ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 7 (458)

УДК 512.542

М.М. СОРОКИНА

О КОМПОЗИЦИОННЫХ И ЛОКАЛЬНЫХ КРИТИЧЕСКИХ ФОРМАЦИЯХ

Проблема изучения минимальных локальных не $\mathfrak{H}$-формаций или иначе $\mathfrak{H}_l$-критических формаций впервые была поставлена профессором Л.А. Шеметковым на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп [1]. Решению этой проблемы были посвящены, в частности, работы [2], [3], а также [4], в которой рассматриваются минимальные локальные наследственные не $\mathfrak{H}$-формации для локальной формации $\mathfrak{H}$ классического типа. В [5] было получено описание строения минимальных композиционных наследственных не $\mathfrak{H}$-формаций для композиционной наследственной формации $\mathfrak{H}$ специального или классического типа. В данной работе получено описание строения $\mathfrak{H}_c$-критических и $\mathfrak{H}_l$-критических формаций для произвольной композиционной или локальной формации $\mathfrak{H}$ соответственно, что представляет собой решение задачи Л.А. Шеметкова для случая, когда формация $\mathfrak{H}$ является локальной.

Минимальной композиционной (локальной) не $\mathfrak{H}$-формацией называется всякая композиционная (локальная) формация $\mathfrak{F}$, которая сама не содержится в классе групп $\mathfrak{H}$, но $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ для всякой собственной композиционной (локальной) подформации $\mathfrak{M}$ из $\mathfrak{F}$. В работе рассматриваются лишь конечные группы. Основные определения и обозначения, используемые в работе, можно найти в [6], [7]. Приведем лишь некоторые из них. Пусть $\mathfrak{C}$ — класс всех конечных групп, $\mathcal{K}(G)$ – класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G. Функция $f : \mathfrak{C} \to \{\text{формации}\}$ называется композиционным (локальным) экраном, если выполняются следующие условия: 1) $f(1) = \mathfrak{C}$; 2) если $A \cong B$, то $f(A) = f(B)$; 3) $f(G) = \cap f(A)$, где A пробегает $\mathcal{K}(G)$ ($f(G) = \cap f(p)$, где p пробегает $\pi(G)$) для любой $G \neq 1$. Отметим, что через $f(p)$ обозначается значение экрана на всякой p-группе [6]. Если $G/C_G(H/K) \in f(H/K)$, то главный фактор H/K группы G называют f-центральным в G. Если f — композиционный (локальный) экран, то класс $\mathfrak{F} = \langle f \rangle$ всех групп, у которых все главные факторы f-центральны, называется композиционной (локальной) формацией, а f — экраном этой формации. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустое множество групп. Тогда $(\mathfrak{X})$ обозначает класс групп, порожденный $\mathfrak{X}$; $\operatorname{form}\mathfrak{X}$ (соответственно $\operatorname{cform}\mathfrak{X}$, $\operatorname{lform}\mathfrak{X}$) — формация (соответственно композиционная, локальная формация), порожденная $\mathfrak{X}$; $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ — объединение классов $\mathcal{K}(G)$ для всех $G \in \mathfrak{X}$. Пусть $\mathfrak{I}$ — класс всех конечных простых групп. Если $A \in \mathfrak{I}$, то $F_A(G)$ — пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G, чьи композиционные факторы изоморфны группе A [8]. Такие главные факторы назовем главными A-факторами группы G. Полагаем, что $F_A(G) = G$, если в G нет главных A-факторов. С целью компактного изложения материала введем следующие сокращения: c-экран (l-экран) — композиционный (локальный) экран; c-формация (l-формация) — композиционная (локальная) формация. Следуя ([9], с. 233), формационно критическую группу A назовем f-базисной (соответственно c-базисной, l-базисной), если формация $\operatorname{form} A$ (соответственно $\operatorname{cform} A$, $\operatorname{lform} A$) содержит единственную максимальную подформацию (соответственно c-подформацию, l-подформацию). Будем говорить, что формация (соответственно c-формация, l-формация) $\mathfrak{M}$ является максимальной подформацией (соответственно c-подформацией, l-подформацией) формации (соответственно c-формации, l-формации) $\mathfrak{F}$, если для любой формации (соответственно c-формации, l-формации) $\mathfrak{H}$, удовлетворяющей включению $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$, имеет место $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$.

Лемма 1. *Пусть G — монолитическая группа с неабелевым монолитом P. Тогда G является c-базисной группой, причем максимальная c-подформация $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{F} = \mathrm{cform}\, G$ имеет внутренний c-экран h со следующим строением*:

$$h(A) = \begin{cases} \mathrm{form}(G/P) & \textit{для} \;\; A \in \mathcal{K}(P); \\ \mathrm{form}(G/F_A(G)) & \textit{для любой} \;\; A \in \mathcal{K}(G) \setminus \mathcal{K}(P); \\ \varnothing, & \textit{если} \;\; A \in \mathfrak{I} \setminus \mathcal{K}(G). \end{cases}$$

Доказательство. Пусть h — c-экран, описанный в заключении леммы, $\mathfrak{H} = \langle h \rangle$ и f — минимальный c-экран формации $\mathfrak{F}$. По теореме из [8] $f(A) = \mathrm{form}(G/F_A(G))$ для всех $A \in \mathcal{K}(G)$.

Покажем, что $G/P \in \mathfrak{H}$. Пусть A — простая группа из $\mathcal{K}(G/P)$. Если $A \in \mathcal{K}(P)$, то $(G/P)/F_A(G/P) \in \mathrm{form}(G/P) = h(A)$. Пусть $A \in \mathcal{K}(G) \setminus K(P)$. Тогда $f(A) = h(A)$ и ввиду леммы 1 [8] из $G/P \in \mathfrak{F}$ следует, что $(G/P)/F_A(G/P) \in h(A)$. Таким образом, $(G/P)/F_A(G/P) \in h(A)$ для любого $A \in \mathcal{K}(G/P)$ и по лемме 1 [8] $G/P \in \mathfrak{H}$.

Покажем, что экран h является внутренним экраном формации $\mathfrak{H}$. Если $A \in \mathcal{K}(P)$, то $h(A) = \mathrm{form}(G/P) \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $A \in \mathcal{K}(G) \setminus \mathcal{K}(P)$. Тогда $P \subseteq F_A(G)$ и $G/F_A(G) \cong (G/P)/(F_A(G)/P) \in \mathfrak{H}$. Поэтому $h(A) = \mathrm{form}(G/F_A(G)) \subseteq \mathfrak{H}$. Таким образом, h является внутренним экраном формации $\mathfrak{H}$.

Пусть $\mathfrak{B}$ — собственная c-подформация из $\mathfrak{F}$, b — ее минимальный c-экран. По следствию 1 [8] $b \leq f$. Пусть $A \in \mathcal{K}(P)$. Предположим, что $b(A) = f(A)$. Тогда $G \in \mathrm{form}\, G = f(A) = b(A) \subseteq \mathfrak{B}$ и $\mathrm{cform}\, G = \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}$. Противоречие. Следовательно, $b(A) \subset f(A)$. По лемме 18.2 [7] формация $\mathrm{form}(G/P) = h(A)$ является единственной максимальной подформацией из $\mathrm{form}\, G = f(A)$ и, значит, $b(A) \subseteq h(A)$. Пусть $A \in \mathcal{K}(G) \setminus \mathcal{K}(P)$. Тогда $f(A) = h(A)$ и $b(A) \subseteq h(A)$. Поэтому $b \leq h$ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Так как $h \leq f$ и для $A \in \mathcal{K}(P)$ справедливо $h(A) = \mathrm{form}(G/P) \subset \mathrm{form}\, G = f(A)$, то $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Следовательно, формация $\mathfrak{H}$ является единственной максимальной c-подформацией из $\mathfrak{F}$. Поскольку ввиду следствия 52.34 [9] группа G является критической, а каждая критическая группа формационно критична, то G — c-базисная группа. □

Лемма 2. *Пусть $G = P \rtimes H$ — монолитическая группа с монолитом P, где P — p-группа, H — f-базисная группа и $\mathfrak{M}$ — максимальная подформация из $\mathrm{form}\, H$. Тогда G является c-базисной группой, причем максимальная c-подформация $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{F} = \mathrm{cform}\, G$ имеет внутренний c-экран h со следующим строением*:

$$h(A) = \begin{cases} \mathfrak{M} & \textit{для} \;\; A \in \mathcal{K}(P); \\ \mathrm{form}(G/F_A(G)) & \textit{для любой} \;\; A \in \mathcal{K}(G) \setminus \mathcal{K}(P); \\ \varnothing, & \textit{если} \;\; A \in \mathfrak{I} \setminus \mathcal{K}(G). \end{cases}$$

Доказательство. Пусть h — c-экран, описанный в заключении леммы, $\mathfrak{H} = \langle h \rangle$ и f — минимальный c-экран формации $\mathfrak{F}$. По теореме из [8] $f(A) = \mathrm{form}(G/F_A(G))$ для всех $A \in \mathcal{K}(G) = \mathcal{K}(\mathfrak{F})$.

Покажем, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $M \in \mathfrak{M}$. Так как $H \cong G/P \in \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M} \subset \mathrm{form}\, H \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathcal{K}(M) \subseteq \mathcal{K}(G)$. Пусть K/L — главный A-фактор группы M. Если $A \in \mathcal{K}(P)$, то $M/C_M(K/L) \in \mathfrak{M} = h(A) = h(K/L)$. Пусть $A \in \mathcal{K}(M) \setminus \mathcal{K}(P)$. Тогда $h(K/L) = f(K/L)$ и ввиду $M \in \mathfrak{F}$ имеем $M/C_M(K/L) \in h(K/L)$. Таким образом, $M \in \langle h \rangle = \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$.

Покажем, что h является внутренним экраном формации $\mathfrak{H}$. Если $A \in \mathcal{K}(P)$, то $h(A) = \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $A \in \mathcal{K}(G) \setminus \mathcal{K}(P)$ и $\mathfrak{X}$ — множество всех тех собственных секций группы H, которые лежат в $\mathrm{form}\, H$. Тогда $H \notin \mathrm{form}\, \mathfrak{X}$ и $\mathrm{form}\, \mathfrak{X} \subset \mathrm{form}\, H$. По условию $\mathrm{form}\, \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$ и, значит, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$. Ввиду леммы 3.9 [6] из равенства $C_G(P) = P$ следует, что $O_p(H) = 1$. Ясно, что группа H монолитична с монолитом $Q \notin \mathfrak{N}_p$ и, значит, $\mathcal{K}(Q) \subseteq \mathcal{K}(G) \setminus \mathcal{K}(P)$. Тогда $h(Q) = f(Q)$ и ввиду $H \in \mathfrak{F}$ имеем $H/C_H(Q) \in h(Q)$. Поскольку $H/Q \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$, то $H \in \mathfrak{H}$. Так как $P \subseteq F_A(G)$, то $G/F_A(G) = HF_A(G)/F_A(G) \cong H/H \cap F_A(G) \in \mathfrak{H}$ и $h(A) = \mathrm{form}(G/F_A(G)) \subseteq \mathfrak{H}$. Следовательно, h является внутренним экраном формации $\mathfrak{H}$.

Пусть $\mathfrak{B}$ — собственная c-подформация из $\mathfrak{F}$, b — ее минимальный c-экран. По следствию 1 из [8] $b \leq f$. Пусть $A \in \mathcal{K}(P)$. Предположим, что $f(A) = b(A)$. Тогда $G/O_p(G) = G/F_A(G) \in f(A) = b(A)$ и по лемме 3.11 [6] $G \in \mathfrak{N}_p b(A) \subseteq \langle b \rangle = \mathfrak{B}$. Противоречие. Следовательно, $b(A) \subset f(A) = \mathrm{form}\, H$ и ввиду условия $b(A) \subseteq \mathfrak{M} = h(A)$. Далее, $b(A) \subseteq f(A) = h(A)$ для $A \in \mathcal{K}(G) \setminus \mathcal{K}(P)$. Таким образом, $b \leq h$ и, значит, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Как и в лемме 1, очевидно, что $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Поэтому формация $\mathfrak{H}$ является единственной максимальной c-подформацией из $\mathfrak{F}$. Поскольку $C_G(P) = P$, то ввиду теоремы 53.44 [9] G является критической группой и, значит, G — c-базисная группа. □

Лемма 3. *Пусть h — максимальный внутренний c-экран формации $\mathfrak{H}$, f — минимальный c-экран формации $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_c$-критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \mathrm{cform}\, G$, где G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}} \nsubseteq \Phi(G)$ и $f(A)$ является $h(A)$-критической формацией для $A \in \mathcal{K}(P)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{H}_c$-критическая формация и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G монолитична с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$. Так как $\mathrm{cform}\, G \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathrm{cform}\, G \nsubseteq \mathfrak{H}$, то $\mathrm{cform}\, G = \mathfrak{F}$. По теореме из [8] $f(A) = \mathrm{form}(G/F_A(G))$ для любого $A \in \mathcal{K}(G)$.

Допустим, что $f(A) \subseteq h(A)$ для $A \in \mathcal{K}(P)$. Если P неабелева, то $F_A(G) = 1$, и по теореме 3.2 [6] $h(A) = \mathfrak{H}$. Поэтому $G \cong G/F_A(G) \in f(A) \subseteq h(A) = \mathfrak{H}$. Противоречие. Если P — абелева группа, то $C/C_G(P) \in f(P) = f(A) \subseteq h(A) = h(P)$ и, значит, P h-централен в G. Ввиду $G/P \in \mathfrak{H}$ имеем $G \in \mathfrak{H}$. Противоречие. Следовательно, $f(A) \nsubseteq h(A)$ для $A \in \mathcal{K}(P)$.

Пусть A — неабелева группа из $\mathcal{K}(P)$. Тогда $f(A) = \mathrm{form}\, G$. Так как $P \nsubseteq \Phi(G)$, то по лемме 18.2 [7] $\mathfrak{M} = \mathrm{form}(G/P)$ является единственной максимальной подформацией формации $f(A)$. Поскольку $G/P \in \mathfrak{H} = h(A)$, то $\mathfrak{M} \subseteq h(A)$ и формация $f(A)$ является $h(A)$-критической для $A \in \mathcal{K}(P)$.

Рассмотрим случай, когда A — абелева p-группа из $\mathcal{K}(P)$. Пусть $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})$ и $\mathfrak{M}$ — собственная подформация формации $f(A)$. Тогда $h(A) \neq \varnothing$. Предположим, что $\mathfrak{M} \nsubseteq h(A)$ и M — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus h(A)$. Тогда M монолитична. Так как по теореме 3.2 [6] $h(A) = \mathfrak{N}_p h(A)$, то $O_p(M) = 1$, и ввиду леммы 18.8 [7] существует точный неприводимый $F_p[M]$-модуль K. Пусть $B = K \rtimes M$. Так как $B/O_p(B) \cong M \in \mathfrak{M} \subset f(A)$, то по лемме 3.11 [6] $B \in \langle f \rangle = \mathfrak{F}$ и $\mathrm{cform}\, B \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\mathrm{cform}\, B = \mathfrak{F}$, то $f(A) = \mathrm{form}(B/F_A(B)) = \mathrm{form}\, M \subseteq \mathfrak{M} \subset f(A)$. Противоречие. Следовательно, $\mathrm{cform}\, B \subset \mathfrak{F}$ и по условию $\mathrm{cform}\, B \subseteq \mathfrak{H}$. Тогда $B \in \mathfrak{H}$ и в силу леммы 1 [8] $B/F_A(B) \cong M \in h(A)$. Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{M} \subseteq h(A)$ и $f(A)$ является $h(A)$-критической формацией. Пусть $A \notin \mathcal{K}(\mathfrak{H})$. Тогда $h(A) = \varnothing$. Предположим, что $P < G$. Так как $G/P \in \mathfrak{H}$, то $O_p(G) = P$ и G/P не содержит главных p-факторов. Поскольку $G/P \notin \mathfrak{N}_p$, то $f(A) = \mathrm{form}(G/P) \nsubseteq \mathfrak{N}_p$. Ввиду леммы 3.11 [6] $\mathfrak{N}_p \subset \mathfrak{N}_p f(A) \subseteq \mathfrak{F}$, а значит, $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{H}$ и $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})$. Противоречие. Следовательно, $P = G$ и $f(A) = (1)$. Поэтому $\mathfrak{M} = \varnothing$ — единственная собственная подформация из $f(A)$ и, значит, формация $f(A)$ является $h(A)$-критической.

Покажем, что $P \nsubseteq \Phi(G)$. Пусть $P \subseteq Z(G)$. Тогда $G/C_G(P) = 1$. Так как $G/P \in \mathfrak{H}$ и $G \notin \mathfrak{H}$, то P не является h-центральным главным фактором группы G. Поскольку $G/C_G(P) \notin h(P) = h(A)$, то $h(A) = \varnothing$ и $A \notin \mathfrak{H}$. Ввиду леммы 3.32 [7] $P \rtimes (G/G) \cong P \in \mathfrak{F}$. Поэтому в силу выбора группы G имеем $P = G \nsubseteq \Phi(G)$. Пусть $P \nsubseteq Z(G)$. Тогда $C_G(P) < G$. По лемме 3.32 [7] $T = P \rtimes (G/C_G(P)) \in \mathfrak{F}$. Так как $T/C_T(P) = T/P \cong G/C_G(P) \notin h(P)$, то $T \notin \mathfrak{H}$. Поскольку $|T| \leq |G|$, то в силу выбора группы G имеем $|T| = |G|$. Ввиду того, что $\mathrm{cform}\, T \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathrm{cform}\, T \nsubseteq \mathfrak{H}$, получим $\mathrm{cform}\, T = \mathfrak{F}$ и $P = T^{\mathfrak{H}} \nsubseteq \Phi(T)$.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{L}$ — собственная c-подформация формации $\mathfrak{F}$ и l — ее минимальный c-экран. По следствию 1 [8] $l \leq f$. Покажем, что $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $A \in \mathcal{K}(G) \setminus \mathcal{K}(P)$ и K/L — главный A-фактор группы G. Тогда $P \subseteq C_G(K/L)$ и ввиду леммы 2.8 [7] $G/C_G(K/L) \cong (G/P)/C_{G/P}((K/P)/(L/P)) \in h((K/P)/(L/P)) = h(A)$. Так как $G/C_G(K/L) \in h(A)$ для любого главного A-фактора K/L группы G, то $G/F_A(G) \in h(A)$. Поэтому $l(A) \subseteq f(A) = \mathrm{form}(G/F_A(G)) \subseteq h(A)$. Пусть $A \in \mathcal{K}(P)$. Предположим, что $l(A) = f(A)$. Если A — неабелева группа, то $G \in l(A) \subseteq \mathfrak{L}$, что невозможно. Следовательно, A — группа порядка p. Так как $P \nsubseteq \Phi(G)$, то $G = P \rtimes L$, где L — некоторая подгруппа группы G, и $O_p(G) = P$. Тогда $G/O_p(G) = G/F_A(G) \in l(A)$ и по лемме 3.11 [6] $G \in \mathfrak{L}$. Противоречие. Следовательно, $l(A) \subset f(A)$ и, значит, $l(A) \subseteq h(A)$ для $A \in \mathcal{K}(P)$. Таким образом, $l \leq h$ и $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{H}$. Поскольку $G \notin \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} \nsubseteq \mathfrak{H}$ и формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_c$-критической. $\square$

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{H}$ — c-формация, h — ее максимальный внутренний c-экран. Формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_c$-критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \mathrm{cform}\, G$, где G — такая c-базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из следующих условий:*

1) *$G = P$ — простая группа;*
2) *P — собственная неабелева подгруппа группы G и $P = G^{h(A)}$ для $A \in \mathcal{K}(P)$;*
3) *$G = P \rtimes H$, где $P = C_G(P)$ — p-группа, а $H \neq 1$ — f-базисная группа с монолитом $Q = H^{h(A)}$ такая, что максимальная подформация $\mathfrak{M}$ из $\mathrm{form}\, H$ содержится в $h(A)$ для $A \in \mathcal{K}(P)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть f — минимальный c-экран формации $\mathfrak{F}$. Ввиду леммы 3 $\mathfrak{F} = \mathrm{cform}\, G$, где G — монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}} \nsubseteq \Phi(G)$.

Пусть $A \in \mathcal{K}(P)$. Рассмотрим случай, когда A — неабелева группа. В силу теоремы 3.2 [6] $h(A) = \mathfrak{H}$. Допустим, что $P \notin \mathfrak{F}$. Тогда $A \notin \mathfrak{F}$ и по теореме из [8] $f(A) = \varnothing$. Поэтому $f(A) \subseteq h(A)$. Однако ввиду леммы 3 формация $f(A)$ является $h(A)$-критической. Противоречие. Следовательно, $P \in \mathfrak{F}$. Пусть $A \notin \mathcal{K}(\mathfrak{H})$. Так как $P \in \mathfrak{F}$, то $\mathrm{cform}\, P \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\mathrm{cform}\, P \subset \mathfrak{F}$, то по условию $\mathrm{cform}\, P \subseteq \mathfrak{H}$ и $P \in \mathfrak{H}$, что невозможно. Поэтому $\mathrm{cform}\, P = \mathrm{form}\, P = \mathfrak{F}$, и (1) — единственная максимальная c-подформация из $\mathfrak{F}$. Ввиду предложения 51.34 [9] группа P является критической, а значит, и формационно критической. Таким образом, в этом случае формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1). Пусть $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})$ и $P < G$. Так как $\mathfrak{H} = h(A)$, то $P = G^{h(A)}$. В силу леммы 1 G является c-базисной группой и, значит, формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2).

Пусть A — p-группа. Тогда $\mathrm{cform}\, P = \mathfrak{N}_p$. Рассмотрим случай, когда $A \notin \mathcal{K}(\mathfrak{H})$. Так как формация $\mathfrak{N}_p$ нормально наследственна, то по лемме 3.11 [6] $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_p f(A) \subseteq \mathfrak{F}$ и, значит, $\mathrm{cform}\, P \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\mathrm{cform}\, P \subset \mathfrak{F}$, то по условию $\mathrm{cform}\, P \subseteq \mathfrak{H}$ и $P \in \mathfrak{H}$. Противоречие. Следовательно, $\mathrm{cform}\, P = \mathfrak{F}$, и $G = P$ — c-базисная группа. Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1). Пусть $A \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})$ и H — группа наименьшего порядка из $f(A) \setminus h(A)$. Тогда H монолитична с монолитом $Q = H^{h(A)}$. По теореме 3.2 [6] $h(A) = \mathfrak{N}_p h(A)$. Поэтому $O_p(H) = 1$ и ввиду леммы 18.8 [7] существует точный неприводимый $F_p[H]$-модуль T. Пусть $R = T \rtimes H$. Из $R/O_p(R) \in f(A)$ по лемме 3.11 [6] следует, что $R \in \mathfrak{F}$. Если $R \in \mathfrak{H}$, то ввиду леммы 1 [8] $R/F_A(R) \cong H \in h(A)$, что невозможно. Следовательно, $R \notin \mathfrak{H}$ и в качестве группы, порождающей формацию $\mathfrak{F}$, можно выбрать группу R.

Покажем, что H является f-базисной группой. Пусть $\mathfrak{X}$ — множество всех тех собственных секций группы H, которые лежат в $\mathrm{form}\, H = f(A)$. В силу выбора группы H справедливо включение $\mathfrak{X} \subseteq h(A)$. Поэтому $H \notin \mathrm{form}\, \mathfrak{X}$ и, значит, H является формационно критической группой. По лемме 3.3 [7] $f(A)$ обладает максимальными подформациями. Допустим, что $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ — различные максимальные подформации из $f(A)$. Тогда $\mathfrak{M}_1 \subseteq h(A)$ и $\mathfrak{M}_2 \subseteq h(A)$, а значит, и $\mathfrak{L} = \mathrm{form}(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2) \subseteq h(A)$. Так как $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ — максимальные подформации из $f(A)$, то $\mathfrak{L} = f(A) \subseteq h(A)$, что невозможно. Следовательно, $\mathrm{form}\, H$ обладает единственной максимальной подформацией и, значит, H является f-базисной группой. Ввиду леммы 2 R — c-базисная группа. Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 3).

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \mathrm{cform}\, G$, где G — c-базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ типа 1)–3). Из $G \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ следует, что $\mathfrak{F} \nsubseteq \mathfrak{H}$.

Пусть группа G типа 1). Тогда собственной c-подформацией формации $\mathfrak{F}$ является лишь (1). Следовательно, $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{H}_c$-критическая формация.

Пусть G — группа типа 2) и $A \in \mathcal{K}(P)$. Тогда $G \notin h(A)$. Ввиду леммы 18.2 [7] $\mathrm{form}\, G = f(A)$ обладает единственной максимальной подформацией $\mathrm{form}(G/P) = \mathrm{form}(G/G^{h(A)})$ и, значит, формация $f(A)$ является $h(A)$-критической. По лемме 3 $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{H}_c$-критическая формация.

Пусть группа G типа 3). Допустим, что $H \in h(A)$ для $A \in \mathcal{K}(P)$. Так как $P \in \mathfrak{N}_p$ и $G/P \in h(A)$, то $G \in \mathfrak{N}_p h(A) = h(A) \subseteq \mathfrak{H}$. Противоречие. Следовательно, $H \notin h(A)$. Поскольку максимальная подформация $\mathfrak{M}$ из $\mathrm{form}\, H$ содержится в $h(A)$, то формация $f(A) = \mathrm{form}\, H$ является $h(A)$-критической для $A \in \mathcal{K}(P)$. По лемме 3 $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_c$-критической формацией. $\square$

В работе [2] приводится описание $\mathfrak{H}_l$-критических формаций для локальной формации $\mathfrak{H}$ классического типа. Аналогичные результаты для композиционных формаций можно получить как следствия из теоремы 1. Следуя [2], композиционную формацию $\mathfrak{H}$ назовем формацией специального (классического) типа, если она обладает внутренним c-экраном, все ненильпотентные (неабелевы) значения которого локальны.

Следствие 1. Пусть $\mathfrak{H}$ — c-формация специального типа, h — ее максимальный внутренний c-экран. Формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_c$-критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \mathrm{cform}\, G$, где G — c-базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ такая, что для нее выполняется один из пп. 1)–3) теоремы 1, причем в п. 3) либо $\Phi(H) = 1$, либо H является минимальной не $h(A)$-группой для $A \in \mathcal{K}(P)$ и $H \in \mathfrak{N}_q$, где $q \neq p$, $|H| > q$.

Доказательство. По теореме 1 $\mathfrak{F} = \mathrm{cform}\, G$ и для G выполняется один из пп. 1)–3) теоремы 1. Рассмотрим детально п. 3). Поскольку $\mathfrak{H}$ — формация специального типа, то $\mathfrak{H}$ обладает таким внутренним c-экраном d, все ненильпотентные значения которого локальны. Так как h и d — внутренние p-постоянные экраны формации $\mathfrak{H}$, то по лемме 3.12 и теореме 3.2 из [6] получим $\mathfrak{N}_p d(A) = \mathfrak{N}_p h(A) = h(A)$ для $A \in \mathcal{K}(P)$. Пусть $d(A)$ — локальная формация. Тогда по следствию 7.13 [7] $h(A) = \mathfrak{N}_p d(A)$ является локальной формацией. Поэтому $\Phi(H) = 1$ в этом случае.

Пусть $d(A)$ — нильпотентная формация и $\Phi(H) \neq 1$. Тогда $Q \subseteq \Phi(H)$. Допустим, что $p \in \pi(H)$. Поскольку $H/Q \in h(A) = \mathfrak{N}_p d(A)$, то H/Q p-замкнута и по лемме 4.4 [6] H p-замкнута. Противоречие. Следовательно, H является p'-группой и $H/Q \in d(A)$. По лемме 4.4 [6] группа H является нильпотентной и, значит, H — минимальная не $h(A)$-группа. Так как H монолитична, то H является q-группой, $q \neq p$.

Достаточность следует из теоремы 1. $\square$

Следствие 2. Пусть $\mathfrak{H}$ — формация классического типа, h — ее максимальный внутренний c-экран. Формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_c$-критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \mathrm{cform}\, G$, где G — c-базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, которая удовлетворяет одному из пп. 1)–3) теоремы 1, причем в п. 3) либо $\Phi(H) = 1$, либо H — минимальная не $h(A)$-группа для $A \in \mathcal{K}(P)$ одного из следующих видов: a) циклическая q-группа, $q \neq p$ и $|H| > q$; b) группа кватернионов порядка 8, $p \neq 2$; c) неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q, $q \neq p$.

Доказательство. Необходимость. Так как всякая формация классического типа является формацией специального типа, то ввиду теоремы 1 и следствия 1 детально рассмотрим лишь случай, когда $G = P \rtimes H$ — группа типа 3) теоремы 1. По следствию 1 либо $\Phi(H) = 1$, либо H является минимальной не $h(A)$-группой для $A \in \mathcal{K}(P)$ и $H \in \mathfrak{N}_q$, $q \neq p$, $|H| > q$. По условию формация $\mathfrak{H}$ обладает таким внутренним c-экраном d, все неабелевы значения которого локальны. Ввиду доказательства следствия 1 достаточно рассмотреть случай, когда $d(A)$ — абелева формация для $A \in \mathcal{K}(P)$ и $\Phi(H) \neq 1$. Пусть f — минимальный c-экран формации $\mathfrak{F}$ и $A \in \mathcal{K}(P)$. Поскольку $f(A) \nsubseteq h(A)$ и по теореме 3.12 [6] $\mathfrak{N}_p d(A) = \mathfrak{N}_p h(A) = h(A)$, то $f(A) \nsubseteq d(A)$. Так как $f(A) = \mathrm{form}\, H \subseteq \mathfrak{N}_q$, то ввиду $h(A)$-критичности формации $f(A)$ каждая собственная подформация из $f(A)$ содержится в $d(A)$ и, значит, $f(A)$ является $d(A)$-критической формацией. Если $f(A)$ — абелева формация, то ввиду монолитичности группы H получим, что H — циклическая q-группа. Пусть $f(A)$ — неабелева формация. По лемме 18.13 [7] H является либо группой кватернионов порядка 8, либо неабелевой группой порядка q^3 простой нечетной экспоненты q.

Достаточность следует из теоремы 1. $\square$

Поскольку всякая локальная формация является композиционной, то ввиду теоремы 1 появилась возможность несколько расширить основной результат работы [2]. Предварительно докажем следующие леммы.

Лемма 4. *Пусть G — монолитическая группа с неабелевым монолитом P. Тогда группа G является l-базисной группой, причем максимальная l-подформация $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{F} = \operatorname{lform} G$ имеет внутренний l-экран h со следующим строением*:

$$h(q) = \begin{cases} \operatorname{form}(G/P), & \textit{если } \ q \in \pi(P); \\ \operatorname{form}(G/F_q(G)) & \textit{для любого } \ q \in \pi(G) \setminus \pi(P); \\ \varnothing, & \textit{если } \ q \in \mathbf{P} \setminus \pi(G). \end{cases}$$

Доказательство. Пусть h — l-экран, описанный в заключении леммы, $\mathfrak{H} = \langle h \rangle$ и f — минимальный l-экран формации $\mathfrak{F}$. По теореме 8.3 [7] $f(q) = \operatorname{form}(G/F_q(G))$ для любого $q \in \pi(G)$. Пусть $q \in \pi(G/P)$. Если $q \notin \pi(P)$, то ввиду теоремы 4.5 [6] $(G/P)/F_q(G/P) \in f(q) = h(q)$. Если $q \in \pi(P)$, то $(G/P)/F_q(G/P) \in \operatorname{form}(G/P) = h(q)$. По теореме 4.5 [6] $G/P \in \mathfrak{H}$. Как и при доказательстве леммы 1, нетрудно проверить, что h является внутренним экраном формации $\mathfrak{H}$, а также что G — формационно критическая группа. Пусть $\mathfrak{B}$ — собственная l-подформация из $\mathfrak{F}$, b — ее минимальный l-экран. По следствию 8.4 [7] $b \le f$. Если $b(q) = f(q)$ для $q \in \pi(P)$, то $G \cong G/F_q(G) \in b(q) \subseteq \mathfrak{B}$, что невозможно. Следовательно, $b(q) \subset f(q)$ и по лемме 18.2 [7] $b(q) \subseteq h(q)$ для $q \in \pi(P)$. Если $q \in \pi(G) \setminus \pi(P)$, то $h(q) = f(q) \supseteq b(q)$. Поэтому $b \le h$ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Как и в лемме 1, очевидно, что $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Таким образом, формация $\mathfrak{H}$ является единственной максимальной l-подформацией из $\mathfrak{F}$ и, значит, G — l-базисная группа. □

Лемма 5. *Пусть $G = P \rtimes H$ — монолитическая группа с монолитом P, где P — p-группа, H — f-базисная группа и $\mathfrak{M}$ — максимальная подформация из $\operatorname{form} H$. Тогда G является l-базисной группой, причем максимальная l-подформация $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{F} = \operatorname{lform} G$ имеет внутренний l-экран h со следующим строением*:

$$h(q) = \begin{cases} \mathfrak{M}, & \textit{если } \ q = p; \\ \operatorname{form}(G/F_q(G)) & \textit{для любого } \ q \in \pi(G) \setminus \{p\}; \\ \varnothing, & \textit{если } \ q \in \mathbf{P} \setminus \pi(G). \end{cases}$$

Доказательство. Пусть h — l-экран, описанный в заключении леммы, $\mathfrak{H} = \langle h \rangle$ и f — минимальный l-экран формации $\mathfrak{F}$. По теореме 8.3 [7] $f(q) = \operatorname{form}(G/F_q(G))$ для любого $q \in \pi(G)$. Пусть $M \in \mathfrak{M}$ и $q \in \pi(M)$. Поскольку $\mathfrak{M} \subset \operatorname{form} H \subseteq \mathfrak{F}$, то $\pi(M) \subseteq \pi(G)$. Как и в лемме 4, проводя аналогичные рассуждения, нетрудно проверить, что $M/F_q(M) \in h(q)$ для любого $q \in \pi(M)$ и, значит, ввиду теоремы 4.5 [6] $M \in \mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ и поэтому $h(p) \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$. Тогда $P \subseteq F_q(G)$ и $G = HF_q(G)$. Как и в лемме 2, нетрудно показать, что $H \in \mathfrak{H}$. Поэтому $G/F_q(G) \cong H/H \cap F_q(G) \in \mathfrak{H}$ и, значит, $h(q) \subseteq \mathfrak{H}$. Таким образом, h является внутренним экраном формации $\mathfrak{H}$.

Пусть $\mathfrak{B}$ — собственная l-подформация из $\mathfrak{F}$, b — ее минимальный l-экран. По следствию 8.4 [7] $b \le f$. Если $b(p) = f(p)$, то $G/O_p(G) = G/F_p(G) \in b(p) \cap \mathfrak{B}$ и по лемме 8.2 [7] $G \in \mathfrak{B}$. Противоречие. Следовательно, $b(p) \subset f(p)$ и по условию $b(p) \subseteq \mathfrak{M} = h(p)$. Так как $b(q) \subseteq h(q)$ для любого $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$, то $b \le h$ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Поскольку $h \le f$ и $h(p) \subset f(p)$, то $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$ и, значит, $\mathfrak{H}$ — единственная максимальная l-подформация из $\mathfrak{F}$. В силу леммы 2 группа G формационно критична и поэтому G является l-базисной группой. □

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{H}$ — l-формация, h — ее максимальный внутренний l-экран. Формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_l$-критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \operatorname{lform} G$, где G — такая l-базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из следующих условий*:

1) *$G = P$ — группа простого порядка;*
2) *P — неабелева подгруппа группы G и $P = G^{h(p)}$ для всех $p \in \pi(P)$;*

3) $G = P \leftthreetimes H$, *где* $P = C_G(P)$ — p*-группа, а* $H \neq 1$ — f*-базисная группа такая, что максимальная подформация* $\mathfrak{M}$ *из* $\mathrm{form}\, H$ *содержится в* $h(p)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть f — минимальный l-экран формации $\mathfrak{F}$. По лемме 2.1 [3] $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что $f(p)$ является $h(p)$-критической формацией для всех $p \in \pi(P)$. Ввиду теоремы 8.3 [7] $f(p) = \mathrm{form}(G/F_p(G))$ для любого $p \in \pi(G)$.

Пусть $\pi(P) \not\subseteq \pi(\mathfrak{H})$. Тогда в силу теоремы 8.3 [7] и теоремы 3.3 [6] $h(p) = \varnothing$ для некоторого $p \in \pi(P) \setminus \pi(\mathfrak{H})$. Ввиду $h(p)$-критичности формации $f(p)$ имеем $f(p) = (1)$ и, значит, $G = F_p(G)$ — группа простого порядка $p \in \pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi(\mathfrak{H})$. Как показано в теореме 1, группа G является формационно критической и (1) — единственная максимальная l-подформация из $\mathrm{lform}\, G$. Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1).

Пусть $\pi(P) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$ и $p \in \pi(P)$. Рассмотрим случай, когда монолит P неабелев. Так как $G \notin \mathfrak{H}$ и $h(p) \subseteq \mathfrak{H}$, то $G \notin h(p)$. По лемме 4 группа G является l-базисной и максимальная l-подформация $\mathfrak{L}$ из $\mathfrak{F}$ обладает таким внутренним l-экраном d, что $d(p) = \mathrm{form}(G/P)$. По условию $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{H}$ и ввиду следствий 8.4 и 8.6 из [7] $d \leq h$. Тогда $G/P \in h(p)$ и, значит, $P = G^{h(p)}$. Таким образом, в этом случае формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2).

Пусть P — p-группа и H — группа наименьшего порядка из $f(p) \setminus h(p)$. Тогда H монолитична с монолитом $Q = H^{h(p)}$. По теореме 3.3 [6] $h(p) = \mathfrak{N}_p h(p)$ и поэтому $O_p(H) = 1$. Применяя лемму 18.8 [17], построим группу $R = T \leftthreetimes H$, где T — точный неприводимый $F_p[H]$-модуль. Ввиду леммы 18.2 [7] $R \in \mathfrak{F}$. Если $R \in \mathfrak{H}$, то $R/F_p(R) \cong H \in h(p)$, что невозможно. Следовательно, $R \notin \mathfrak{H}$ и, значит, $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, R$. Как и при доказательстве теоремы 1, нетрудно проверить, что H является f-базисной группой и максимальная подформация $\mathfrak{M}$ из $\mathrm{form}\, H$ содержится в $h(p)$. Тогда по лемме 5 R является l-базисной группой и, значит, формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 3).

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, G$, где G — l-базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ типа 1)–3). Из $G \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ следует, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Пусть G — группа типа 1) и $p \in \pi(G)$. Тогда формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$ является $\mathfrak{H}_l$-критической. Пусть группа G типа 2) и $p \in \pi(P)$. По лемме 4 максимальная l-подформация $\mathfrak{M}$ из $\mathfrak{F}$ обладает таким внутренним l-экраном m, что $m(p) = \mathrm{form}(G/P) \subseteq h(p)$. Пусть $q \in \pi(G) \setminus \pi(P)$. Тогда $P \subseteq F_q(G)$. По лемме 2.8 [7] $G/F_q(G) \cong (G/P)/F_q(G/P) \in h(q)$ и, значит, $m(q) \subseteq h(q)$. Если $q \notin \pi(G)$, то $m(q) = \varnothing \subseteq h(q)$. Следовательно, $m \leq h$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_l$-критической формацией. Пусть G — группа типа 3). Допустим, что $H \in h(p)$. Так как $G/P \in \mathfrak{H}$ и $G/C_G(P) = G/P \cong H \in h(p)$, то $G \in \mathfrak{H}$, что невозможно. Следовательно, $H \notin h(p)$ и, значит, $f(p)$ является $h(p)$-критической формацией. По лемме 2.1 [3] $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{H}_l$-критическая формация. $\square$

Замечание. В работе [2] доказано существование $\mathfrak{H}_l$-критических формаций в случае, когда $\mathfrak{H}$ является локальной формацией классического типа. Нетрудно показать, что для композиционной формации $\mathfrak{H}$ классического типа $\mathfrak{H}_c$-критические формации также существуют. Вопрос существования $\mathfrak{H}_c$-критических и $\mathfrak{H}_l$-критических формаций в общем случае остается открытым. В заключение отметим, что основные классы групп являются формациями классического типа.

Литература

1. Шеметков Л.А. *Экраны ступенчатых формаций* // Тр. VI Всесоюзн. симпоз. по теории групп. – Киев: Наук. думка, 1980. – С. 37–50.
2. Скиба А.Н. *О критических формациях* // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев: Ин-т матем. АН Украины, 1993. – С. 250–268.
3. Скиба А.Н. *Формации со сверхразрешимыми локальными подформациями* // Тр. ин-та матем. СО АН СССР. – Новосибирск: Наука, 1984. – Т. 4. – С. 101–118.
4. Селькин В.М., Скиба А.Н. *О наследственных критических формациях* // Сиб. матем. журн. – 1996. – Т. 37. – № 5. – С. 1145–1153.

5. Ведерников В.А., Сорокина М.М. *О композиционных наследственных критических формациях* // Препринт № 1. Гос. пед. ун-т. – Брянск, 1996. – 19 с.
6. Шеметков Л.А. *Формации конечных групп.* – М.: Наука, 1978. – 272 с.
7. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. *Формации алгебраических систем.* – М.: Наука, 1989. – 256 с.
8. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. *О минимальном композиционном экране композиционной формации* // Вопр. алгебры. – Гомель, 1992. – Вып. 7. – С. 39–43.
9. Нейман Х. *Многообразия групп.* – М.: Мир, 1969. – 264 с.

Брянский государственный
педагогический университет

Поступила
10.01.1997