ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 8 (435)

УДК 512.5

С.П. МИЩЕНКО

ОДНО ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ НИЛЬПОТЕНТНОСТИ КОММУТАНТА АЛГЕБРЫ ЛИ

В изложении будем следовать монографии [1], в которой можно найти все необъясняемые понятия, с одним лишь отличием, связанным с неизменной привычкой автора опускать скобки в случае их левонормированной расстановки, т. е. $xyz = ((xy)z)$.

Характеристика основного поля на протяжении всей работы предполагается нулевой. Как обычно, обозначим $\mathbf{A}$ — многообразие абелевых алгебр Ли, $\mathbf{N}_c$ — многообразие нильпотентных алгебр ступени нильпотентности не выше c. Тогда $\mathbf{N}_c\mathbf{A}$ — многообразие алгебр Ли, коммутанты которых нильпотентны ступени не выше c. Последнее многообразие определяется тождеством

$$(x_0y_0)(x_1y_1)(x_2y_2)\cdots(x_cy_c) = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим два тождества, которые при $m \geq c$ являются следствиями тождества (1)

$$(x_0y_0)(xy)^m = 0, \tag{2}$$

$$\sum_{p\in S_m,\, q\in S_m} (-1)^p(-1)^q(x_0y_0)(x_{p(1)}y_{q(1)})(x_{p(2)}y_{q(2)})\cdots(x_{p(m)}y_{q(m)}) = 0. \tag{3}$$

В данной статье исследуется вопрос следования тождества (1) из тождеств (2) и (3). Отметим, что каждое по отдельности как тождество (2), так и тождество (3), не влечет нильпотентности коммутанта даже при малых значениях m, дополнительном условии разрешимости ступени 3 и сильном условии на рост многообразия.

Например, в полном списке разрешимых многообразий почти полиномиального роста $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$, $\mathbf{V}_4$ (см. § 5 обзора [2]) нильпотентный коммутант имеют лишь алгебры многообразия $\mathbf{V}_1 = \mathbf{N}_c\mathbf{A}$, в то время как в многообразии $\mathbf{V}_2$ выполняется тождество (2) при $m \geq 3$, а в многообразиях $\mathbf{V}_3$, $\mathbf{V}_4$ выполняются тождества (3) при $m \geq 5$.

Несложно понять, что эти два тождества вместе слабее условия энгелевости индекса m для коммутанта. Основным результатом работы является доказательство нильпотентности коммутанта при условии выполнения данных тождеств и экспоненциальности роста многообразия (§ 2). Вопрос о возможности снятия условия на рост многообразия остается открытым и, вероятно, сложным. В § 1 изложено доказательство одного комбинаторного результата, который является неассоциативным аналогом знаменитой леммы Ширшова. По своей идеологии данная работа созвучна работе автора [3].

1. Лемма Ширшова в случае неассоциативных алгебр

В теории многообразий ассоциативных алгебр широко известна теорема А.И. Ширшова о высоте. При ее доказательстве ключевую роль играет комбинаторная лемма (см., напр., [4], с. 120), которая, как показал А. Чанышев [5], неверна в случае лиевских слов ассоциативной оболочки. В этом параграфе предложен вариант аналогичной леммы для неассоциативного случая.

Работа частично поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований 96-01-00146 и 98-01-01020.

Рассмотрим линейную алгебру B неассоциативных слов от упорядоченного по возрастанию алфавита $z_1, z_1, \ldots, z_k$. Пусть для любых слов a, b, c существуют такие числа α, β, что выполняется соотношение

$$a(bc) = \alpha abc + \beta acb. \tag{4}$$

Пример 1. Любая ассоциативная алгебра. В этом случае коэффициенты соотношений (4) не зависят от слов a, b, c и равны соответственно 1 и 0.

Пример 2. Любая алгебра Ли. Коэффициенты равны соответственно 1 и -1.

Пример 3. Любая супералгебра Ли. В этом случае коэффициенты зависят от слов a, b, c. Так, если $b = c = y$, где y — четная образующая, то $\alpha = 1$, $\beta = -1$. Если же y — нечетная образующая, то $\alpha = \beta = 1$.

Введем лексикографический порядок на множестве левонормированных слов. Будем считать, что $a < b$, если $a = b\, z_{i_1} \cdots z_{i_k}$ или $a = c\, z_i z_{i_1} \cdots z_{i_s}$, $b = c\, z_j z_{j_1} \cdots z_{j_r}$ и $z_i < z_j$.

Легко доказать, что любой элемент v алгебры B является линейной комбинацией левонормированных слов. Обозначим через v_0 старшее среди них левонормированное слово.

Определение. Левонормированное слово называется n-разреженно разбиваемым, если по модулю слов, меньших лексикографически, оно равно слову вида

$$aa_1 b_{11} \cdots b_{1k_1} a_2 b_{21} \cdots b_{2k_2} a_3 \cdots a_n b_{n1} \cdots b_{nk_n}, \tag{5}$$

в котором любая перестановка подслов $a_1, \ldots, a_n$ приводит к слову, являющемуся линейной комбинацией меньших левонормированных слов.

Лемма 1. *Для любых трех натуральных чисел k, s, n найдется такое натуральное число $N(k, s, n)$, что любой элемент v алгебры B, для которого v_0 имеет длину бо́льшую, чем $N(k, s, n)$, по модулю левонормированных слов, меньших слова v_0, равен n-разреженно разбиваемому слову или слову, имеющему подслово вида ab^s.*

Доказательство. Будем следовать [4] (с. 120–123). Базой индукции по n является существование чисел $N(k, s, 1)$ для любых k и s. Допустим, что число $N(k, s, n-1)$ существует для любых k и s. Число $N(1, s, n)$ также существует. Это является основанием для дальнейшей индукции по k. Итак, пусть число $N(k-1, s, n)$ существует, докажем существование числа $N(k, s, n)$.

Слово длины

$$(s + N(k-1, s, n))(N(k^{N(k-1,s,n)+s}, s, n-1) + 1)$$

представим в виде линейной комбинации левонормированных слов и рассмотрим самое большое в смысле порядка слагаемое. Если в начале слова стоит некоторое количество символов z_i, отличных от символа z_k, и их количество не меньше числа $N(k-1, s, n)$, то выполняется предположение индукции по отношению к подслову, зависящему от меньшего числа букв. Понятно, что в конце слова может быть не больше s символов z_k. Таким образом, в середине выбранного левонормированного слова стоит не менее

$$(s + N(k-1, s, n))N(k^{N(k-1,s,n)+s}, s, n-1)$$

букв, причем первая из них z_k, а последняя отлична от z_k.

Каждый фрагмент вида $z_k \cdots z_k z_{i_1} \cdots z_{i_r}$, за которым следует буква z_k, не может иметь длину бо́льшую, чем $(s + N(k-1, s, n))$. Иначе, либо она больше s подряд стоящих символов z_k, либо применимо предположение индукции для $(k-1)$ образующих. Каждый такой фрагмент в силу соотношений (4) можно по модулю меньших слов заменить элементом алгебры, навесив соответствующим образом скобки (сначала для правого символа z_k и всех следующих за ним левонормированным образом, а остальные символы z_k присоединяем, расставляя скобки правонормированным способом). В силу ограничения длины каждого фрагмента получаем не более $k^{N(k-1,s,n)+s}$ различных элементов. Так как длина слова от новых образующих больше

$N(k^{N(k-1,s,n)+s}, s, n-1)$, то по предположению индукции получаем либо s подряд стоящих подслов, либо $(n-1)$-разреженную разбиваемость. В последнем случае берем символ z_i $(i < k)$ из самого правого фрагмента в качестве подслова a_n в n-разреженной разбиваемости (5). $\square$

2. Формулировка и доказательство основного результата

Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие, в котором выполнены тождества (2) и (3) при некотором m. Через $c_n(\mathbf{V})$ обозначена размерность полилинейной части степени n относительно свободной алгебры многообразия.

Теорема. *Пусть $\mathbf{V}$ — такое многообразие алгебр Ли над полем нулевой характеристики, что в нем выполнены тождества (2), (3) и существуют числа a, b, для которых выполняются неравенства*

$$c_n(\mathbf{V}) \leq ba^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Тогда алгебры многообразия $\mathbf{V}$ имеют нильпотентный коммутант, т. е. существует такое число c, что выполнено включение $\mathbf{V} \subset \mathbf{N}_c\mathbf{A}$.

Заметим, что этот результат был получен автором давно [6]. Но доказательство, которое в то время можно было предложить, было неоправданно громоздким. В настоящее время техника в данной тематике усовершенствовалась, что позволило решиться выполнить свой долг — опубликовать доказательство анонсированного десять лет назад результата.

Для доказательства потребуются две леммы.

Лемма 2. *Для любого C существует такое число k, что в многообразии $\mathbf{V}$ выполнены тождества вида*

$$\sum_{q \in S_{k^2}} a_q x_0 A_1 y_{12}^{\beta_1} x_{q(1)} y_{21}^{\alpha_2} A_2 y_{22}^{\beta_2} \cdots x_{q(k^2-1)} y_{k^2 1}^{\alpha_{k^2}} A_{k^2} y_{k^2 2}^{\beta_{k^2}} x_{q(k^2)}, \tag{6}$$

где A_i — произвольные ассоциативные слова от внутренних дифференцирований длины не больше C, числа α_i, β_i, $i = 1, 2, \ldots, k^2$, равны 1 или 0, а элемент

$$\sum_{q \in S_{k^2}} a_q x_0 x_{q(1)} x_{q(2)} \cdots x_{q(k^2)} \tag{7}$$

построен по квадратной диаграмме размером $k \times k$.

Доказательство. Пусть U_d — неприводимый модуль, построенный по квадратной диаграмме размером $k \times k$. Несложный анализ формулы крюков показывает, что для любых чисел a и b существует такая нижняя граница для числа k, начиная с которой выполняются неравенства

$$\dim U_d \geq b(a^C)^{k^2}.$$

Модуль M симметрической группы S_n, порожденный элементом (6), является фактор-модулем индуцированного с S_{k^2}-модуля, порожденного элементом (7). Поэтому диаграмма, соответствующая любому неприводимому подмодулю U модуля M, содержит диаграмму d. В силу неравенства на степень элемента (6) $n \leq (C+3)k^2$, которое следует из условия леммы, получаем цепочку неравенств

$$\dim U \geq \dim U_d \geq ba^n.$$

Таким образом, из соображений размерности видим, что в многообразии $\mathbf{V}$ выполнены тождества типа (6). $\square$

Лемма 3. *В многообразии $\mathbf{V}$ выполнены тождества типа (6) без ограничений на длины слов A_i, но при условии, что вместо букв в них подставлены коммутаторы переменных.*

Доказательство. Возьмем $C = (4m^2 + 2m)^2$. Из леммы 2 следует, что существует такое k, при котором тождество (6) выполняется в многообразии $\mathbf{V}$, если длины слов A_i меньше C. Будем вести доказательство леммы от противного.

Пусть элемент вида (6) является минимальным по степени среди не равных тождественно нулю. Тогда одно из слов имеет длину больше, чем $(4m^2 + 2m)^2$, а коммутаторы слов в силу минимальности перестановочны. Подействуем на переменные коммутаторов этого слова идемпотентом, построенным по некоторой диаграмме. В ней либо одна из строк, либо один из столбцов имеет длину больше, чем $(4m^2 + 2m)^2$. Поэтому можно считать, что в коммутаторы входит такое число симметричных либо кососимметричных переменных (см. по этому поводу работу [7]). Рассмотрим именно те коммутаторы, в которые входят выделенные переменные. Если существует более m коммутаторов, которые содержат по две переменные, то получим равенство элемента нулю в силу тождества (2) или (3) в зависимости от типа переменных. Если же таких коммутаторов меньше, то, следовательно, существует не менее $4m^2$ коммутаторов, в которые входит по одной выделенной переменной. В последнем случае рассмотрим только эти рядом стоящие коммутаторы (коммутаторы в силу предположения о минимальности степени можно переставлять!) и на другие переменные подействуем элементом, построенным по некоторой диаграмме. Аналогичные соображения показывают, что найдется $2m$ симметричных либо кососимметричных переменных. Рассмотрим случай, когда нашлось $2m$ коммутаторов, которые состоят из переменной симметричного набора и переменной кососимметричного набора. В этом случае нуль получается в силу выполнимости стандартного тождества степени $2m + 1$, которое является следствием тождества (3). В остальных случаях "четности" переменных, входящих в коммутаторы, получим нуль в силу тождества (2), когда обе переменные из разных кососимметричных наборов. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. $\square$

Следствие. Коммутанты алгебр из многообразия $\mathbf{V}$ являются API-алгебрами.

Доказательство непосредственно следует из определения API-алгебры и доказанной леммы. В частности, для коммутантов верна теорема о высоте алгебр Ли [8].

Доказательство теоремы. Рассмотрим полилинейную часть относительно свободной алгебры многообразия четной степени n большей, чем число $2N(4k^2, m, k^2)$, существование которого доказано в лемме 1. Уточним, что число k взято из леммы 3, а число m — из тождеств (2) и (3).

Подействуем на индексы переменных элемента (1) степени n идемпотентом, построенным по некоторой диаграмме Юнга. Если диаграмма содержит квадрат размером $k \times k$, где число k взято из леммы 3, то в силу результатов работы [7] рассматриваемый элемент будет равен сумме элементов, в каждом из которых на определенных местах действует идемпотент, построенный по квадратной $(k \times k)$ диаграмме Юнга. Раскрывая коммутаторные скобки коммутаторов, которые содержат выделенные переменные, получаем нуль в силу леммы 3 (именно для этого в тождествах (6) введены переменные y_{ij}).

Таким образом, можно считать, что диаграмма имеет не более k длинных (длины не менее k) строк и не более k длинных столбцов. В этом случае рассматриваемый полилинейный элемент будет равен сумме элементов той же скобочной структуры, что и (1), каждый из которых содержит на определенных местах не более k симметрических наборов переменных и не более k кососимметрических наборов переменных (это следует из упомянутой работы [7]). При этом все переменные входят в один и только один набор. Получим, что множество коммутаторов разбито на не более чем $4k^2$ различных типов. Тип коммутатора определяется принадлежностью его переменных выделенным симметричным или кососимметричным наборам.

Выберем одно из таких слагаемых, которое обозначим v. Заменим однотипные коммутаторы одной буквой из упорядоченного алфавита $z_1, z_2, \dots, z_{4k^2}$, получим левонормированное слово степени не менее $N(4k^2, 2m, k^2)$ алгебры B, о которой шла речь в § 1. Рассмотрим в алгебре B соответствующее этому слову векторное пространство полиоднородных элементов. Построим отображение из этого пространства в относительно свободную алгебру нашего многообразия. Отображение состоит из обратной замены букв $z_1, z_2, \ldots, z_{4k^2}$ на соответствующие коммутаторы от переменных, входящих в выделенные симметрические или кососимметрические наборы. Это линейное отображение векторных пространств является корректно определенным для алгебры B с соответственно подобранными коэффициентами α, β в соотношениях (4). Возможность такого выбора доказывается непосредственными вычислениями.

Дополнительно предположим, что элемент v является наименьшим ненулевым элементом в силу лексикографического порядка, индуцированного порядком левонормированных слов алгебры B. Из леммы 1 получаем две возможности.

1. По модулю меньших слов прообраз элемента v равен k^2-разреженно разбиваемому элементу, который в силу тождества (6) также равен комбинации меньших слов. В этом случае рассматриваемый прообраз является комбинацией меньших слов, которые отображаются в нуль. Таким образом, элемент v равен нулю.
2. По модулю меньших слов прообраз элемента v имеет подслово вида ab^{2m}. В этом случае элемент v будет равен нулю в силу тождеств (2) и (3).

Итак, в обоих случаях получаем противоречие с выбором ненулевого элемента v, которое позволяет сделать вывод, что в многообразии выполнено тождество (1) при $c > N(4k^2, 2m, k^2)$. $\square$

Литература

1. Бахтурин Ю.А. *Тождества в алгебрах Ли.* – М.: Наука, 1985. – 447 с.
2. Мищенко С.П. *Рост многообразий алгебр Ли (обзор)* // УМН. – 1990. – Т. 45. – № 6. – С. 25–45.
3. Мищенко С.П. *К проблеме энгелевости* // Матем. сб. – 1984. – Т. 124. – № 1. – С. 56–67.
4. Жевлаков К.А., Слинько А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И. *Кольца, близкие к ассоциативным.* – М.: Наука, 1978. – 431 с.
5. Чанышев А. *Об асимметричных последовательностях* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ. – 1990. – № 2. – С. 86–88.
6. Мищенко С.П. *О росте многообразий алгебр Ли* // XVIII Всесоюзн. алгебраич. конф. – Кишинев, 1985. – Ч. 2. – С. 37.
7. Мищенко С.П. *Цветные диаграммы Юнга* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ. – 1993. – № 1. – С. 90–91.
8. Мищенко С.П. *Вариант теоремы о высоте для алгебр Ли* // Матем. заметки. – 1990. – Т. 47. – № 4. – С. 83–89.

Ульяновский филиал
Московского государственного
университета

Поступила
05.12.1995