ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 6 (469)

УДК 517.927.2

Г.М. МУМИНОВ

О ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ПРИНИМАЮЩИМИ ЗНАЧЕНИЯ НА ЗАДАННОМ МНОЖЕСТВЕ

1. Целью данной работы является оценка методами выпуклого анализа длины максимального промежутка, на котором любая двухточечная краевая задача для линейного дифференциального уравнения второго порядка с ограниченными коэффициентами имеет единственное решение.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$x'' + u_1(t)x' + u_2(t)x = f(t), \tag{1}$$

$$\begin{aligned} x(a)\sin\alpha - x'(a)\cos\alpha = A,\\ x(b)\sin\beta - x'(b)\cos\beta = B, \end{aligned} \tag{2}$$

где $u_1(t)$, $u_2(t)$, $f(t)$ — суммируемые на отрезке $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ функции, A, B, α и β — заданные числа, причем

$$-\frac{\pi}{2} \le \beta < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha \le \frac{\pi}{2}, \quad \beta < \alpha. \tag{3}$$

Известно [1], что краевая задача (1)–(3) однозначно разрешима для любых $f(t)$, A и B тогда и только тогда, когда соответствующая ей однородная краевая задача

$$x'' + u_1(t)x' + u_2(t)x = 0, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} x(a)\sin\alpha - x'(a)\cos\alpha = 0,\\ x(b)\sin\beta - x'(b)\cos\beta = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

имеет только тривиальное решение.

Обозначим через U множество суммируемых вектор-функций $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$, удовлетворяющих при всех $t \in R^1$ ограничению

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in P, \quad 0 \in \operatorname{int} P, \tag{6}$$

где P — данное компактное подмножество из R^2.

При фиксированном коэффициенте $u(\cdot) \in U$ рассмотрим промежуток $[a, c)$, на котором однородная краевая задача (4), (5) имеет при любом b $(a < b < c)$ только тривиальное решение. Такой промежуток называется *промежутком однозначной разрешимости краевой задачи* (1)–(3).

Обозначим через $a + T(u(\cdot))$ точную верхнюю грань правых концов всех промежутков однозначной разрешимости краевой задачи (1)–(3) с общим левым концом в точке a при фиксированных коэффициентах $u(\cdot) \in U$. Тогда длина максимального промежутка однозначной разрешимости краевой задачи (1)–(3) определяется из условия $T = \inf\{T(u(\cdot)) : u(\cdot) \in U\}$.

Промежуток $[a, b)$, на котором любое нетривиальное решение уравнения (4) имеет не более одного нуля, называется промежутком неосцилляции уравнения (4).

Промежуток $[a, a+T_0)$ назовем максимальным промежутком неосцилляции для класса уравнений (4) при $u(\cdot) \in U$, если, во-первых, он является промежутком неосцилляции для любого уравнения из этого класса, во-вторых, существует нетривиальное решение, у которого не менее двух нулей на отрезке $[a, a+T_0]$. Величина T_0 называется длиной максимального промежутка неосцилляции для класса уравнений (4) при $u(\cdot) \in U$.

Напомним, что в случае, когда множество P — прямоугольник, двухточечные краевые задачи (1)–(3) изучены в многочисленных работах (напр., [2]–[8]).

Для отыскания величин T и T_0 в данной работе используются опорные функции и их свойства; приведем некоторые факты из [9].

2. Пусть R^n — евклидово пространство переменной $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ с нормой $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$, а $\Omega(R^n)$ — совокупность всех непустых компактных множеств из R^n.

Функция вектора $\psi \in R^n$

$$c(F, \psi) = \max_{f \in F} \langle f, \psi \rangle, \tag{7}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение, называется опорной функцией множества $F \subset \Omega(R^n)$.

Если максимум в (7) для вектора $\psi_0 \in R^n$ достигается на некотором векторе $f_0 \in F$, т. е. $c(F, \psi) = \langle f_0, \psi_0 \rangle$, то гиперплоскость, определяемая уравнением $\langle x, \psi_0 \rangle = \langle f_0, \psi_0 \rangle$, называется опорной гиперплоскостью к множеству F в точке f_0, а вектор ψ_0 — опорным вектором. Как видно из (7), опорная функция $c(F, \psi)$ определяется однозначно для данного множества F.

Приведем следующие свойства опорных функций:

а) $c(F, \lambda\psi) = c(\lambda F, \psi) = \lambda c(F, \psi)$, $\lambda \geq 0$;

б) $c(F_1 + F_2, \psi) = c(F_1, \psi) + c(F_2, \psi)$;

в) если $F_1 \subset F_2$, то $c(F_1, \psi) \leq c(F_2, \psi)$;

г) если A — $n \times n$-матрица, а $F \subset \Omega(R^n)$, то $c(AF, \psi) = c(F, A^*\psi)$, где A^* — матрица, сопряженная с матрицей A, а $AF = \{x \in R^n : x = Af,\ f \in F\}$.

Используя свойства а)–г), найдем в явном виде опорные функции конкретных множеств.

Пример 1. Пусть $F = \{x \in R^n : a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = 1, 2, \dots, n\}$ — параллелепипед. Имеет место представление $F = f + AG$, где $f = \big\{\big(\frac{b_1+a_1}{2}, \frac{b_2+a_2}{2}, \dots, \frac{b_n+a_n}{2}\big)\big\}$ — точка, $G = \{x \in R^n : |x_1| \leq 1,\ |x_2| \leq 1, \dots,\ |x_n| \leq 1\}$ — параллелепипед, а A — диагональная $n \times n$-матрица вида

$$A = \operatorname{diag}\left(\frac{b_1 - a_1}{2}, \frac{b_2 - a_2}{2}, \dots, \frac{b_n - a_n}{2}\right).$$

Тогда согласно свойствам б), г) опорных функций получим

$$c(F, \psi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b_i + a_i}{2}\psi_i + \frac{b_i - a_i}{2}|\psi_i|\right).$$

Пример 2. Пусть $F = \{x \in R^n : \langle Ax, x \rangle \leq 1\}$ — эллипсоид, где A — положительно определенная $n \times n$-матрица. Согласно [10] функция $f(x) = \sqrt{\langle Ax, x \rangle}$ строго выпукла, удовлетворяет условию выпуклости

$$f(x) \geq \left\langle \frac{\partial f(y)}{\partial x}, x \right\rangle, \tag{8}$$

где $\frac{\partial f(y)}{\partial x}$ — градиент функции $f(x)$ в точке $y \in R^n$. Поскольку $\frac{\partial f(y)}{\partial x} = \frac{Ay}{\sqrt{\langle Ay, y \rangle}}$, то в силу (8) получим

$$\sqrt{\langle Ax, x \rangle} \geq \frac{\langle Ay, x \rangle}{\sqrt{\langle Ay, y \rangle}} = \frac{\langle \psi, x \rangle}{\sqrt{\langle \psi, A^{-1}\psi \rangle}}.$$

Отсюда

$$c(F,\psi) = \max_{\langle Ax,x\rangle \le 1} \langle x,\psi\rangle = \max_{\langle Ax,x\rangle \le 1} \sqrt{\langle Ax,x\rangle}\sqrt{\langle A^{-1}\psi,\psi\rangle} = \sqrt{\langle A^{-1}\psi,\psi\rangle}.$$

Таким образом, $c(F,\psi) = \sqrt{\langle A^{-1}\psi,\psi\rangle}$.

Рассмотрим частные случаи

1) если $A = E$ — единичная матрица, то $F = S_1(0)$ — единичный шар с центром в точке $x = 0$ и ее опорная функция имеет вид $c(F,\psi) = c(S_1(0),\psi) = \|\psi\|$;

2) если A — диагональная $n\times n$-матрица вида $\operatorname{diag}\left(\frac{1}{a_1^2}, \frac{1}{a_2^2}, \dots, \frac{1}{a_n^2}\right)$, то $c(F,\psi) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\psi_i^2}$;

3) если $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, то при условии $ad - bc \ne 0$

$$c(F,\psi) = \frac{\sqrt{d\psi_1^2 - (b+c)\psi_1\psi_2 + a\psi_2^2}}{ad - bc}.$$

Пример 3. Пусть $F = \{x \in R^n : \|x\|_p \le 1,\ p > 1\}$. Согласно неравенству Коши–Буняковского $\|x\|_p\|y\|_q \ge \langle x,y\rangle$, $q = \frac{p}{p-1}$, имеем $c(F,\psi) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |\psi_i|^q\right)^{1/q}$.

3. Установим справедливость следующих теорем.

Теорема 1. *Длина T_0 максимального промежутка неосцилляции для класса уравнений* (4) *при $u(\cdot) \in U$ определяется по формуле*

$$T_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{s^2 + c(P,\psi(s))}, \tag{9}$$

где $c(P,\psi(s))$ — опорная функция множества P в направлении вектора $\psi(s) = (s,1)$.

Теорема 2. *Длина T максимального промежутка однозначной разрешимости краевых задач* (1)–(3) *при $u(\cdot) \in U$ определяется по формуле*

$$T = \int_{\operatorname{tg}\beta}^{\operatorname{tg}\gamma} \frac{ds}{s^2 + c(P,\psi(s))}, \tag{10}$$

где $c(P,\psi(s))$ — опорная функция множества P в направлении вектора $\psi(s) = (s,1)$.

Доказательство этих теорем проводится одним и тем же способом. Поэтому докажем только теорему 1.

Пусть $x(t)$ — нетривиальное решение уравнения (4), имеющее нули в точках $t = 0$ и $t = T_0$. Для определенности положим $x(0) = x(T_0) = 0$, $x(t) > 0$, $0 < t < T_0$. Тогда ясно, что $x'(0) > 0$ и $x'(T_0) < 0$. Нетрудно убедиться, что функция $\tau(t) = x'(t)/x(t)$, $0 < t < T_0$, удовлетворяет уравнению

$$\tau'(t) = -\tau^2(t) - u_1(t)\tau(t) - u_2(t), \quad 0 < t < T_0.$$

Отсюда в силу свойств а), г) опорных функций имеем

$$\tau'(t) \ge -\tau^2(t) - c(P,(\tau(t),1)), \quad 0 < t < T_0, \tag{11}$$

или

$$\frac{d\tau(t)}{\tau^2(t) + c(P,(\tau(t),1))} \ge -dt.$$

Интегрируя это неравенство в пределах от 0 до T_0, с учетом равенств

$$\lim_{t\to 0}\tau(t) = \infty, \quad \lim_{t\to T_0}\tau(t) = -\infty$$

получим

$$T_0 \ge \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{s^2 + c(P,\psi(s))}, \tag{12}$$

где $\psi(s) = (s, 1)$.

Теперь покажем, что в неравенстве (12) имеет место знак равенства. Для этой цели используем метод динамического программирования. В соответствии с ним введем функцию Беллмана ([4], с. 24–26) от переменных x и x' $\left(= \frac{dx}{dt}\right)$:

$$T(x, x') = \int_{-\infty}^{x/x'} \frac{ds}{s^2 + c(P, \psi(s))}.$$

Положим $\omega(x, x') = -T(x, x')$ (ср. [4], с. 27). Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{x'/x^2}{g(x, x')}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x'} = -\frac{1/x}{g(x, x')},$$

где $g(x, x') = (x'/x)^2 + c(P, (x'/x, 1))$. Тогда

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} f_1(x, x') + \frac{\partial \omega}{\partial x'} f_2(x, x') = \frac{(x'/x)^2 + u_1(x'/x) + u_2}{(x'/x)^2 + c(P, (x'/x), 1)} \le 1,$$

где $f_1(x, x') = x'$, $f_2(x, x') = -u_2 x - u_1 x'$ в силу уравнения (4). Отсюда имеем

$$\max_{u(\cdot) \in U} \left[\frac{\partial \omega}{\partial x} f_1(x, x') + \frac{\partial \omega}{\partial x'} f_2(x, x')\right] = \frac{\max\limits_{u(t) \in p} [(x'/x)^2 + u_1(x'/x) + u_2]}{(x'/x)^2 + c(P, (x'/x), 1)} = 1.$$

Следовательно, согласно принципу оптимальности Беллмана ([4], с. 24–26) функция $u(t)$, $0 \le t \le T_0$, обеспечивающая максимальность промежутка неосцилляции, должна удовлетворять равенству

$$u_1 x' + u_1 x = c(P, (x, x')).$$

Таким образом, в силу положительной однородности опорной функции в (11), (12) должно быть равенство, что равносильно формуле (9). $\square$

Используя примеры 1–3, сформулируем пять следствий из теорем 1 и 2.

Следствие 1 ([2], [3]). Промежуток $[a, b]$ будет промежутком неосцилляции для класса уравнений (4) при ограничениях на коэффициенты

$$|u_1(t)| \le M, \quad |u_2(t)| \le N, \quad a \le t \le b, \tag{13}$$

тогда и только тогда, когда

$$b - a < \begin{cases} 4/M, & \text{если } M^2 - 4N = 0; \\ \frac{4}{\sqrt{4N - M^2}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{M}{\sqrt{4N - M^2}}\right), & \text{если } M^2 - 4N < 0; \\ \frac{2}{\sqrt{M^2 - 4N}} \ln \frac{M + \sqrt{M^2 - 4N}}{M - \sqrt{M^2 - 4N}}, & \text{если } M^2 - 4N > 0. \end{cases}$$

Следствие 2. Промежуток $[a, b]$ будет промежутком неосцилляции для класса уравнений (4) при ограничениях на коэффициенты $u = (u_1, u_2) : \{u \in U : \langle Au, u \rangle \le 1\}$ тогда и только тогда, когда

$$b - a < \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{s^2 + \sqrt{\langle A^{-1}\psi(s), \psi(s) \rangle}},$$

где $\psi(s) = (s, 1)$, A — положительно определенная 2×2-матрица.

Следствие 3. Промежуток $[a,b]$ будет промежутком неосцилляции для класса уравнений (4) при ограничениях на коэффициенты

$$|u_1(t)|^p + |u_2(t)|^p \le 1, \quad p > 1, \quad a \le t \le b,$$

тогда и только тогда, когда

$$b - a < 2\int_0^\infty \frac{ds}{s^2 + \sqrt[q]{1+s^q}}, \qquad q = \frac{p}{p-1}.$$

В работе [5] рассмотрена краевая задача вида

$$\begin{aligned} &x'' + u_1(t)x' + u_2(t)x = f(t), \\ &\alpha_0 x(a) + \beta_0 x'(a) = A, \quad \alpha_1 x(b) + \beta_1 x'(b) = B, \quad \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 \ne 0, \end{aligned} \tag{14}$$

где коэффициенты уравнения удовлетворяют ограничению (13) ($M = M_1$, $N = M_2$), и приведена формула для оценки максимального промежутка однозначной разрешимости краевой задачи (14). Однако приведенный там результат представляет трудности при его практическом применении. С помощью формулы (10), положив

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\alpha_0}{\beta_0}, \quad tg\beta = -\frac{\alpha_1}{\beta_1} \quad \left(\frac{\alpha_0}{\beta_0} < \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right),$$

можно уточнить результат этой работы следующим образом.

Следствие 4. Промежуток $[a,b]$ является промежутком однозначной разрешимости краевой задачи (14) тогда и только тогда, когда

$$b - a < \int_{-\alpha_1/\beta_1}^{-\alpha_0/\beta_0} \frac{ds}{s^2 + M|s| + N}.$$

Пусть теперь множество $P = Q + S_R(0)$ (см. (6)) является алгебраической суммой двух множеств, т. е.

$$Q = \{(u_1,u_2) : |u_1| \le M,\ |u_2| \le N\}, \quad S_R(0) = \{(u_1,u_2) : u_1^2 + u_2^2 \le R^2\}. \tag{15}$$

Используя свойство б) опорной функции, легко установим

Следствие 5. Промежуток $[a,b]$ является промежутком однозначной разрешимости краевой задачи (1)–(3) при ограничениях (15) тогда и только тогда, когда

$$b - a < \int_{\operatorname{tg}\beta}^{\operatorname{tg}\alpha} \frac{ds}{s^2 + M|s| + N + R\sqrt{s^2+1}}.$$

Литература

1. Азбелев Н.В., Домошницкий А.И. *О дифференциальном неравенстве Валле-Пуссена* // Дифференц. уравнения. – 1986. – Т. 22. – № 12. – С. 2041–2045.
2. de la Vallee Poussin C. *Sur l'equation differentielle lineaire du second order. Determination d'une integrale par deux valeurs assignees. Extension aux equations d'ordre n* // J. math. pures at appl. – 1929. – V. 8. – № 2. – P. 125–144.
3. Мильштейн Г.Н. *О краевой задаче для системы двух дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1965. – Т. 1. – № 12. – С. 1628–1639.
4. Болтянский В.Г. *Математические методы оптимального управления.* – М.: Наука, 1969. – 408 с.
5. Мираков В.Е. *Об условиях разрешимости задачи Чаплыгина* // ДАН СССР. – 1966. – Т. 170. – № 4. – С. 776–779.

6. Кигурадзе И.Т. *О сингулярной двухточечной краевой задаче* // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5. – № 11. – С. 2002–2016.
7. Тонков Е.Л. *О периодическом уравнении второго порядка* // ДАН СССР. – 1969. – Т. 184. – № 2. – С. 296–299.
8. Шехтер Б.Л. *Об однозначной разрешимости одной линейной двухточечной краевой задачи* // Дифференц. уравнения. – 1975. – Т. 11. – № 4. – С. 687–693.
9. Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. *Дифференциальные включения и оптимальное управление* // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – 1985. – Т. 169. – С. 194–252.
10. Wang C.-L. *Convexity and inequalities* // J. Math. Anal. Appl. – 1979. – V. 72. – P. 355–361.

Ташкентский государственный университет

Поступила
09.02.2000