ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 3 (490)

УДК 517.977

Ю.Н. ПАНКРАТОВА

РАВНОВЕСИЕ ПО НЭШУ В СМЕШАННОМ РАСШИРЕНИИ ИГРЫ С УПОРЯДОЧЕННЫМИ ИСХОДАМИ

Статья посвящена проблеме существования и описания ситуаций равновесия по Нэшу в смешанном расширении конечной игры с упорядоченными исходами. Как известно, для игр с числовыми выигрышами принцип равновесия в смысле Нэша реализуется в смешанных стратегиях. Для игр с упорядоченными исходами конструкция смешанного расширения может быть введена следующим образом: множества стратегий и исходов расширяются до множеств вероятностных мер, а функции реализации и отношения порядка игроков продолжаются на множества вероятностных мер.

При построении смешанного расширения игры с упорядоченными исходами основной проблемой является нахождение способа продолжения порядка на множество вероятностных мер. В данной работе используется так называемое коническое продолжение порядка на множество вероятностных мер, которое задается при помощи конусов изотонных отображений упорядоченных множеств в R. В [1] показано, что в смешанном расширении игры с упорядоченными исходами, построенном при помощи конечнопорожденных конусов, существуют ситуации равновесия. Однако наиболее важного типа равновесия, равновесия по Нэшу, в таком расширении может не быть.

Цель данной работы — нахождение необходимых, а также достаточных условий существования ситуаций равновесия по Нэшу в смешанном расширении игры с упорядоченными исходами. Основной метод решения данной задачи состоит в характеризации системы спектров равновесной ситуации, которая базируется на условии дополняющей нежесткости (заметим, что для игр с упорядоченными исходами условие дополняющей нежесткости является гораздо более сильным условием, чем для игр с числовыми функциями выигрыша).

В первой части статьи находятся условия, при которых смешанное расширение игры с упорядоченными исходами, построенное с помощью конусов изотонных отображений, будет игрой с упорядоченными исходами.

Во второй части дается характеризация спектров ситуации равновесия по Нэшу в смешанном расширении игры с упорядоченными исходами, причем основным здесь является условие сбалансированности.

Для игры двух лиц с упорядоченными исходами условие вполне равновесности ситуации в смешанном расширении сводится к условию сбалансированности матрицы ее исходов [2], которое в свою очередь эквивалентно коллинеарной сбалансированности некоторых покрытий множеств стратегий игроков [3]. В третьей части работы этот результат обобщается на игры n лиц, причем к условию коллинеарности добавляется еще одно дополнительное условие. Отметим, что понятие сбалансированности покрытий введено в [4], однако до сих пор оно использовалось в теории игр только применительно к семействам коалиций игроков в рамках теории кооперативных игр.

1. Расширение игры с упорядоченными исходами с помощью конусов изотонных отображений

Стратегическая игра n лиц с упорядоченными исходами формально может быть задана в виде набора объектов

$$G = \langle I, (X_i)_{i\in I}, A, (\omega_i)_{i\in I}, F\rangle, \tag{1.1}$$

где $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество игроков; X_i — множество стратегий (или чистых стратегий) игрока $i \in I$; A — множество исходов; ω_i — отношение (частичного) порядка на множестве A, выражающее предпочтения игрока i; $F : \prod\limits_{i\in I} X_i \to A$ — функция реализации, которая каждой ситуации игры $x \in X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ ставит в соответствие определяемый ею исход $F(x) \in A$.

Смешанное расширение игры G с упорядоченными исходами представляет собой игру, в которой базисные множества заменяются множествами вероятностных мер, а функция реализации и отношения порядка, выражающие предпочтения игроков, продолжаются на множества вероятностных мер.

Далее мы ограничиваемся конечными играми. В этом случае смешанное расширение игры G есть игра $\widetilde{G}$, в которой множеством стратегий игрока i является множество $\widetilde{X}_i$ вероятностных векторов над X_i, а множеством исходов — множество $\widetilde{A}$ вероятностных векторов над A. Функция реализации в смешанном расширении игры G есть отображение $\widetilde{F}$, которое каждой ситуации в смешанных стратегиях $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \in \prod\limits_{i\in I} \widetilde{X}_i$ ставит в соответствие вероятностный вектор

$$\widetilde{F}_{(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)}(a) = \sum_{\substack{F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=a \\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in X}} \mu_1(x_1)\mu_2(x_2)\ldots\mu_n(x_n). \tag{1.2}$$

Продолжение порядка ω_i на множество вероятностных мер $\widetilde{A}$ строится следующим образом [1]. Для каждого $i \in I$ зафиксируем некоторый конус C_i изотонных отображений упорядоченного множества $\langle A, \omega_i\rangle$ в R. Положим для произвольных $\mu, \nu \in A$

$$\mu \overset{\widetilde{\omega}_i(C_i)}{\leq} \nu \;\Leftrightarrow\; (\varphi, \mu) \leq (\varphi, \nu) \;\; \forall \varphi \in C_i, \tag{1.3}$$

где $(\ ,\ )$ — стандартное скалярное произведение в R^A. Построенная игра обозначается $\widetilde{G}[C_1, C_2, \ldots, C_n]$.

Первая задача состоит в нахождении условий, накладываемых на конусы изотонных отображений $(C_i)_{i\in I}$, при которых расширенная игра $\widetilde{G}[C_1, C_2, \ldots, C_n]$ оказывается игрой с упорядоченными исходами, а G — ее подыгрой.

Определение 1.1. Игра $\overline{G} = \langle I, (\overline{X}_i)_{i\in I}, \overline{A}, (\overline{\omega}_i)_{i\in I}, \overline{F}\rangle$ есть расширение игры G, если при каждом $i \in I$

$$X_i \subseteq \overline{X}_i, \quad A \subseteq \overline{A}, \quad \omega_i \subseteq \overline{\omega}_i, \quad F \subseteq \overline{F}.$$

Определение 1.2. Игра G есть подыгра игры $\overline{G}$, если $\overline{G}$ есть расширение игры G и

а) $\overline{\omega}_i|_A = \omega_i, \quad i \in I$;

б) $\overline{F}|_X = F$.

Замечание. При рассмотрении смешанного расширения мы отождествляем, как обычно, вырожденный вероятностный вектор δ_z, сосредоточенный в точке z, с этой точкой, т. е. $\delta_z \equiv z$.

Теорема 1.1. *Предположим, что каждый конус C_i содержит ненулевой вектор с равными компонентами. Для того чтобы игра $\widetilde{G}[C_1, C_2, \ldots, C_n]$ была игрой с упорядоченными исходами, а G — ее подыгрой, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $i \in I$*

1) *конус C_i аппроксимировал отношение порядка ω_i;*

2) *конус* C_i *был телесным в линейном пространстве* R^A.

Доказательство теоремы сводится к следующим леммам.

Лемма 1.1. *При любом наборе конусов* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *игра* $\widetilde{G}[C_1, C_2, \ldots, C_n]$ *является расширением игры* G, *т. е.*

$$X_i \subseteq \widetilde{X}_i, \quad A \subseteq \widetilde{A}, \quad \omega_i \subseteq \widetilde{\omega}_i, \quad F \subseteq \widetilde{F}.$$

Доказательство. При отождествлении вырожденного вероятностного вектора, сосредоточенного в одной точке, с этой точкой получим включения $X_i \subseteq \widetilde{X}_i$, $A \subseteq \widetilde{A}$. С помощью (1.2) легко проверяется равенство

$$\widetilde{F}_{(\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \ldots, \delta_{x_n})} = \delta_{F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

С учетом указанного выше отождествления имеем $\widetilde{F}|_X = F$, тем более $F \subseteq \widetilde{F}$. Докажем включение $\omega_i \subseteq \widetilde{\omega}_i(C_i)$. Рассмотрим произвольные элементы $a, a' \in A$ такие, что $(a, a') \in \omega_i$. Считая $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ и рассматривая φ и δ_{a_k} как m-компонентные векторы, имеем

$$(\varphi, \delta_{a_k}) = \varphi(a_k). \tag{1.4}$$

Так как всякое отображение $\varphi \in C_i$ изотонно относительно порядка ω_i, при произвольном $\varphi \in C_i$ получим

$$a \overset{\omega_i}{\leq} a' \;\Rightarrow\; \varphi(a) \leq \varphi(a') \overset{(1.4)}{\Leftrightarrow} (\varphi, \delta_a) \leq (\varphi, \delta_{a'}) \overset{\text{в силу } (1.3)}{\Leftrightarrow} \delta_a \overset{\widetilde{\omega}_i(C_i)}{\leq} \delta_{a'}.$$

С учетом указанного отождествления получим $\omega_i \subseteq \widetilde{\omega}_i(C_i)$. Таким образом, игра $\widetilde{G}$ является расширением игры G. □

Лемма 1.2. *Игра* G *является подыгрой игры* $\widetilde{G}[C_1, C_2, \ldots, C_n]$ *тогда и только тогда, когда конусы* $(C_i)_{i \in I}$ *аппроксимирующие.*

Доказательство. Игра G будет подыгрой игры $\widetilde{G}[C_1, C_2, \ldots, C_n]$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{\omega}_i(C_i)|_A = \omega_i$. Поскольку согласно лемме 1.1 $\omega_i \subseteq \widetilde{\omega}_i(C_i)$, то $\omega_i \subseteq \widetilde{\omega}_i(C_i) \cap A^2 = \widetilde{\omega}_i(C_i)|_A$. Обратное включение $\widetilde{\omega}_i|_A \subseteq \omega_i$ сводится к импликации

$$(\delta_a, \delta_{a'}) \in \widetilde{\omega}_i(C_i) \;\Rightarrow\; (a, a') \in \omega_i.$$

По построению продолжения $\widetilde{\omega}_i(C_i)$ и с учетом (1.4) условие $(\delta_a, \delta_{a'}) \in \widetilde{\omega}_i(C_i)$ эквивалентно условию $\varphi(a) \leq \varphi(a')$ при произвольном $\varphi \in C_i$. Таким образом, игра G будет подыгрой игры $\widetilde{G}[C_1, C_2, \ldots, C_n]$ тогда и только тогда, когда условие $\varphi(a) \leq \varphi(a')$ $\forall \varphi \in C_i$ влечет $a \overset{\omega_i}{\leq} a'$, а это есть определение аппроксимируемости отношения порядка ω_i конусом C_i. □

Лемма 1.3. *Если конусы* $(C_i)_{i \in I}$ *телесные, то игра* $\widetilde{G}[C_1, C_2, \ldots, C_n]$ *является игрой с упорядоченными исходами.*

Доказательство. В общем случае игра $\widetilde{G}[C_1, C_2, \ldots, C_n]$ является игрой с квазиупорядоченными исходами. Покажем, что в нашем случае отношения квазипорядка $\widetilde{\omega}_i(C_i)$ будут антисимметричными, т. е. они будут отношениями порядка. Надо проверить выполнимость импликации

$$\mu \overset{\widetilde{\omega}_i(C_i)}{\leq} \nu, \quad \nu \overset{\widetilde{\omega}_i(C_i)}{\leq} \mu \;\Rightarrow\; \mu = \nu. \tag{1.5}$$

В силу (1.3) условие импликации (1.5) сводится к тому, что

$$(\varphi, \mu - \nu) = 0 \;\; \forall \varphi \in C_i. \tag{1.6}$$

Так как конус C_i телесный, то существует $m = |A|$ линейно независимых векторов $p^1, p^2, \ldots, p^m \in C_i$. С учетом (1.6) для любого $l = 1, 2, \ldots, m$ выполняется

$$(p^l, \mu - \nu) = 0.$$

Таким образом, координаты вектора $\mu - \nu$ удовлетворяют однородной системе m линейных уравнений с m неизвестными. В силу линейной независимости векторов $p^1, p^2, \dots, p^m$ определитель этой системы отличен от нуля, следовательно, система имеет только тривиальное решение $\mu - \nu = \mathbf{0}$, т. е. $\mu = \nu$. $\square$

Замечание. До сих пор мы не использовали условие существования для каждого C_i ненулевого вектора с одинаковыми компонентами. При выполнении этого условия верно утверждение, обратное лемме 1.3.

Обратное утверждение. *Если $\widetilde{\omega}_i(C_i)$ — отношение порядка и C_i содержит ненулевой вектор с одинаковыми компонентами, то конус C_i телесный.*

Доказательство. Предположим, что $\dim C_i = r < m = |A|$, тогда максимальная линейно независимая подсистема в C_i содержит r векторов. Пусть $q^1, q^2, \dots, q^r$ — максимальная линейно независимая система векторов в C_i. Составим систему r уравнений относительно $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$

$$(q^j, y) = 0, \quad j = 1, \dots, r. \tag{1.7}$$

Так как ранг матрицы системы (1.7) равен $r < m$, система имеет нетривиальное решение $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*) \neq \mathbf{0}$. По предположению конус C_i содержит ненулевой вектор с одинаковыми компонентами $\varphi_0 = (k, k, \dots, k) \in C_i$, где $k \neq 0$, причем φ_0 может быть линейно выражен через векторы $q^1, q^2, \dots, q^r : \varphi_0 = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j q^j$. В силу (1.7)

$$(\varphi_0, y^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (q^j, y^*) = 0;$$

с другой стороны, $(\varphi_0, y^*) = ky_1^* + ky_2^* + \dots + ky_m^* = k(y_1^* + y_2^* + \dots + y_m^*)$, следовательно,

$$y_1^* + y_2^* + \dots + y_m^* = 0. \tag{1.8}$$

Зафиксируем вероятностный вектор $u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in \widetilde{A}$, где $0 < u_i < 1$, $\sum\limits_{j=1}^{m} u_j = 1$. Рассмотрим вектор $v = u + \alpha y^*$, причем возьмем $\alpha > 0$ настолько малым, чтобы $0 < v_j < 1$, $j = 1, 2, \dots, m$. В силу (1.8)

$$\sum_{j=1}^{m} v_j = \sum_{j=1}^{m} (u_j + \alpha y_j^*) = \sum_{j=1}^{m} u_j + \alpha \sum_{j=1}^{m} y_j^* = \sum_{j=1}^{m} u_j = 1,$$

таким образом, $v \in \widetilde{A}$.

Так как любой вектор $\varphi \in C_i$ может быть представлен в виде $\varphi = \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j q^j$, то

$$(\varphi, v - u) = (\varphi, \alpha y^*) = \alpha(\varphi, y^*) = \alpha\left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j q^j, y^*\right) = \alpha \sum_{j=1}^{m} \beta_j (q^j, y^*) = 0,$$

откуда $(\varphi, v) = (\varphi, u)$ $\forall \varphi \in C_i$, т. е. $u \overset{\widetilde{\omega}_i(C_i)}{\leq} v$ и $v \overset{\widetilde{\omega}_i(C_i)}{\leq} u$. Так как $y^* \neq \mathbf{0}$, то $u \neq v$. Следовательно, условие антисимметричности для квазипорядка $\widetilde{\omega}_i(C_i)$ не имеет места. Теорема 1.1 доказана.

2. Ситуации равновесия по Нэшу в игре $\widetilde{G}[C_1, C_2, \dots, C_n]$

Рассмотрим игру $\widetilde{G}[C_1, C_2, \dots, C_n]$, являющуюся смешанным расширением игры с упорядоченными исходами G с помощью конусов $[C_1, C_2, \dots, C_n]$. Установим некоторые общие свойства игры $\widetilde{G}[C_1, C_2, \dots, C_n]$.

Для $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \prod\limits_{i \in I} \widetilde{X}_i$ через $\mu \| \mu_i^*$ обозначим ситуацию, полученную заменой стратегии μ_i на стратегию μ_i^*.

Определение 2.1. Ситуация $\mu^* = (\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_n^*) \in \prod\limits_{i \in I} \widetilde{X}_i$ называется ситуацией равновесия по Нэшу в игре $\widetilde{G}[C_1, C_2, \dots, C_n]$, если для всех $\mu_i \in \widetilde{X}_i$, $i \in I$, выполняется

$$\widetilde{F}_{(\mu^* \| \mu_i)} \overset{\widetilde{\omega}_i(C_i)}{\leq} \widetilde{F}_{\mu^*}. \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. *Пусть C_i при каждом $i \in I$ — аппроксимирующий конус изотонных отображений упорядоченного множества $\langle A, \omega_i \rangle$ в R. Для того чтобы ситуация $\mu^* = (\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_n^*) \in \prod\limits_{i \in I} \widetilde{X}_i$ была ситуацией равновесия по Нэшу в игре $\widetilde{G}[C_1, C_2, \dots, C_n]$, необходимо и достаточно, чтобы неравенства* (2.1) *выполнялись при чистых отклонениях игроков, т. е. при всех $x_i \in X_i$, $i \in I$, имело место*

$$\widetilde{F}_{(\mu^* \| \delta_{x_i})} \overset{\widetilde{\omega}_i(C_i)}{\leq} \widetilde{F}_{\mu^*}. \tag{2.2}$$

Доказательство теоремы основано на следующих двух несложных леммах, доказательство которых опускаем.

Лемма 2.1. *Функция реализации $\widetilde{F}$ линейна, т. е. для $\sum\limits_{l=1}^{k} \alpha_l = 1$, $\mu_i^1, \dots, \mu_i^k \in \widetilde{X}_i$ при каждом $i \in I$ и любых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \geq 0$ выполняется*

$$\widetilde{F}_{\left(\mu \middle\| \sum\limits_{l=1}^{k} \alpha_l \mu_i^l\right)} = \sum_{l=1}^{k} \alpha_l \widetilde{F}_{(\mu \| \mu_i^l)}.$$

Следствие (разложение функции реализации по чистым стратегиям). Для функции реализации $\widetilde{F}$ справедливо разложение

$$\widetilde{F}_{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)} = \sum_{x_i \in X_i} \mu_i(x_i) \widetilde{F}_{(\mu \| \delta_{x_i})}. \tag{2.3}$$

Доказательство непосредственно вытекает из леммы 2.1 с учетом равенства

$$\mu_i = \sum_{x_i \in X_i} \mu_i(x_i) \delta_{x_i}.$$

Лемма 2.2 (свойство стабильности отношения порядка $\widetilde{\omega}(C)$ относительно операции смешивания). *Пусть C — некоторый конус в линейном пространстве R^A, состоящий из изотонных отображений упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ в R, $\widetilde{\omega}(C)$ — продолжение порядка ω на A, определяемое* (1.3), *и $\alpha_l \geq 0$, $\sum\limits_{l=1}^{k} \alpha_l = 1$. Тогда из условий*

$$\mu_i \overset{\widetilde{\omega}(C)}{\leq} \nu_i, \quad i = 1, \dots, k, \tag{2.4}$$

следует

$$\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2 + \dots + \alpha_k \mu_k \overset{\widetilde{\omega}(C)}{\leq} \alpha_1 \nu_1 + \alpha_2 \nu_2 + \dots + \alpha_k \nu_k. \tag{2.5}$$

Доказательство теоремы 2.1. Необходимость очевидна, т. к. чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии.

Достаточность. Покажем, что выполнение неравенств (2.2) влечет выполнение (2.1). Рассмотрим смешанную стратегию $\mu_i \in \widetilde{X}_i$. Умножая обе части (2.2) на $\mu_i(x_i)$ и суммируя по $x_i \in X_i$, по лемме 2.2 получим

$$\sum_{x_i \in X_i} \mu_i(x_i) \widetilde{F}_{(\mu^* \| \delta_{x_i})} \overset{\widetilde{\omega}_i(C_i)}{\leq} \sum_{x_i \in X_i} \mu_i(x_i) \widetilde{F}_{\mu^*}.$$

Используя разложение функции реализации по чистым стратегиям (2.3), имеем

$$\sum_{x_i \in X_i} \mu_i(x_i) \widetilde{F}_{(\mu^* \| \delta_{x_i})} = \widetilde{F}_{(\mu^* \| \mu_i)}.$$

Так как $\sum\limits_{x_i \in X_i} \mu_i(x_i) \widetilde{F}_{\mu^*} = \widetilde{F}_{\mu^*} \sum\limits_{x_i \in X_i} \mu_i(x_i) = \widetilde{F}_{\mu^*}$, то в итоге получим $\widetilde{F}_{(\mu^* \| \mu_i)} \overset{\widetilde{\omega}_i(C_i)}{\leq} \widetilde{F}_{\mu^*}$. $\square$

Следствие. В предположениях теоремы 2.1 произвольная ситуация в чистых стратегиях будет ситуацией равновесия по Нэшу в игре $\widetilde{G}[C_1, C_2, \ldots, C_n]$ тогда и только тогда, когда она является ситуацией равновесия по Нэшу в игре G.

Через $\operatorname{Sp} \mu_i = \{x_i : \mu_i(x_i) > 0\}$ обозначим спектр вероятностной меры μ_i.

Теорема 2.1 может быть уточнена в отношении свойств системы спектров ситуации равновесия по Нэшу следующим образом.

Теорема 2.2 (правило дополняющей нежесткости). *Пусть C_i при каждом $i \in I$ — аппроксимирующий телесный конус изотонных отображений упорядоченного множества $\langle A, \omega_i \rangle$ в R. Для того чтобы ситуация $\mu^* \in \prod\limits_{i \in I} \widetilde{X}_i$ была ситуацией равновесия по Нэшу в игре $\widetilde{G}[C_1, C_2, \ldots, C_n]$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $i \in I$ выполнялись условия*

$$\begin{aligned} &1) \;\; \widetilde{F}_{(\mu^* \| \delta_{x'_i})} = \widetilde{F}_{\mu^*} \qquad \forall x'_i \in \operatorname{Sp} \mu^*_i; \\ &2) \;\; \widetilde{F}_{(\mu^* \| \delta_{x''_i})} \overset{\widetilde{\omega}_i(C_i)}{\leq} \widetilde{F}_{\mu^*} \quad \forall x''_i \notin \operatorname{Sp} \mu^*_i. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Доказательство. Достаточность. Условия (2.6) есть частный случай условий (2.2). По теореме 2.1 μ^* — ситуация равновесия по Нэшу в игре $\widetilde{G}[C_1, C_2, \ldots, C_n]$. Доказательство необходимости основано на следующей лемме.

Лемма 2.3 (уточненное свойство стабильности). *Пусть C — некоторый конус в линейном пространстве R^A, состоящий из изотонных отображений упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ в R, $\widetilde{\omega}(C)$ — продолжение порядка ω на $\widetilde{A}$, определяемое* (1.3), *$\alpha_l > 0$, $\sum\limits_{l=1}^{k} \alpha_l = 1$. Тогда из условий*

$$\begin{cases} \mu_i \overset{\widetilde{\omega}(C)}{<} \nu_i, \quad i = 1, \ldots, k-1, \\ \mu_k \overset{\widetilde{\omega}(C)}{\leq} \nu_k \end{cases}$$

следует

$$\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2 + \cdots + \alpha_k \mu_k \overset{\widetilde{\omega}(C)}{<} \alpha_1 \nu_1 + \alpha_2 \nu_2 + \cdots + \alpha_k \nu_k. \tag{2.7}$$

Докажем **необходимость** в теореме 2.2. Пусть μ^* — ситуация равновесия по Нэшу. Тогда по теореме 2.1 выполняются неравенства (2.2). Для доказательства теоремы осталось показать, что для любого $i \in I$ для чистых стратегий, принадлежащих спектру μ_i^*, неравенства (2.2) обращаются в равенства. Предположим противное, т. е. что для некоторого $x_i' \in \operatorname{Sp}\mu_i^*$ имеет место $\widetilde{F}_{(\mu^*\|\delta_{x_i'})} \neq \widetilde{F}_{\mu}^*$. Так как по лемме 1.3 $\widetilde{\omega}(C_i)$ — отношение порядка, то выполняется строгое неравенство

$$\widetilde{F}_{(\mu^*\|\delta_{x_i'})} \overset{\widetilde{\omega}_i(C_i)}{<} \widetilde{F}_{\mu^*}.$$

Таким образом, система (2.2) содержит строгое неравенство. Умножая каждое неравенство системы (2.2) на $\mu_i^*(x_i) > 0$, где $x_i \in \operatorname{Sp}\mu_i^*$, и суммируя по $x_i \in \operatorname{Sp}\mu_i^*$, по лемме 2.3 получаем

$$\sum_{x_i \in \operatorname{Sp}\mu_i} \mu_i^*(x_i)\widetilde{F}_{(\mu^*\|\delta_{x_i})} \overset{\widetilde{\omega}_i(C_i)}{<} \sum_{x_i \in \operatorname{Sp}\mu_i} \mu_i^*(x_i)\widetilde{F}_{\mu^*}. \tag{2.8}$$

Рассмотрим левую часть (2.8)

$$\sum_{x_i \in \operatorname{Sp}\mu_i^*} \mu_i^*(x_i)\widetilde{F}_{(\mu^*\|\delta_{x_i})} = \sum_{x_i \in \operatorname{Sp}\mu_i^*} \mu_i^*(x_i)\widetilde{F}_{(\mu^*\|\delta_{x_i})} + \sum_{x_i \notin \operatorname{Sp}\mu_i^*} \mu_i^*(x_i)\widetilde{F}_{(\mu^*\|\delta_{x_i})} =$$

$$= \sum_{x_i \in X_i} \mu_i^*(x_i)\widetilde{F}_{(\mu^*\|\delta_{x_i})} \overset{(2.4)}{=} \widetilde{F}_{(\mu^*)}.$$

Поскольку правая часть (2.8) есть $\widetilde{F}_{\mu^*}$, то в итоге из (2.8) получим $\widetilde{F}_{(\mu^*)} < \widetilde{F}_{\mu^*}$ — противоречие.

Таким образом, при чистых отклонениях игрока i в пределах спектра стратегии μ_i^* выполняются неравенства (2.7). □

3. Ситуации равновесия и сбалансированные покрытия в играх с упорядоченными исходами

Для игры двух лиц с упорядоченными исходами условие вполне равновесности ситуации в смешанном расширении сводится к условию сбалансированности матрицы ее исходов, которое в свою очередь эквивалентно коллинеарной сбалансированности некоторых покрытий множеств стратегий игроков [3]. Здесь мы обобщаем этот результат на игры n лиц, причем к условию коллинеарности добавляется еще одно дополнительное условие, которое в случае игры двух лиц выполняется автоматически.

Определение 3.1. Матрица $\|F(x)\|_{x\in X}$ исходов игры G вида (1.1) называется *сбалансированной*, если существует такая ситуация $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \in \prod_{i\in I} \widetilde{X}_i$ с положительными компонентами, что при произвольном $a \in A$ и любых $x_{i_1} \in X_{i_1}$, $x_{i_2} \in X_{i_2}$, $i_1, i_2 \in I$, выполняется

$$\widetilde{F}_{(\mu\|\delta_{x_{i_1}})}(a) = \widetilde{F}_{(\mu\|\delta_{x_{i_2}})}(a).$$

При этом набор векторов $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ называется *балансовым набором* данной матрицы.

Определение 3.2. Пусть E — произвольное множество. Покрытие $(E_1, E_2, \ldots, E_k)$ множества E называется *сбалансированным*, если существует такой вектор $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ с положительными компонентами, что для любого $e \in E$ имеет место $\sum_{E_s \ni e} \lambda_s = 1$. Вектор λ называется *репрезентативным вектором* данного покрытия.

Для каждого игрока $i \in I$ положим $X^i = \prod_{j\in I\setminus i} X_j$ — *множество наборов стратегий* всех остальных игроков. Так как пара $(x_i, y) \in X_i \times X^i$ определяет единственную ситуацию в игре G, функция реализации F может быть представлена в виде $F(x_i, y)$. Для произвольных $a \in A$,

$i \in I$, $y \in X^i$ рассмотрим семейство *характеристических* множеств $(S_y^a)_{y\in X^i}$, где подмножество $S_y^a \subseteq X_i$ определено следующим образом:

$$x_i \in S_y^a \;\Leftrightarrow\; F(x_i, y) = a.$$

Теорема 3.1. *Для того чтобы матрица $\|F(x)\|_{x\in X}$ исходов игры G была сбалансированной необходимо и достаточно, чтобы при любых $a \in A$, $i \in I$ семейство множеств $(S_y^a)_{y\in X^i}$ было сбалансированным покрытием множества X_i, имеющим репрезентативный вектор $(\lambda_y^a)_{y\in X^i}$, удовлетворяющий следующим условиям*:

1) *при любых $a, a' \in A$ отношение $\frac{\lambda_y^a}{\lambda_y^{a'}}$ есть константа по $y \in X^i$;*

2) *при любых $a \in A$, $i \in I$, $i_0 \in I \setminus i$, $y', y'' \in X^i$ отношение $\frac{\lambda^a_{y'\|x_{i_0}}}{\lambda^a_{y''\|x_{i_0}}}$ есть константа по $x_{i_0} \in X_{i_0}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ — балансовый набор для заданной матрицы. Положим $\gamma(a) = \widetilde{F}_{(\mu\|\delta_{x_1})}(a) = \widetilde{F}_{(\mu\|\delta_{x_2})}(a) = \cdots = \widetilde{F}_{(\mu\|\delta_{x_n})}(a)$. При фиксированных $a \in A$, $i \in I$ для любого $y = (x_j)_{j\in I\setminus i} \in X^i$ определим

$$\lambda_y^a = \frac{\prod\limits_{j\in I\setminus i} \mu_j(x_j)}{\gamma(a)} > 0.$$

Покажем, что вектор $(\lambda_y^a)_{y\in X^i}$ является репрезентативным вектором сбалансированного покрытия $(S_y^a)_{y\in X^i}$. Действительно, при произвольных фиксированных $x_i \in X_i$, $i \in I$, имеем

$$\sum_{S_y^a \ni x_i} \lambda_y^a = \sum_{\substack{F(x_i,y)=a\\ y\in X^i}} \lambda_y^a = \sum_{\substack{F(x_i,y)=a\\ y\in X^i}} \frac{\prod\limits_{j\in I\setminus i}\mu_j(x_j)}{\gamma(a)} = \frac{1}{\gamma(a)} \sum_{\substack{F(x_i,y)=a\\ y\in X^i}} \prod_{j\in I\setminus i} \mu_j(x_j) = \frac{1}{\gamma(a)} \widetilde{F}_{(\mu\|\delta_{x_i})}(a) = 1.$$

Далее проверим выполнение условий 1) и 2).

1) При любых $a, a' \in A$ отношение $\frac{\lambda_y^a}{\lambda_y^{a'}} = \frac{\gamma(a')}{\gamma(a)}$ — константа по $y \in X^i$.

2) При любых $a \in A$, $i \in I$, $i_0 \in I \setminus i$, $y' = (x'_j)_{j\in I\setminus i}$, $y'' = (x''_j)_{j\in I\setminus i}$ имеем

$$\frac{\lambda^a_{y'\|x_{i_0}}}{\lambda^a_{y''\|x_{i_0}}} = \frac{\prod\limits_{j\in I\setminus\{i,i_0\}} \mu_j(x'_j)\mu_{i_0}(x_{i_0})}{\gamma(a)} : \frac{\prod\limits_{j\in I\setminus\{i,i_0\}} \mu_j(x''_j)\mu_{i_0}(x_{i_0})}{\gamma(a)} = \frac{\prod\limits_{j\in I\setminus\{i,i_0\}} \mu_j(x'_j)}{\prod\limits_{j\in I\setminus\{i,i_0\}} \mu_j(x''_j)}$$

не зависит от выбора $x_{i_0} \in X_{i_0}$, т. е. является константой по $x_{i_0} \in X_{i_0}$. Необходимость доказана.

Достаточность. Зафиксируем $j \in I$. Для каждого $x_j \in X_j$ определим $\mu_j(x_j)$ следующим образом. Возьмем $i \neq j$, $a' \in A$. Выберем $y' \in X^i$, для которого $y'_j = x_j$, тогда $y' = y'\|x_j$. Положим

$$\sigma_j(x_j) = (\lambda^{a'}_{y'\|x_j})^{1/(n-1)}, \quad \mu_j(x_j) = \frac{\sigma_j(x_j)}{\sum\limits_{x_j^*\in X_j} \sigma_j(x_j^*)}.$$

Корректность определения величин $\mu_j(x_j)$, т. е. их независимость от выбора $a' \in A$ и $y' \in X^i$ следует из условий 1) и 2) теоремы. Ясно, что вектор $(\mu_j(x_j))_{x_j\in X_j}$ является вероятностным вектором над X_j, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Проверим, что построенный набор $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ является балансовым набором для матрицы $\|F(x)\|_{x\in X}$. Действительно, при любых $x_i \in X_i$, $i \in I$, $a \in A$ имеем

$$\widetilde{F}_{(\mu\|\delta_{x_i})}(a) = \sum_{\substack{F(x_i,y)=a\\ y\in X^i}} \prod_{j\in I\setminus i} \mu_j(x_j) = \sum_{\substack{F(x_i,y)=a\\ y\in X^i}} \prod_{j\in I\setminus i} \frac{\sigma_j(x_j)}{\sum\limits_{x_j^*\in X_j}\sigma_j(x_j^*)} = \sum_{\substack{F(x_i,y)=a\\ y\in X^i}} \prod_{j\in I\setminus i} \frac{(\lambda^{a'}_{y'\|x_j})^{1/(n-1)}}{\sum\limits_{x_j^*\in X_j} (\lambda^{a'}_{y'\|x_j^*})^{1/(n-1)}}.$$

Так как $\mu_j(x_j)$ не зависят от выбора $a' \in A$, положим $a' = a$. Выбор вектора y' по построению зависит от x_j; в нашем случае при всех $j \in I \setminus i$ можно взять единый вектор $y' = y = (x_j)_{j \in J}$. Обозначим $\rho^i(a) = \prod\limits_{j \in I \setminus i} \sum\limits_{x_j^* \in X_j} (\lambda^a_{y \| x_j^*})^{1/(n-1)}$. Имеем

$$\widetilde{F}_{(\mu \| \delta_{x_i})}(a) = \sum_{\substack{F(x_i, y) = a \\ y \in X^i}} \frac{1}{\rho^i(a)} \prod_{j \in I \setminus i} (\lambda^a_{y \| x_j})^{1/(n-1)} = \frac{1}{\rho^i(a)} \sum_{\substack{S^a_y \ni x_i \\ y \in X^i}} \lambda^a_{y \| x_j} = \frac{1}{\rho^i(a)}. \tag{3.1}$$

Показали, что $\widetilde{F}_{(\mu \| \delta_{x_i})}(a)$ не зависит от $x_i \in X_i$ при любом $i \in I$. Используя разложение функции реализации по чистым стратегиям (лемма 2.1) и (3.1), получим

$$\widetilde{F}_{(\mu)}(a) = \sum_{x_i \in X_i} \mu_i(x_i) \widetilde{F}_{(\mu \| \delta_{x_i})}(a) = \frac{1}{\rho^i(a)} \widetilde{F}_{(\mu \| \delta_{x_i})}(a).$$

Последнее равенство означает, что матрица $\|F(x)\|_{x \in X}$ является сбалансированной, а набор $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ является ее балансовым набором. $\square$

Следствие. Для того чтобы игра $\widetilde{G}[C_1, C_2, \ldots, C_n]$ имела ситуацию вполне равновесия в смысле Нэша, необходимо и достаточно, чтобы матрица исходов игры G удовлетворяла условиям теоремы 3.1.

Таким образом, в условиях теоремы 2.1 существование ситуации вполне равновесия по Нэшу в коническом расширении игры G определяется исключительно функцией реализации игры G.

Литература

1. Розен В.В. *Описание ситуаций равновесия в играх с упорядоченными исходами* // Математика, механика, кибернетика. – Саратов: Изд-во СГУ, 1999. – С. 128–131.
2. Сердюкова Ю.Н. *Ситуации равновесия по Нэшу с заданными спектрами* // Математика, механика, кибернетика. – Саратов: Изд-во СГУ, 1999. – С. 137–139.
3. Розен В.В., Панкратова Ю.Н. *Ситуации равновесия и сбалансированные покрытия в играх с упорядоченными исходами* // Математика, механика, кибернетика. – Саратов: Изд-во СГУ, 2000. – С. 105–108.
4. Бондарева О.Н. *Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр* // Пробл. кибернетики. – 1963. – № 10. – С. 119–139.

Саратовский государственный университет

Поступила
02.07.2001