overline{\Omega}$ (выполнение остальных условий очевидно). Пусть $(\varepsilon,\varepsilon)_E = 0$. Принимая во внимание положительную определенность квадратичной формы $Q\{t(\varepsilon)\}$, имеем систему равенств

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}(\operatorname{Re} S\varepsilon_0 - (-1)^j \varepsilon_1) - \operatorname{Re}(g_{jj} T\varepsilon_0) = 0, \quad j = 1,2,\\ \varepsilon_2 - 2\operatorname{Re}(g_{12} T\varepsilon_0) = 0,\\ \frac{1}{2}(\varepsilon_3 + (-1)^{j-1} \operatorname{Re} S\varepsilon_3) - \operatorname{Re}(\overline{g}_{jj} T\varepsilon_3) = 0, \quad j = 1,2.\end{gathered} \tag{24}$$

Из первого равенства вычтем второе, полученную разность прибавим к третьему равенству, умноженному на мнимую единицу. В результате имеем

$$\varepsilon_0 - \operatorname{Re}[(g_{11} - g_{22})T\varepsilon_0] - 2i\operatorname{Re}(g_{12}T\varepsilon_0) = 0. \tag{25}$$

Если в (25) перейти к функции $W_2(z) = \frac{1}{2}T\varepsilon_0 \in C_{(p-2)/p}(\overline{\Omega})$, $p > 2$, то видим, что $W_2(z)$ в области Ω — обобщенная аналитическая функция. Кроме того, $W_2(z) = 0$ на Γ. Тогда в силу теоремы единственности для обобщенных аналитических функций ([2], с. 122) $W_2(z) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$, откуда $\varepsilon_0 \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Исключая из последних двух равенств в (24) $\operatorname{Re} S\varepsilon_3$, приходим к тому, что $W_1(z) = T\varepsilon_3/2 \in C_{(p-2)/p}(\overline{\Omega})$, $p > 2$, также является обобщенной аналитической функцией в Ω и $W_1(z) = 0$ на Γ. Поэтому $W_1(z) \equiv 0$, откуда $\varepsilon_3 \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Итак, $\varepsilon \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Замыкание $D_\varepsilon(\overline{\Omega})$ в норме $\|\varepsilon\|_E^2 = \iint\limits_{\Omega} Q\{t(\varepsilon)\}d\Omega$ обозначим через $E(\overline{\Omega})$.

Теорема 1. *Пусть G_{ij}^k, $B_{ij\alpha^k}$, $D_{p,*,u}^{\lambda\mu qs}$ ограничены в $\overline{\Omega}$, область Ω является соболевской класса $(2,1,2)$ и $\varepsilon \in E(\overline{\Omega})$. Тогда $m_0\|\varepsilon\|_{L_2}^2 \le \|\varepsilon\|_E^2 \le M_0\|\varepsilon\|_{L_2}^2$, где постоянные $m_0, M_0 > 0$ не зависят от ε.*

Доказательство. Обозначим $v_1 = T\varepsilon_3$, $v_2 = T\varepsilon_0$. Выразив $\|\varepsilon\|_E^2$ через v_j $(j = 1,2)$ и их производные по z, $\overline{z}$, заметим, что $\|\varepsilon\|_E^2$ в соболевском пространстве $W_2^{(1)}(\overline{\Omega})$ обладает той же структурой, что и функционал $R(x)$ в теореме 10.8 из ([1], с. 81). Используя положительную определенность $Q\{t\}$, неравенство Корна ([3], с. 16), теоремы вложения для соболевских пространств (напр., [1], с. 76–78), вышеуказанные свойства операторов Tf, Sf, при помощи рассуждений, примененных при проверке условий определения скалярного произведения (23), убеждаемся в выполнении условий теоремы 10.8. Следовательно, $\|\varepsilon\|_E^2 \ge m_0\|v\|^2_{W_2^{(1)}(\overline{\Omega})}$, $m_0 > 0$, $v = (v_1, v_2)$, откуда следует нижняя оценка. Верхняя оценка очевидна. □

На основании теоремы 1 заключаем, что $E(\overline{\Omega})$ — гильбертово пространство. Имеет место

Лемма 1. *Пусть $\varepsilon \in E(\overline{\Omega})$. Тогда правые части в (10) определяют перемещения w_j, $w_{3\alpha^j} \in L_q(\overline{\Omega})$, $q \ge 1$, $j = 1,2$, $w_3 \in C(\overline{\Omega})$, почти всюду удовлетворяющие однородным граничным условиям (3).*

Доказательство. Пусть $\varepsilon \in E(\overline{\Omega})$. Тогда существует последовательность $\varepsilon^n = (\varepsilon_1^n, \varepsilon_2^n, \varepsilon_3^n) \in D_\varepsilon(\overline{\Omega})$ такая, что $\|\varepsilon^n - \varepsilon\|_E \to 0$, $n \to \infty$. Перемещения $w_1^n = \operatorname{Re} T\varepsilon_0^n/2$, $w_2^n = \operatorname{Im} T\varepsilon_0^n/2$, $w_3^n = \widetilde{T}\varepsilon_3^n/2$ принадлежат пространству $D(\overline{\Omega})$. Используя свойства оператора Tf, теорему 1, установим, что нормы $\|w_j^n - w_j\|_{L_2(\Gamma)}$, $\|w_{3\alpha^j}^n - w_{3\alpha^j}\|_{L_2(\Gamma)}$, $\|w_3^n - w_3\|_{L_2(\Gamma)}$ не превышают $c\|\varepsilon^n - \varepsilon^0\|_E$, а т.к. $\|\varepsilon^n - \varepsilon^0\|_E \to 0$, то $\|w_j\|_{L_2(\Gamma)} = 0$ $(j = \overline{1,3})$, $\|w_{3\alpha^i}\|_{L_2(\Gamma)} = 0$ $(i = 1, 2)$. □

Лемма 2. 1) $t_{ij}^k(\varepsilon)$ — *линейные ограниченные операторы из* $E(\overline{\Omega})$ *в* $L_2(\overline{\Omega})$ *и* $\|t_{ij}^0(\varepsilon_0)\|_{L_2} \le c\|\varepsilon_0\|_{L_2} \le c\|\varepsilon\|_E$, $\|t_{ij}^1(\varepsilon_3)\|_{L_2} \le c\|\varepsilon_3\|_{L_2} \le c\|\varepsilon\|_E$, $i, j = 1, 2$; 2) $\tau_{ij}^k(\varepsilon)$, $\theta_{ij}^k(\varepsilon)$ — *вполне непрерывные линейные операторы из* $E(\overline{\Omega})$ *в* $L_q(\overline{\Omega})$, $q \ge 1$, *и* $\|\tau_{ij}^0(\varepsilon_3)\|_{L_q} \le c\|\varepsilon_3\|_{L_2} \le c\|\varepsilon\|_E$, $\|\theta_{ij}^0(\varepsilon_3)\|_{L_q} \le c\|\mathring{w}_3\|_{W_2^{(2)}(\overline{\Omega})}\|\varepsilon_3\|_{L_2} \le c\|\mathring{w}_3\|_{W_2^{(2)}(\overline{\Omega})}\|\varepsilon\|_E$, $i, j = 1, 2$; 3) $\chi_{ij}^0(\varepsilon_3)$ — *усиленно непрерывные нелинейные операторы из* $E(\overline{\Omega})$ *в* $L_q(\overline{\Omega})$, $q \ge 1$, *и* $\|\chi_{ij}^0(\varepsilon_3)\|_{L_q} \le c\|\varepsilon_3\|_{L_2}^2 \le c\|\varepsilon\|_E^2$, $i, j = 1, 2$; 4) $\chi_{\delta,ij}^0(\varepsilon_3; \varphi_3)$ *по каждому аргументу — линейные усиленно непрерывные операторы из* $E(\overline{\Omega})$ *в* $L_q(\overline{\Omega})$, $q \ge 1$, *и* $\|\chi_{\delta,ij}^0(\varepsilon_3; \varphi_3)\|_{L_q} \le c\|\varepsilon_3\|_{L_2}\|\varphi_3\|_{L_2} \le c\|\varepsilon\|_E\|\varphi\|_E$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in E(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Справедливость леммы непосредственно вытекает из формул (13)–(16) с учетом ограниченности оператора Sf, вполне непрерывности Tf, кусочной непрерывности в $\overline{\Omega}$ функций g_{ij}, b_{ij}, определенных формулами (17).

1.3. *Введение понятия обобщенного решения задачи и сведéние его к нелинейному операторному уравнению.*

Определение. Обобщенным решением задачи об изгибе оболочки назовем вектор-функцию $\varepsilon \in E(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую интегральному соотношению

$$(\varepsilon, \varphi)_E = A(\varphi) - \iint_\Omega Q_c(\varepsilon; \varphi)d\Omega + \iint_\Omega [\sigma_1^{\lambda\mu}(\varepsilon)\gamma_{\delta,\lambda\mu}^0(\varepsilon; \varphi) + \sigma_2^{\lambda\mu}(\varepsilon)\gamma_{\delta,\lambda\mu}^1(\varepsilon; \varphi)]d\Omega \tag{26}$$

для любой вектор-функции $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in E(\overline{\Omega})$. Здесь $A(\varphi)$, $Q_c(\varepsilon; \varphi)$, $\sigma_k^{\lambda\mu}(\varepsilon)$ задаются формулами (19)–(21) соответственно.

Если принять во внимание соотношения (18), (19), (23), то легко видеть, что (26) выражает вариационный принцип Лагранжа $\delta A = \delta U$, при этом вектор φ означает вариацию ε.

Для проверки корректности определения обобщенного решения нужна

Лемма 3. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1 *и* $\sigma_k^{\lambda\mu} \in L_2(\overline{\Omega})$, $k, \lambda, \mu = 1, 2$. *Тогда правая часть интегрального соотношения* (26) *представляет собой линейный ограниченный функционал в* $E(\overline{\Omega})$ *относительно* $\varphi \in E(\overline{\Omega})$ *при фиксированном* $\varepsilon \in E(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу леммы 2 $\gamma(\varepsilon), \gamma_\delta(\varepsilon, \varphi) \in L_2(\overline{\Omega})$. Тогда, используя неравенства Гёльдера, Минковского, получаем

$$\left| \iint_\Omega Q_c(\varepsilon; \varphi) D\, d\alpha^1 d\alpha^2 \right| \le$$
$$\le c\|\gamma(\varepsilon)\|_{L_2}\|\tau(\varphi) + \theta(\varphi) + \chi_\delta(\varepsilon; \varphi)\|_{L_2} + \|\tau(\varepsilon) + \theta(\varepsilon) + \chi(\varepsilon) + \widetilde{\gamma}\|_{L_2}\|t(\varphi)\|_{L_2} \le$$
$$\le c[\|\varepsilon\|_E(1 + \|\varepsilon\|_E)(2 + \|\varepsilon\|_E) + \|\mathring{w}\|_{W(\overline{\Omega})} + \|\mathring{w}\|_{W(\overline{\Omega})}^2]\|\varphi\|_E.$$

Аналогично

$$\left| \iint_\Omega [\sigma_1^{\lambda\mu}(\varepsilon)\gamma_{\delta,\lambda\mu}^0(\varepsilon; \varphi) + \sigma_2^{\lambda\mu}(\varepsilon)\gamma_{\delta,\lambda\mu}^1(\varepsilon; \varphi)]d\Omega \right| \le$$
$$\le \|\sigma_1^{\lambda\mu}(\varepsilon)\|_{L_2}\|\gamma_{\delta,\lambda\mu}^0(\varepsilon; \varphi)\|_{L_2} + \|\sigma_2^{\lambda\mu}(\varepsilon)\|_{L_2}\|\gamma_{\delta,\lambda\mu}^1(\varepsilon; \varphi)\|_{L_2} \le$$
$$\le c[\|\sigma_1^{\lambda\mu}(\varepsilon)\|_{L_2} 1_{\lambda\mu}(1 + \|\varepsilon\|_E) + \|\sigma_2^{\lambda\mu}(\varepsilon)\|_{L_2} 1_{\lambda\mu}]\|\varphi\|_E.$$

Далее, из (19) с учетом $R^j, L^i \in L_2(\overline{\Omega})$ получаем

$$|A(\varphi)| \le c(\|R^j\|_{L_2} 1_j\big|_{j=\overline{1,3}} + \|L^i\|_{L_2} 1_i\big|_{i=1,2})\|\varphi\|_E.$$

Из этих оценок следует утверждение леммы 3. $\square$

В силу леммы 3 по теореме Рисса найдется элемент $G(\varepsilon) \in E(\overline{\Omega})$ такой, что правая часть (26) представляется в виде скалярного произведения $(G(\varepsilon), \varphi)_E$. Тогда с учетом произвольности вектора φ получаем равенство

$$\varepsilon - G(\varepsilon) = 0, \tag{27}$$

которое представляет собой нелинейное операторное уравнение в $E(\overline{\Omega})$. Легко видеть, что оператор $G(\varepsilon)$ представи́м в виде $G(\varepsilon) = G_c(\varepsilon) + G_*(\varepsilon)$, где операторы G_c, G_* задаются формулами

$$(G_c(\varepsilon), \varphi)_E = A(\varphi) - \iint\limits_{\Omega} Q_c(\varepsilon; \varphi) d\Omega, \tag{28}$$

$$(G_*(\varepsilon), \varphi)_E = \iint\limits_{\Omega} [\sigma_1^{\lambda\mu}(\varepsilon)\gamma^0_{\delta,\lambda\mu}(\varepsilon;\varphi) + \sigma_2^{\lambda\mu}(\varepsilon)\gamma^1_{\delta,\lambda\mu}(\varepsilon;\varphi)] d\Omega. \tag{29}$$

В силу этого уравнение (27) примет вид

$$\varepsilon - G_c(\varepsilon) - G_*(\varepsilon) = 0. \tag{30}$$

Теорема 2. 1) *Оператор $G_c(\varepsilon)$ действует из $E(\overline{\Omega})$ в $E(\overline{\Omega})$ усиленно непрерывно.* 2) *Оператор $G_*(\varepsilon; t_0)$ ограничен в $E(\overline{\Omega})$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon^n = (\varepsilon_1^n, \varepsilon_2^n, \varepsilon_3^n)$, $n = 1, 2, \dots$, $\varepsilon^0 = (\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \varepsilon_3^0) \in E(\overline{\Omega})$ и $\varepsilon^n \to \varepsilon^0$ в $E(\overline{\Omega})$, $n \to \infty$ (здесь и в дальнейшем одной стрелкой обозначаем слабую, а двумя стрелками — сильную сходимости в $E(\overline{\Omega})$). Из леммы 2 следует, что при $n \to \infty$ $t(\varepsilon^n) \to t(\varepsilon^0)$ в $L_2(\overline{\Omega})$, $\tau(\varepsilon^n) \rightrightarrows \tau(\varepsilon^0)$, $\theta(\varepsilon^n) \rightrightarrows \theta(\varepsilon^0)$, $\chi(\varepsilon^n) \rightrightarrows \chi(\varepsilon^0)$, $\chi_\delta(\varepsilon^n; \varphi) \rightrightarrows \chi_\delta(\varepsilon^0; \varphi)$ в $L_q(\overline{\Omega})$, $q \ge 1$, причем $\|\chi_\delta(\varepsilon^n;\varphi) - \chi_\delta(\varepsilon^0;\varphi)\|_{L_q} \le c\|T(\varepsilon_3^n - \varepsilon_3^0)\|_{L_{2q}}\|\varphi\|_E$, $q \ge 1$, где постоянная $c > 0$ от n не зависит.

Учитывая это, принимая во внимание ограниченность слабо сходящихся последовательностей и усиленную непрерывность оператора T^*f, сопряженного к Tf, из (28) при помощи неравенства Гёльдера получаем $|(G_c(\varepsilon^n; t_0) - G_c(\varepsilon^0; t_0), \varphi)_E| \le c\delta_n\|\varphi\|_E$, где $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, откуда $\|G_c(\varepsilon^n; t_0) - G_c(\varepsilon^0; t_0)\|_E \le c\delta_n \to 0$, $n \to \infty$, т. е. $G_c(\varepsilon)$ — усиленно непрерывный оператор в $E(\overline{\Omega})$. Ограниченность оператора $G_*(\varepsilon)$ в $E(\overline{\Omega})$ непосредственно вытекает из (29) с учетом леммы 2. $\square$

Таким образом, задача об изгибе оболочки свелась к эквивалентному ей уравнению (30). В работах [4], [5] существование хотя бы одного решения уравнений типа (30) доказывалось внутри эллипсоидов с достаточно большими полуосями без предположений о малости параметров внешней нагрузки. В данной статье определим пределы изменения параметров нагрузки, при которых уравнение (30) имеет единственное решение.

2. Исследование существования единственного решения уравнения (30)

В этом разделе покажем, что при достаточно малых по норме нагрузочных членах в шаре малого радиуса пространства $E(\overline{\Omega})$ существует единственное решение уравнения (30). С этой целью оператор $G_c(\varepsilon)$ предста́вим в виде $G_c(\varepsilon) = G_{c1}(\varepsilon) + G_{c2}(\varepsilon)$, где G_{c1} — линейный, G_{c2} —

нелинейный вполне непрерывные операторы в $E(\overline{\Omega})$, определенные соотношениями

$$(G_{c1}(\varepsilon),\varphi)_E=-\iint\limits_{\Omega}[Q\{t(\varepsilon)+\tau(\varepsilon);\tau(\varphi)\}+Q\{\tau(\varepsilon);t(\varphi)\}]d\Omega,$$

$$(G_{c2}(\varepsilon),\varphi)_E=A(\varphi)-\iint\limits_{\Omega}[Q\{\gamma(\varepsilon);\chi_\delta(\varepsilon;\varphi)\}+Q\{\chi(\varepsilon)+\widetilde{\gamma};\gamma_\delta(\varepsilon;\varphi)\}+$$
$$+Q\{t(\varepsilon)+\tau(\varepsilon)+\theta(\varepsilon);\theta(\varphi)\}+Q\{\theta(\varepsilon);\tau(\varphi)+t(\varphi)\}]d\Omega. \qquad (31)$$

В соответствии с этим уравнение (30) примет вид

$$\varepsilon-G_{c1}(\varepsilon)-G_{c2}(\varepsilon)-G_*(\varepsilon)=0. \qquad (32)$$

Введем следующие обозначения:

$$K_1\varepsilon_3=\mathrm{Re}[(\overline{g}_{11}+\overline{g}_{22})T\varepsilon_3],\quad K_2\varepsilon_0=\mathrm{Re}[(g_{11}-g_{22})T\varepsilon_0]+2i\,\mathrm{Re}(g_{12}T\varepsilon_0),$$
$$b=\frac{1}{2}(B_{11}-B_{22})+iB_{12},\quad \lambda(\mu,\Omega)=\sup_{z\in\overline{\Omega}}\iint\limits_{\Omega}\frac{d\xi\,d\eta}{|\zeta-z|^{2-\mu}},\quad \mu>0,$$
$$\lambda_1=1/(2\pi^2)[\lambda(1,\Omega)]^2,\quad \lambda_2=\|\beta_1-i\beta_2\|_C+\|\beta_1+i\beta_2\|_C+(1/\pi)\lambda(1,\Omega)\|g_1+g_2\|_C.$$

Лемма 4. *Пусть срединная поверхность S_0 — кусочно-гладкая поверхность, составленная из конечного числа поверхностей класса C^3 и, кроме того,*

$$q_c=\lambda_1\lambda_2\|b\|_C\|(I-K_1)^{-1}\|_{L_2}\|(I-K_2)^{-1}\|_{L_2}<1. \qquad (33)$$

Тогда число 1 не является собственным числом оператора $G_{c1}(\varepsilon)$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon-G_{c1}(\varepsilon)=0 \qquad (34)$$

и покажем, что оно имеет лишь тривиальное решение. Пусть $\varepsilon\in E(\overline{\Omega})$ есть ненулевое решение уравнения (34). Умножая (34) скалярно на это решение ε, получаем

$$e^k_{\lambda\mu}(\varepsilon)\equiv t^k_{\lambda\mu}(\varepsilon)+\tau^k_{\lambda\mu}(\varepsilon)=0,\quad \lambda,\mu=1,2,\quad k=0,1. \qquad (35)$$

Подставляя вместо $t^k_{\lambda\mu}(\varepsilon)$, $\tau^k_{\lambda\mu}(\varepsilon)$ выражения (13), (14), систему (35) перепишем в виде

$$(\mathrm{Re}\,S\varepsilon_0-(-1)^j\varepsilon_1)/2-\mathrm{Re}(g_{jj}T\varepsilon_0)=\frac{1}{2}B_{jj}\widetilde{T}\varepsilon_3,\quad j=1,2,$$
$$\varepsilon_2-2\,\mathrm{Re}(g_{12}T\varepsilon_0)=B_{12}\widetilde{T}\varepsilon_3, \qquad (36)$$
$$(\varepsilon_3-(-1)^j\,\mathrm{Re}\,S\varepsilon_3)/2-\mathrm{Re}(\overline{g}_{jj}T\varepsilon_3)=f^j(\varepsilon_0),\quad j=1,2.$$

Здесь $f^j(\varepsilon_0)=\mathrm{Re}[(-i)^{j-1}\beta_j(\varepsilon_0-(-1)^jS\varepsilon_0)+g_jT\varepsilon_0]$, $j=1,2$, функции g_{ij}, g_j, β_j определены в (17). Исключая в (36) $\mathrm{Re}\,S\varepsilon_0$ и $\mathrm{Re}\,S\varepsilon_3$, получим

$$\varepsilon_0-K_2\varepsilon_0=b\widetilde{T}\varepsilon_3,\quad \varepsilon_3-K_1\varepsilon_3=f^1(\varepsilon_0)+f^2(\varepsilon_0). \qquad (37)$$

Заметим, что K_jf — вполне непрерывные линейные операторы в $L_p(\overline{\Omega})$ $\forall p\geq 1$. Повторяя рассуждения, примененные при проверке условий скалярного произведения (23), получаем, что операторы $I-K_j$, $j=1,2$, имеют обратные $(I-K_j)^{-1}$, ограниченные в $L_2(\overline{\Omega})$. С помощью этих операторов из (37) получаем $\varepsilon_0=(I-K_2)^{-1}(b\widetilde{T}\varepsilon_3)$, $\varepsilon_3=(I-K_1)^{-1}[f^1(\varepsilon_0)+f^2(\varepsilon_0)]$, откуда

$$\|\varepsilon_0\|_{L_2}\leq\|(I-K_2)^{-1}\|_{L_2}\|b\widetilde{T}\varepsilon_3\|_{L_2},\quad \|\varepsilon_3\|_{L_2}\leq\|(I-K_1)^{-1}\|_{L_2}\|f^1(\varepsilon_0)+f^2(\varepsilon_0)\|_{L_2}. \qquad (38)$$

Используя оценки $\|Tf\|_{L_2}\leq(1/\pi)\lambda(1,\Omega)\|f\|_{L_2}$ и $\|Sf\|_{L_2}\leq\|f\|_{L_2}$ ([2], сс. 46, 47), будем иметь

$$\|b\widetilde{T}\varepsilon_3\|_{L_2}\leq\|b\|_C\lambda_1\|\varepsilon_3\|_{L_2},\quad \|f^1(\varepsilon_0)+f^2(\varepsilon_0)\|_{L_2}\leq\lambda_2\|\varepsilon_0\|_{L_2},$$

с помощью которых из (38) получаем

$$\|\varepsilon_0\|_{L_2} \le \lambda_1 \|b\|_C \|(I-K_1)^{-1}\|_{L_2} \|\varepsilon_3\|_{L_2}, \quad \|\varepsilon_3\|_{L_2} \le \lambda_2 \|(I-K_1)^{-1}\|_{L_2} \|\varepsilon_0\|_{L_2},$$

следовательно, $\|\varepsilon_0\|_{L_2} \le q_c \|\varepsilon_0\|_{L_2}$, откуда в силу условия (33) $\varepsilon_0 = 0$ в $\overline{\Omega}$. Тогда $\varepsilon_3 = 0$ в $\overline{\Omega}$. □

В некоторых частных случаях утверждение леммы 4 удается получить без условия (33). Остановимся на них.

Лемма 5. *Пусть срединная поверхность S_0 непологой оболочки склеена из конечного числа поверхностей положительной гауссовой кривизны класса C^3. Тогда справедливо утверждение леммы 4.*

Доказательство. Относя S_0 к сопряженно изометрической системе координат, в которой $B_{11} = B_{22}$, $B_{12} = 0$, вследствие чего $b = 0$, из (38) сразу получим $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_3 = 0$ в $\overline{\Omega}$. □

Итак, оператор $(I - G_{c1})$ имеет обратный $(I - G_{c1})^{-1}$, определенный и ограниченный в $E(\overline{\Omega})$. Применяя этот оператор к обеим частям уравнения (32), приходим к эквивалентному уравнению

$$\varepsilon - \widetilde{G}(\varepsilon) = 0, \tag{39}$$

где $\widetilde{G}(\varepsilon) = (I - G_{c1})^{-1} G_{c2}(\varepsilon) + (I - G_{c1})^{-1} G_*(\varepsilon)$.

Покажем, что в шаре достаточно малого радиуса оператор $\widetilde{G}(\varepsilon)$ является сжимающим. Применяя к интегралам в (31) неравенство Гёльдера и используя лемму 2, для любых $\varepsilon^j = (\varepsilon_1^j, \varepsilon_2^j, \varepsilon_3^j) \in E(\overline{\Omega})$, принадлежащих шару $\|\varepsilon^j\|_E < r$, $j = 1, 2$, будем иметь

$$\|G_{c2}(\varepsilon^1) - G_{c2}(\varepsilon^2)\|_E \le c(r + \|\widetilde{\gamma}\|_{L_2}) \|\varepsilon^1 - \varepsilon^2\|_E. \tag{40}$$

Перейдем к оценке $G_*(\varepsilon)$. Предположим, что для $\sigma_j^{\lambda\mu}$, определенных в (20), справедливы оценки $\|\sigma_j^{\lambda\mu}(\varepsilon^1) - \sigma_j^{\lambda\mu}(\varepsilon^2)\|_{L_2} \le \|\sigma_j^{\lambda\mu}\|_{L_2} \|\varepsilon^1 - \varepsilon^2\|_E$ для любых $\|\varepsilon^j\|_E < r$, $j, \lambda, \mu = 1, 2$. Тогда из соотношения (29) с помощью неравенства Гёльдера и леммы 2 получаем

$$\|G_*(\varepsilon^1) - G_*(\varepsilon^2)\|_E \le q_* \|\varepsilon^1 - \varepsilon^2\|_E, \tag{41}$$

где постоянная q_* зависит от r, $\|\widetilde{\gamma}\|_{L_2}$, $q_* \to 0$ при $r, \|\widetilde{\gamma}\|_{L_2} \to 0$. Теперь, если воспользоваться оценками (40), (41), то для оператора $\widetilde{G}(\varepsilon)$ получим $\|\widetilde{G}(\varepsilon^1) - \widetilde{G}(\varepsilon^2)\|_E \le \widetilde{q} \|\varepsilon^1 - \varepsilon^2\|_E$ с $\widetilde{q} = c\|(I - G_{c1})^{-1}\|_E (r + \|\widetilde{\gamma}\|_{L_2} + q_*)$. Отсюда видно, что при малых r и $\|\widetilde{\gamma}\|_{L_2}$ оператор $\widetilde{G}(\varepsilon)$ является сжимающим. Кроме того, предположим, что нагрузочные члены удовлетворяют условию $\|\widetilde{G}(0)\|_E < (1 - \widetilde{q})r$. В этих условиях к уравнению (39) можем применить принцип сжатых отображений ([6], с. 146), согласно которому уравнение (39) в шаре $\|\varepsilon\|_E < r$ имеет единственное решение.

Литература

1. Ворович И.И. *Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек.* – М.: Наука, 1989. – 376 с.
2. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции.* – М.: Наука, 1988 – 512 с.
3. *Математическая энциклопедия.* Т. 3. – М.: Советская энциклопедия, 1982. — 1184 с.
4. Тимергалиев С.Н. *Исследование разрешимости вариационных задач нелинейной теории тонких оболочек* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 9. – С. 66–74.
5. Терегулов И.Г., Тимергалиев С.Н. *Метод Ритца приближенного решения краевых задач нелинейной теории тонких оболочек* // Изв. РАН. МТТ. – 2002. – № 1. – С. 154–164.
6. Красносельский М.А. *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.* – М.: Гостехиздат, 1956. – 392 с.

Камский политехнический институт

Поступила
24.01.2000