ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 6 (505)

УДК 517.968

И.В. САПРОНОВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА II РОДА С РЕГУЛЯРНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Введение

На целесообразность рассмотрения уравнений Вольтерра с операторными ядрами обратил внимание М.М. Лаврентьев в докладе на Международном конгрессе математиков в Ницце в 1970 году. При этом он отталкивался от обратных задач для дифференциальных уравнений, а также задач интегральной геометрии. Им были получены некоторые теоремы единственности и устойчивости.

Существенное развитие теории линейных интегральных уравнений Вольтерра с особенностями было получено в [1]–[3], причем за основу бралось общее линейное интегральное уравнение Вольтерра III рода

$$g(x)\varphi(x) - \lambda \int_0^x F(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad g(0) = 0, \quad 0 \le x \le \delta,$$

где λ — вещественный параметр. В [1] показано существование однопараметрического семейства решений в случае $g(x) = x$, $\lambda = -1$, в [2] обобщены результаты [1] на систему таких уравнений. Наиболее интересные результаты получены в [3], где рассматривались вопросы разрешимости в специально введенном банаховом пространстве при произвольной функции $g(x) \ge 0$.

Дальнейшее развитие эта теория получила в [4]–[6], где изложены основы теории линейных интегральных уравнений I и III рода. Решения ищутся в банаховых пространствах с весами специального вида.

В последние годы С.Г. Крейном и его учениками исследовались уравнения с вещественными коэффициентами, обладающими конечной гладкостью. При этом уравнения рассматривались как в конечномерных, так и в банаховых пространствах [7]–[10].

Целью данной работы является исследование интегрального уравнения Вольтерра II рода с регулярной особенностью и ядром специального вида в пространстве суммируемых на $[0,T]$ функций со значениями в банаховом пространстве E.

1. Постановка задачи

В вещественном банаховом пространстве E зафиксируем норму $\|\cdot\|_E$. Эта норма индуцирует в пространстве $L(E)$ всех линейных ограниченных операторов на E операторную норму

$$\|A\|_{L(E)} = \sup_{\|x\|_E=1} \|Ax\|_E.$$

В пространстве $C([0,T],e)$ непрерывных в норме E на $[0,T]$ функций со значениями в E норма, как обычно, определяется по формуле

$$\|\Psi\|_{C([0,T],E)} = \max_{0\le x\le T} \|\Psi(x)\|_E.$$

Наконец, в пространстве C, состоящем из всех непрерывных в норме $L(E)$ на треугольнике $0 \le t \le x \le T$ функций со значениями в $L(E)$, вводится норма

$$|\|Q\||_C = \max_{0\le t\le x\le T} \|Q(x,t)\|_{L(E).}$$

Рассматривается интегральное уравнение Вольтерра вида

$$xu(x) = \int_0^x \rho(x,t)K(x,t)u(t)dt \quad (0 \le x \le T) \tag{1}$$

в $L_1([0,T],E)$, где $K(x,t)$ — заданная функция со значениями в $L(E)$, имеющая непрерывные частные производные до порядка $N+1$ включительно, $u(x)$ — искомая суммируемая функция на $[0,T]$ со значениями в E ($u \in L_1([0,T],E)$), $\rho(x,t)$ — такая скалярная положительная однородная нулевой степени функция, что $\varphi(s) = \rho(1,s)$ суммируема на $[0,1]$.

Введем операторный пучок

$$Q_\lambda - I = K(0,0)\int_0^1 \varphi(s)s^{\lambda-1}ds - I. \tag{2}$$

Этот пучок имеет смысл при значениях λ, удовлетворяющих неравенству

$$\int_0^1 \varphi(s)s^{\lambda-1}ds < \infty. \tag{3}$$

Напомним, что если вектор $\mathbf{e}$ является собственным для операторного пучка $B(\lambda)$, отвечающим характеристическому числу λ_0, то векторы $e_1, e_2, \dots, e_q$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} B(\lambda_0)e_1 + B'(\lambda_0)e = 0, \\ B(\lambda_0)e_2 + B'(\lambda_0)e_1 + \frac{B''(\lambda_0)}{2!}e = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ B(\lambda_0)e_q + B'(\lambda_0)e_{q-1} + \dots + \frac{B^{(q)}(\lambda_0)}{q!}e = 0, \end{cases}$$

образуют цепочку присоединенных векторов к собственному вектору $\mathbf{e}$.

Пусть операторный пучок (2) имеет характеристическое число $\lambda = \nu + i\mu$ ($\nu > 0$), которому соответствует собственный вектор $e = e_1 + ie_2$, цепочка присоединенных векторов $e_k = e_1^k + ie_2^k$ ($k = 1, \dots, q$) и выполнено неравенство

$$2|\|K\||_C \int_0^1 \varphi(s)s^{\nu+N}ds < 1. \tag{4}$$

Суммируемая на $[0,1]$ функция $\varphi(s)s^{\nu+N}$ мажорируется суммируемой функцией $\varphi(s)$ на $[0,1]$ и на $[0,1]$ $\varphi(s)s^{\nu+N} \to 0$ при $N \to \infty$. Тогда по теореме Лебега $\int\limits_0^1 \varphi(s)s^{\nu+N}ds \to 0$ при $N \to \infty$.

Следовательно, при достаточно большом N неравенство (4) выполняется.

2. Построение решений

Представим $K(x,t)$ по формуле Тейлора

$$K(x,t) = \sum_{\alpha+\beta=0}^{N} K^{\alpha\beta}x^\alpha t^\beta + \sum_{\alpha+\beta=N+1} \widetilde{K}(x,t)x^\alpha t^\beta, \tag{5}$$

где $K^{\alpha\beta} = \frac{\partial^{\alpha+\beta}K(0,0)}{\partial x^\alpha \partial t^\beta}\frac{1}{\alpha!\beta!}$ ($\alpha+\beta = 0, \dots, \alpha+\beta = N$).

Попытаемся для каждого $l=0,\dots,q$ найти решение уравнения (1) в виде

$$u_l(x)=x^{\nu-1}\Big[\sum_{m=0}^{l}\Big(\sum_{i=0}^{N}a_i^{ml}x^i\sin(\mu\ln x)+\sum_{i=0}^{N}b_i^{ml}x^i\cos(\mu\ln x)\Big)\ln^m x+ \\ +\sum_{m=0}^{l}(a_{N+1}^{ml}(x)x^{N+1}\sin(\mu\ln x)+b_{N+1}^{ml}(x)x^{N+1}\cos(\mu\ln x))\ln^m x\Big], \quad (6)$$

где a_i^{ml} и b_i^{ml} $(i=1,\dots,N;\ m=0,\dots,l)$ — искомые коэффициенты в E, функции $a_{N+1}^{ml}(x)$, $b_{N+1}^{ml}(x)$ являются непрерывными на $[0,T]$ со значениями в банаховом пространстве E.

Подставляя (5) и (6) в (1), получаем в левой части

$$x^{\nu}\Big[\sum_{m=0}^{l}\Big(\sum_{i=0}^{N}a_i^{ml}x^i\sin(\mu\ln x)+\sum_{i=0}^{N}b_i^{ml}x^i\cos(\mu\ln x)\Big)\ln^m x+ \\ +\sum_{m=0}^{l}(a_{N+1}^{ml}(x)x^{N+1}\sin(\mu\ln x)+b_{N+1}^{ml}(x)x^{N+1}\cos(\mu\ln x))\ln^m x\Big]. \quad (7)$$

В полученной правой части

$$\int_0^x\rho(x,t)\Big[\sum_{\alpha+\beta=0}^{N}K^{\alpha\beta}x^\alpha t^\beta+\sum_{\alpha+\beta=N+1}\widetilde{K}^{\alpha\beta}(x,t)x^\alpha t^\beta\Big]t^{\nu-1}\Big[\sum_{m=0}^{l}\Big(\sum_{i=0}^{N}a_i^{ml}t^i\sin(\mu\ln t)+ \\ +\sum_{i=0}^{N}b_i^{ml}t^i\cos(\mu\ln t)\Big)\ln^m t+\sum_{m=0}^{l}(a_{N+1}^{ml}(t)t^{N+1}\sin(\mu\ln t)+b_{N+1}^{ml}(t)t^{N+1}\cos(\mu\ln t))\ln^m t\Big]dt \quad (8)$$

делаем замену $t=xs$. Тогда (8) преобразуется к виду

$$\int_0^1\varphi(s)\Big[\sum_{\alpha+\beta=0}^{N}K^{\alpha\beta}x^{\alpha+\beta}s^\beta+\sum_{\alpha+\beta=N+1}\widetilde{K}^{\alpha\beta}(x,xs)x^{\alpha+\beta}s^\beta\Big]x^\nu s^{\nu-1}\times \\ \times\Big\{\sum_{m=0}^{l}\Big[\Big(\sum_{i=0}^{N}a_i^{ml}(xs)^i\cos(\mu\ln s)-\sum_{i=0}^{N}b_i^{ml}(xs)^i\sin(\mu\ln s)\Big)\sin(\mu\ln x)+ \\ +\Big(\sum_{i=0}^{N}a_i^{ml}(xs)^i\sin(\mu\ln s)+\sum_{i=0}^{N}b_i^{ml}(xs)^i\cos(\mu\ln s)\Big)\cos(\mu\ln x)\Big]\times \\ \times\sum_{k=0}^{m}C_m^k\ln^k x\ln^{m-k}s+\sum_{m=0}^{l}\Big[(a_{N+1}^{ml}(xs)(xs)^{N+1}\cos(\mu\ln s)-b_{N+1}^{ml}(xs)(xs)^{N+1}\times \\ \times\sin(\mu\ln s))\sin(\mu\ln x)+(a_{N+1}^{ml}(xs)(xs)^{N+1}\sin(\mu\ln s)+ \\ +b_{N+1}^{ml}(xs)(xs)^{N+1}\cos(\mu\ln x))\cos(\mu\ln x)\Big]\sum_{k=0}^{m}C_m^k\ln^k x\ln^{m-k}s\Big\}ds. \quad (9)$$

Приравнивая коэффициенты при $x^\nu\ln^l x\sin(\mu\ln x)$, $x^\nu\ln^l x\cos(\mu\ln x)$ в (7) и (9), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} a_0^{ll}&=K^{00}\int_0^1\varphi(s)s^{\nu-1}(a_0^{ll}\cos(\mu\ln s)-b_0^{ll}\sin(\mu\ln s))ds,\\ b_0^{ll}&=K^{00}\int_0^1\varphi(s)s^{\nu-1}(a_0^{ll}\sin(\mu\ln s)+b_0^{ll}\cos(\mu\ln s))ds. \end{aligned} \quad (10)$$

Покажем, что из соотношений (10) следует равенство в комплексификации банахова пространства E

$$(Q_{\nu+i\mu}-I)(a_0^{ll}+ib_0^{ll})=0, \quad (11)$$

которое означает, что вектор $a_0^{ll}+ib_0^{ll}$ является собственным вектором для операторного пучка $Q_\lambda - I$, отвечающим характеристическому числу $\nu+i\mu$. Именно,

$$Q_{\nu+i\mu}-I=K^{00}\int_0^1\varphi(s)s^{\nu-1+i\mu}ds=K^{00}\int_0^1\varphi(s)s^{\nu-1}[\cos(\mu\ln s)+i\sin(\mu\ln s)]ds-I.$$

Пользуясь равенствами (10), вычислим

$$a_0^{ll}+ib_0^{ll}=K^{00}\int_0^1\varphi(s)s^{\nu-1}[(a_0^{ll}\cos(\mu\ln s)-b_0^{ll}\sin(\mu\ln s))+i(a_0^{ll}\sin(\mu\ln s)+b_0^{ll}\cos(\mu\ln s))]ds,$$

$$Q_{\nu+i\mu}(a_0^{ll}+ib_0^{ll})=K^{00}\int_0^1\varphi(s)s^{\nu-1}[\cos(\mu\ln s)+i\sin(\mu\ln s)](a_0^{ll}+ib_0^{ll})ds=$$
$$=K^{00}\int_0^1\varphi(s)s^{\nu-1}[(a_0^{ll}\cos(\mu\ln s)-b_0^{ll}\sin(\mu\ln s))+i(a_0^{ll}\sin(\mu\ln s)+b_0^{ll}\cos(\mu\ln s))]ds.$$

Равенство (11) доказано. Нетрудно заметить, что если $\overline{a}_0^{ll}+i\overline{b}_0^{ll}$ является собственным вектором операторного пучка (2), отвечающим характеристическому числу $\nu+i\mu$, то $a_0^{ll}=\overline{a}_0^{ll}$, $b_0^{ll}=\overline{b}_0^{ll}$ будет решением системы уравнений (10). Это означает, что $a_0^{ll}=e_1$, $b_0^{ll}=e_2$ является решением этой системы.

Приравнивая коэффициенты при $x^{\nu+p}\sin(\mu\ln x)\ln^l x$ и $x^{\nu+p}\cos(\mu\ln x)\ln^l x$ в (7) и (9), получаем систему уравнений для определения a_p^{ll} и b_p^{ll} $(p=1,2,\ldots,N)$

$$\begin{aligned}
&a_p^{ll}-\int_0^1\varphi(s)[K^{00}s^{\nu+p-1}(a_p^{ll}\cos(\mu\ln s)-b_p^{ll}\sin(\mu\ln s))]ds=\\
&\quad=\int_0^1\varphi(s)\Big[\sum_{\substack{\alpha+\beta+i=p\\ \alpha+\beta\geq 1}}K^{\alpha\beta}s^{\beta+\nu+i-1}(a_i^{ll}\cos(\mu\ln s)-b_i^{ll}\sin(\mu\ln s))\Big]ds,\\
&b_p^{ll}-\int_0^1\varphi(s)[K^{00}s^{\nu+p-1}(a_p^{ll}\sin(\mu\ln s)+b_p^{ll}\cos(\mu\ln s))]ds=\\
&\quad=\int_0^1\varphi(s)\Big[\sum_{\substack{\alpha+\beta+i=p\\ \alpha+\beta\geq 1}}K^{\alpha\beta}s^{\beta+\nu+i-1}(a_i^{ll}\sin(\mu\ln s)+b_i^{ll}\cos(\mu\ln s))\Big]ds.
\end{aligned}\tag{12}$$

Сделаем предположение: числа $(\nu+k)+i\mu$ $(k=1,\ldots,N)$ не являются характеристическими для пучка $Q_\lambda-I$. Тогда система уравнений (12) имеет единственное решение.

В предположении противного система уравнений

$$\begin{aligned}
&\Big[I-\int_0^1\varphi(s)K^{00}s^{\nu+p-1}\cos(\mu\ln s)ds\Big]f_1+\Big[\int_0^1\varphi(s)K^{00}s^{\nu+p-1}\sin(\mu\ln s)ds\Big]f_2=0,\\
&\Big[-\int_0^1\varphi(s)K^{00}s^{\nu+p-1}\sin(\mu\ln s)ds\Big]f_1+\Big[I-\int_0^1\varphi(s)K^{00}s^{\nu+p-1}\cos(\mu\ln s)ds\Big]f_2=0
\end{aligned}\tag{13}$$

имеет ненулевое решение $(f_1,f_2)^T$.

Пользуясь уравнениями (13), вычислим

$$f_1+if_2=\Big[\int_0^1\varphi(s)K^{00}s^{\nu+p-1}\cos(\mu\ln s)ds\Big]f_1-\Big[\int_0^1\varphi(s)K^{00}s^{\nu+p-1}\sin(\mu\ln s)ds\Big]f_2+$$
$$+i\Big[\int_0^1\varphi(s)K^{00}s^{\nu+p-1}\sin(\mu\ln s)ds\Big]f_1+i\Big[\int_0^1\varphi(s)K^{00}s^{\nu+p-1}\cos(\mu\ln s)ds\Big]f_2=$$
$$=Q_{(\nu+p)+i\mu}[f_1+if_2].$$

Следовательно, вектор f_1+if_2 является собственным вектором для операторного пучка $Q_\lambda-I$, отвечающим характеристическому числу $(\nu+p)+i\mu$, что противоречит сделанному выше предположению. Таким образом, коэффициенты a_p^{ll}, b_p^{ll} $(p = 1, 2, \dots, N)$ однозначно определяются.

Приравнивая коэффициенты при $x^\nu \sin(\mu \ln x) \ln^{l-1} x$, $x^\nu \cos(\mu \ln x) \ln^{l-1} x$, получаем соотношения

$$\begin{aligned} a_0^{l-1,l} &= \int_0^1 \varphi(s) K^{00} s^{\nu-1} (a_0^{l-1,l} \cos(\mu \ln s) - b_0^{l-1,l} \sin(\mu \ln s)) ds + \\ &+ \int_0^1 [\varphi(s) K^{00} s^{\nu-1} (a_0^{ll} \cos(\mu \ln s) - b_0^{ll} \sin(\mu \ln s)) l \ln s] ds, \\ b_0^{l-1,l} &= \int_0^1 \varphi(s) K^{00} s^{\nu-1} (a_0^{l-1,l} \sin(\mu \ln s) + b_0^{l-1,l} \cos(\mu \ln s)) ds + \\ &+ \int_0^1 [\varphi(s) K^{00} s^{\nu-1} (a_0^{ll} \sin(\mu \ln s) + b_0^{ll} \cos(\mu \ln s)) l \ln s] ds. \end{aligned} \tag{14}$$

Система уравнений (14) эквивалентна уравнению в комплексификации банахова пространства E

$$a_0^{l-1,l} + i b_0^{l-1,l} = Q_{\nu+i\mu}(a_0^{l-1,l} + i b_0^{l-1,l}) + l(Q_{\nu+i\mu} - I)'(a_0^{ll} + i b_0^{ll})$$

или уравнению

$$(Q_{\nu+i\mu} - I)(a_0^{l-1,l} + i b_0^{l-1,l}) + l(Q_{\nu+i\mu} - I)' e = 0. \tag{15}$$

Следовательно, $a_0^{l-1,l} + i b_0^{l-1,l} = l e_1$ будет решением уравнения (15), а $a_0^{l-1,l} = l e_1^1$, $b_0^{l-1,l} = l e_2^1$ будет решением системы уравнений (14).

Приравнивая коэффициенты при $x^\nu \sin(\mu \ln x) \ln^{l-d} x$, $x^\nu \cos(\mu \ln x) \ln^{l-d} x$ $(d = 2, 3, \dots, l)$, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} a_0^{l-d,l} &= \int_0^1 \varphi(s) K^{00} s^{\nu-1} \Big[(a_0^{l-d,l} \cos(\mu \ln s) - b_0^{l-d,l} \sin(\mu \ln s)) + \\ &+ (a_0^{l-d+1,l} \cos(\mu \ln s) - b_0^{l-d+1,l} \sin(\mu \ln s))(l-d+1) \ln s + \\ &+ (a_0^{l-d+2,l} \cos(\mu \ln s) - b_0^{l-d+2,l} \sin(\mu \ln s))(l-d+1)(l-d+2) \frac{1}{2!} \ln^2 s + \dots + \\ &+ (a_0^{ll} \cos(\mu \ln s) - b_0^{ll} \sin(\mu \ln s))(l-d+1)(l-d+2) \times \dots \times l \frac{1}{d!} \ln^d s \Big] ds, \\ b_0^{l-d,l} &= \int_0^1 \varphi(s) K^{00} s^{\nu-1} \Big[(a_0^{l-d,l} \sin(\mu \ln s) + b_0^{l-d,l} \cos(\mu \ln s)) + \\ &+ (a_0^{l-d+1,l} \sin(\mu \ln s) + b_0^{l-d+1,l} \cos(\mu \ln s))(l-d+1) \ln s + \\ &+ (a_0^{l-d+2,l} \sin(\mu \ln s) + b_0^{l-d+2,l} \cos(\mu \ln s))(l-d+1)(l-d+2) \frac{1}{2!} \ln^2 s + \dots + \\ &+ (a_0^{ll} \sin(\mu \ln s) + b_0^{ll} \cos(\mu \ln s))(l-d+1)(l-d+2) \times \dots \times l \frac{1}{d!} \ln^d s \Big] ds. \end{aligned} \tag{16}$$

Тогда

$$\begin{aligned} a_0^{l-d,l} + i b_0^{l-d,l} = Q_{\nu+i\mu}(a_0^{l-d,l} + i b_0^{l-d,l}) + (l-d+1) Q'_{\nu+i\mu}(a_0^{l-d+1,l} + i b_0^{l-d+1,l}) + \\ +(l-d+1)(l-d+2) \frac{1}{2!} Q''_{\nu+i\mu}(a_0^{l-d+2,l} + i b_0^{l-d+2,l}) + \dots + \\ +(l-d+1)(l-d+2) \times \dots \times l \frac{1}{d!} Q^{(d)}_{\nu+i\mu}(a_0^{ll} + i b_0^{ll}) \end{aligned}$$

или

$$a_0^{l-d,l}+ib_0^{l-d,l}=(l-d+1)(l-d+2)\times\cdots\times l\frac{1}{d!}(Q_{\nu+i\mu}-I)^{(d)}(a_0^{ll}+ib_0^{ll})+\cdots+$$
$$+(l-d+1)(l-d+2)\frac{1}{2!}(Q_{\nu+i\mu}-I)''(a_0^{l-d+2,l}+ib_0^{l-d+2,l})+$$
$$+(l-d+1)(Q_{\nu+i\mu}-I)'(a_0^{l-d+1,l}+ib_0^{l-d+1,l})+(Q_{\nu+i\mu}-I)(a_0^{l-d,l}+ib_0^{l-d,l}). \quad (17)$$

Нетрудно по индукции доказать, что решением уравнения (17) будет

$$a_0^{ll}+ib_0^{ll}=e,\quad a_0^{l-1,l}+ib_0^{l-1,l}=le_1,\quad a_0^{l-2,l}+ib_0^{l-2,l}=l(l-1)e_2,\dots,$$
$$a_0^{l-d+1,l}+ib_0^{l-d+1,l}=l(l-1)\times\cdots\times(l-d+2)e_{d-1},$$
$$a_0^{l-d,l}+ib_0^{l-d,l}=l(l-1)\times\cdots\times(l-d+1)d_d.$$

Следовательно, $a_0^{l-d,l}=\frac{l!}{(l-d)!}e_1^d$, $b_0^{l-d,l}=\frac{l!}{(l-d)!}e_2^d$ $(d=2,3,\dots,l)$ будет решением системы (16).

Приравнивая коэффициенты при $x^{\nu+p}\sin(\mu\ln x)\ln^{l-d}x$, $x^{\nu+p}\cos(\mu\ln x)\ln^{l-d}x$ $(p=1,2,\dots,N;$ $d=1,2,\dots,l)$, получаем систему уравнений

$$\begin{gathered}
a_p^{l-d,l}-\int_0^1\varphi(s)K^{00}s^{\nu+p-1}[(a_p^{l-d,l}\cos(\mu\ln s)-b_p^{l-d,l}\sin(\mu\ln s))]ds=\\
=\int_0^1\varphi(s)\Bigg[\sum_{\substack{\alpha+\beta+i=p\\ \alpha+\beta\ge1}}\Bigg[K^{\alpha\beta}s^{\beta+\nu+i-1}\times\Bigg[\sum_{m=l-d+1}^{l}(a_0^{ml}\cos(\mu\ln s)-b_0^{ml}\sin(\mu\ln s))\times\\
\times C_m^{l-d}\ln^{m-l+d}s\Bigg]\Bigg]\Bigg]ds,\\
b_p^{l-d,l}-\int_0^1\varphi(s)K^{00}s^{\nu+p-1}[(a_p^{l-d,l}\sin(\mu\ln s)+b_p^{l-d,l}\cos(\mu\ln s))]ds=\\
=\int_0^1\varphi(s)\Bigg[\sum_{\substack{\alpha+\beta+i=p\\ \alpha+\beta\ge1}}\Bigg[K^{\alpha\beta}s^{\beta+\nu+i-1}\times\Bigg[\sum_{m=l-d+1}^{l}(a_i^{ml}\sin(\mu\ln s)+b_i^{ml}\cos(\mu\ln s))\times\\
\times C_m^{l-d}\ln^{m-l+d}s\Bigg]\Bigg]\Bigg]ds.
\end{gathered}\quad (18)$$

В силу предположения, указанного выше, система уравнений (18) имеет единственное решение. Это означает, что коэффициенты $a_p^{l-d,l}$ и $b_p^{l-d,l}$ $(d=1,2,\dots,l;$ $p=1,2,\dots,N)$ однозначно определяются.

Для того чтобы функция (6) была решением уравнения (1), функции $a_{N+1}^{ml}(x)$ и $b_{N+1}^{ml}(x)$ со значениями в банаховом пространстве E должны удовлетворять уравнению

$$\begin{gathered}
x^{\nu+N+1}\sum_{m=0}^{l}(a_{N+1}^{ml}(s)\sin(\mu\ln x)+b_{N+1}^{ml}(x)\cos(\mu\ln x))\ln^m x=\\
=\int_0^1\varphi(s)\Bigg[\sum_{\alpha+\beta=0}^{N}K^{\alpha\beta}x^{\alpha+\beta}s^\beta+\sum_{\alpha+\beta=N+1}\widetilde{K}^{\alpha\beta}(x,xs)x^{\alpha+\beta}s^\beta\Bigg]x^\nu s^{\nu-1}\times\\
\times\Bigg[\{(a_{N+1}^{ml}(xs)(xs)^{N+1}\cos(\mu\ln s)-b_{N+1}^{ml}(xs)(xs)^{N+1}\sin(\mu\ln s))\times\\
\times\sin(\mu\ln x)+(a_{N+1}^{ml}(xs)(xs)^{N+1}\sin(\mu\ln s)+b_{N+1}^{ml}(xs)(xs)^{N+1}\cos(\mu\ln s))\times\\
\times\cos(\mu\ln x)\}\sum_{k=0}^{m}C_m^k\ln^k x\ln^{m-k}s\Bigg]ds+\int_0^1\varphi(s)\Bigg[\sum_{\alpha+\beta=N+1}\widetilde{K}^{\alpha\beta}(x,xs)x^{\alpha+\beta}s^\beta\Bigg]x^\nu s^{\nu-1}\times
\end{gathered}$$

$$\times \Bigg[\sum_{m=0}^{l} \Bigg\{ \Bigg(\sum_{i=0}^{N} a_i^{ml}(xs)^i \cos(\mu \ln s) - \sum_{i=0}^{N} b_i^{ml}(xs)^i \sin(\mu \ln s) \Bigg) \sin(\mu \ln x) +$$

$$+ \Bigg(\sum_{i=0}^{N} a_i^{ml}(xs)^i \sin(\mu \ln s) + \sum_{i=0}^{N} b_i^{ml}(xs)^i \cos(\mu \ln s) \Bigg) \cos(\mu \ln x) \Bigg\} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{m} C_m^k \ln^k x \ln^{m-k} s \Bigg] ds + \int_0^1 \varphi(s) \Bigg[\sum_{\alpha+\beta+i \geq N+1} K^{\alpha\beta} x^{\alpha+\beta} s^{\beta} \Bigg] x^{\nu+i} x^{\nu+i-1} \times$$

$$\times \Bigg[\sum_{m=0}^{l} \{ (a_i^{ml} \cos(\mu \ln s) - b_i^{ml} \sin(\mu \ln s)) \sin(\mu \ln x) + (a_i^{ml} \sin(\mu \ln s) +$$

$$+ b_i^{ml} \cos(\mu \ln s)) \cos(\mu \ln x) \} \sum_{k=0}^{m} C_m^k \ln^k x \ln^{m-k} s \Bigg] ds.$$

Приравнивая коэффициенты при $x^{\nu+N+1} \sin(\mu \ln x) \ln^l x$ и $x^{\nu+N+1} \cos(\mu \ln x) \ln^l x$, получаем равенства

$$a_{N+1}^{ll}(x) = \int_0^1 \varphi(s) K(x, xs) s^{\nu+N} (a_{N+1}^{ll}(xs) \cos(\mu \ln s) - b_{N+1}^{ll}(xs) \sin(\mu \ln s)) ds +$$

$$+ \int_0^1 \varphi(s) \Bigg[\sum_{\alpha+\beta=N+1} \widetilde{K}^{\alpha\beta}(x, xs) s^{\beta+\nu-1} \Bigg(\sum_{i=0}^{N} a_i^{ll}(xs)^i \cos(\mu \ln s) - \sum_{i=0}^{N} b_i^{ll}(xs)^i \sin(\mu \ln s) \Bigg) \Bigg] ds +$$

$$+ \int_0^1 \varphi(s) \Bigg[\sum_{\alpha+\beta+i \geq N+1} K^{\alpha\beta} x^{\alpha+\beta+i-N-1} s^{\nu+i-1} (a_i^{ll} \cos(\mu \ln s) - b_i^{ll} \sin(\mu \ln s)) \Bigg] ds,$$

$$b_{N+1}^{ll}(x) = \int_0^1 \varphi(s) K(x, xs) s^{\nu+N} (a_{N+1}^{ml}(xs) \sin(\mu \ln s) + b_{N+1}^{ml}(xs) \cos(\mu \ln s)) ds + \tag{19}$$

$$+ \int_0^1 \varphi(s) \Bigg[\sum_{\alpha+\beta=N+1} \widetilde{K}^{\alpha\beta}(x, xs) s^{\beta+\nu-1} \Bigg(\sum_{i=0}^{N} a_i^{ll}(xs)^i \sin(\mu \ln s) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{N} b_i^{ll}(xs)^i \cos(\mu \ln s) \Bigg) \Bigg] ds + \int_0^1 \varphi(s) \Bigg[\sum_{\alpha+\beta+i \geq N+1} K^{\alpha\beta} x^{\alpha+\beta+i-N-1} s^{\nu+i-1} \times$$

$$\times (a_i^{ll} \sin(\mu \ln s) + b_i^{ll} \cos(\mu \ln s)) \Bigg] ds.$$

Приравнивая коэффициенты при $x^{\nu+N+1} \sin(\mu \ln x) \ln^p x$ и $x^{\nu+N+1} \cos(\mu \ln x) \ln^p x$, получаем систему уравнений

$$a_{N+1}^{pl}(x) = \int_0^1 \varphi(s) K(x, xs) s^{\nu+N} (a_{N+1}^{pl}(xs) \cos(\mu \ln s) - b_{N+1}^{pl}(xs) \sin(\mu \ln s)) ds +$$

$$+ \int_0^1 \varphi(s) K(x, xs) s^{\nu+N} \Bigg[\sum_{m=p+1}^{l} (a_{N+1}^{ml}(xs) \cos(\mu \ln s) - b_{N+1}^{ml}(xs) \sin(\mu \ln s)) \times$$

$$\times C_m^p \ln^{m-p} s \Bigg] ds + \int_0^1 \varphi(s) \Bigg[\sum_{\alpha+\beta=N+1} \widetilde{K}^{\alpha\beta}(x, xs) s^{\nu+\beta-1} \times$$

$$\times \Bigg[\sum_{m=p}^{l} \Bigg(\sum_{i=0}^{N} (a_i^{ml}(xs)^i \cos(\mu \ln s) - \sum_{i=0}^{N} b_i^{ml}(xs)^i \sin(\mu \ln s)) C_m^p \ln^{m-p} s \Bigg) \Bigg] ds +$$

$$+ \int_0^1 \varphi(s) \Bigg[\sum_{\alpha+\beta+i \geq N+1} K^{\alpha\beta} x^{\alpha+\beta+i-N-1} s^{\nu+i-1} \Bigg[\sum_{m=p}^{l} (a_i^{ml} \cos(\mu \ln s) -$$

$$- b_i^{ml}\sin(\mu\ln s))C_m^p\ln^{m-p}s\Big]\Big]ds, \tag{20}$$

$$b_{N+1}^{pl}(x)=\int_0^1\varphi(s)K(x,xs)s^{\nu+N}(a_{N+1}^{pl}(xs)\sin(\mu\ln s)+b_{N+1}^{pl}(xs)\cos(\mu\ln s))ds+$$
$$+\int_0^1\varphi(s)K(x,xs)s^{\nu+N}\Big[\sum_{m=p+1}^{l}(a_{N+1}^{ml}(xs)\sin(\mu\ln s)+b_{N+1}^{ml}(xs)\cos(\mu\ln s))\times$$
$$\times C_m^p\ln^{m-p}s\Big]ds+\int_0^1\varphi(s)\Big[\sum_{\alpha+\beta=N+1}\widetilde{K}^{\alpha\beta}(x,xs)s^{\nu+\beta-1}\Big[\sum_{m=p}^{l}\Big(\sum_{i=0}^{N}(a_i^{ml}(xs)^i\sin(\mu\ln s)+$$
$$+\sum_{i=0}^{N}b_i^{ml}(xs)^i\cos(\mu\ln s))C_m^p\ln^{m-p}s\Big]\Big]ds+\int_0^1\varphi(s)\Big[\sum_{\alpha+\beta+i\geq N+1}K^{\alpha\beta}x^{\alpha+\beta+i-N-1}s^{\nu+i-1}\times$$
$$\times\Big[\sum_{m=p}^{l}(a_i^{ml}\sin(\mu\ln s)+b_i^{ml}\cos(\mu\ln s))C_m^p\ln^{m-p}\Big]\Big]ds.$$

Соотношения (19) и (20) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}a_{N+1}^{pl}(x)&=\int_0^1\varphi(s)K(x,xs)s^{\nu+N}(a_{N+1}^{pl}(xs)\cos(\mu\ln s)-b_{N+1}^{pl}(xs)\sin(\mu\ln s))ds+f_1^p(x),\\ b_{N+1}^{pl}(x)&=\int_0^1\varphi(s)K(x,xs)s^{\nu+N}(a_{N+1}^{pl}(xs)\sin(\mu\ln s)+b_{N+1}^{pl}(xs)\cos(\mu\ln s))ds+f_2^p(x),\end{aligned} \tag{21}$$

где $f_1^p(x)$ и $f_2^p(x)$ — известные непрерывные на $[0,T]$ функции со значениями в банаховом пространстве E, которые определяются из (19) и (20) ($p=l,l-1,\dots,0$).

Рассмотрим банахово пространство $E\times E=\{z:z=(uv)^T,\ u\in E,\ v\in E;\ \|z\|_{E\times E}=\|u\|_E+\|v\|_E\}$. Обозначим через $C([0,T],E\times E)$ пространство непрерывных на $[0,T]$ в норме банахова пространства $E\times E$ функций с нормой $\|z(x)\|_{C([0,T],E\times E)}=\max\limits_{0\leq x\leq T}\|z(x)\|_{E\times E}$.

Пусть

$$\begin{aligned}z^p(x)&=(a_{N+1}^{pl}(x)b_{N+1}^{pl}(x))^T\in C([0,T],E\times E),\\ f^p(x)&=(f_1^p(x)f_2^p(x))^T\in C([0,T],E\times E).\end{aligned}$$

Тогда систему уравнений (21) можно переписать в операторной форме

$$z^p(x)=(Bz^p)(x)+f^p(x), \tag{22}$$

где оператор B действует на непрерывную на $[0,T]$ в норме банахова пространства $E\times E$ функцию $z^p(x)$ со значениями в $E\times E$ по формуле

$$Bz^p(x)=\int_0^1\varphi(s)s^{\nu+N}\overline{K}(x,s)z^p(xs)ds,$$
$$\overline{K}(x,s)=\begin{pmatrix}K(x,xs)\cos(\mu\ln s) & -K(x,xs)\sin(\mu\ln s)\\ K(x,xs)\sin(\mu\ln s) & K(x,xs)\cos(\mu\ln s)\end{pmatrix}.$$

Оценим норму оператора B в пространстве $C([0,T],E\times E)$

$$\|Bz^p(x)\|_{C([0,T],E\times E)}=\max_{0\leq x\leq T}\Big\|\int_0^1\varphi(s)s^{\nu+N}\overline{K}(x,xs)z^p(xs)ds\Big\|_{E\times E}\leq$$
$$\leq\max_{0\leq x\leq T}\int_0^1\|\varphi(s)s^{\nu+N}\overline{K}(x,xs)z^p(xs)\|_{E\times E}ds=$$
$$=\max_{0\leq x\leq T}\int_0^1\varphi(s)s^{\nu+N}\{\|K(x,xs)\cos(\mu\ln s)z_1^p(xs)-K(x,xs)\sin(\mu\ln s)z_2^p(xs)\|_E+$$

$$+\|K(x,xs)\sin(\mu\ln s)z_1^p(xs)+K(x,xs)\cos(\mu\ln s)z_2^p(xs)\|_E\}ds\le$$

$$\le\max_{0\le x\le T}\int_0^1\varphi(s)s^{\nu+N}\{\|K(x,xs)\cos(\mu\ln s)z_1^p(xs)\|_E+\|K(x,xs)\sin(\mu\ln s)z_2^p(xs)\|_E+$$

$$+\|K(x,xs)\sin(\mu\ln s)z_1^p(xs)\|_E+\|K(x,xs)\cos(\mu\ln s)z_2^p(xs)\|_E\}ds\le$$

$$\le\max_{0\le x\le T}\int_0^1\varphi(s)s^{\nu+N}2\|K(x,xs)\|_{L(E)}(\|z_1^p(xs)\|_E+\|z_2^p(xs)\|_E)ds\le$$

$$\le 2\big|\|K\|\big|_C\int_0^1\varphi(s)s^{\nu+N}ds\|z^p(x)\|_{C([0,T],E\times E)},$$

где $z_1^p(xs)=a_{N+1}^{pl}(xs)$, $z_2^p(xs)=b_{N+1}^{pl}(xs)$.

Следовательно, в силу неравенства (4) $\|B\|_{C([0,T],E\times E)\to C([0,T],E\times E)}\le 2\big|\|K\|\big|_C\int\limits_0^1\varphi(s)s^{\nu+N}ds<1$.

Это означает, что поэтапно каждое уравнение в (22) при $p=l,l-1,\dots,0$ однозначно разрешимо методом последовательных приближений.

Для уравнения (1) можно построить еще одно семейство решений $\{v_l(x)\}_{l=0}^q$ вида (6), если вместо собственного вектора $e=e_1+ie_2$ и цепочки присоединенных к нему векторов $e_k=e_1^k+ie_2^k$ взять собственный вектор $ie=-e_2+ie_1$ и цепочку присоединенных векторов $ie_k=-e_2^k+ie_1^k$ операторного пучка (2). Тогда решения $\{u_l(x)\}_{l=0}^q$ и $\{v_l(x)\}_{l=0}^q$ будут линейно независимы в совокупности. Покажем это.

Пусть

$$\sum_{l=0}^q c_lu_l+\sum_{l=0}^q\overline{c}_lv_l=\sum_{l=0}^q c_lx^{\nu-1}\Big[\sum_{m=0}^l\Big(\sum_{i=0}^N a_i^{ml}x^i\sin(\mu\ln x)+\sum_{i=0}^N b_i^{ml}x^i\cos(\mu\ln x)+$$

$$+a_{N+1}^{ml}(x)x^{N+1}\sin(\mu\ln x)+b_{N+1}^{ml}(x)x^{N+1}\cos(\mu\ln x)\Big)\ln^m x\Big]+$$

$$+\sum_{l=0}^q\overline{c}_lx^{\nu-1}\Big[\sum_{m=0}^l\Big(\sum_{i=0}^N\overline{a}_i^{ml}x^i\sin(\mu\ln x)+\sum_{i=0}^N\overline{b}_i^{ml}x^i\cos(\mu\ln x)+$$

$$+\overline{a}_{N+1}^{ml}(x)x^{N+1}\sin(\mu\ln x)+\overline{b}_{N+1}^{ml}(x)x^{N+1}\cos(\mu\ln x)\Big)\ln^m x\Big]\equiv 0.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^q c_lx^{\nu-1}\Big[\sum_{m=0}^l\Big(\sum_{i=0}^N a_i^{ml}x^i+a_{N+1}^{ml}(x)x^{N+1}\Big)\ln^m x\Big]+\\&+\sum_{l=0}^q\overline{c}_lx^{\nu-1}\Big[\sum_{m=0}^l\Big(\sum_{i=0}^N\overline{a}_i^{ml}x^i+\overline{a}_{N+1}^{ml}(x)x^{N+1}\Big)\ln^m x\Big]\equiv 0,\\&\sum_{l=0}^q c_lx^{\nu-1}\Big[\sum_{m=0}^l\Big(\sum_{i=0}^N b_i^{ml}x^i+b_{N+1}^{ml}(x)x^{N+1}\Big)\ln^m x\Big]+\\&\sum_{l=0}^q\overline{c}_lx^{\nu-1}\Big[\sum_{m=0}^l\Big(\sum_{i=0}^N\overline{b}_i^{ml}x^i+\overline{b}_{N+1}^{ml}(x)x^{N+1}\Big)\ln^m x\Big]\equiv 0.\end{aligned}\tag{23}$$

Перепишем систему (23) в виде

$$x^{\nu-1}\ln^q x\Big\{\sum_{l=0}^{q-1}c_l\Big[\sum_{m=0}^l\Big(\sum_{i=0}^N a_i^{ml}x^i+a_{N+1}^{ml}(x)x^{N+1}\Big)\ln^{m-q}x\Big]+$$

$$+c_q\Big[\sum_{m=0}^q\Big(\sum_{i=0}^N a_i^{mq}x^i+a_{N+1}^{mq}(x)x^{N+1}\Big)\ln^{m-q}x\Big]+$$

$$+\sum_{l=0}^{q-1}\overline{c}_l\Big[\sum_{m=0}^{l}\Big(\sum_{i=0}^{N}\overline{a}_i^{ml}x^i+\overline{a}_{N+1}^{ml}(x)x^{N+1}\Big)\ln^{m-q}x\Big]+$$

$$+\overline{c}_q\Big[\sum_{m=0}^{q}\Big(\sum_{i=0}^{N}\overline{a}_i^{mq}x^i+\overline{a}_{N+1}^{mq}(x)x^{N+1}\Big)\ln^{m-q}x\Big]\Big\}\equiv 0,$$

$$x^{\nu-1}\ln^q x\Big\{\sum_{l=0}^{q-1}c_l\Big[\sum_{m=0}^{l}\Big(\sum_{i=0}^{N}b_i^{ml}x^i+b_{N+1}^{ml}(x)x^{N+1}\Big)\ln^{m-q}x\Big]+$$

$$+c_q\Big[\sum_{m=0}^{q}\Big(\sum_{i=0}^{N}b_i^{mq}x^i+b_{N+1}^{mq}(x)x^{N+1}\Big)\ln^{m-q}x\Big]+$$

$$+\sum_{l=0}^{q-1}\overline{c}_l\Big[\sum_{m=0}^{l}\Big(\sum_{i=0}^{N}\overline{b}_i^{ml}x^i+\overline{b}_{N+1}^{ml}(x)x^{N+1}\Big)\ln^{m-q}x\Big]+$$

$$+\overline{c}_q\Big[\sum_{m=0}^{q}\Big(\sum_{i=0}^{N}\overline{b}_i^{mq}x^i+\overline{b}_{N+1}^{mq}(x)x^{N+1}\Big)\ln^{m-q}x\Big]\Big\}\equiv 0.$$

Отбрасывая множители $x^{\nu-1}\ln^q x$ и переходя к пределу при $x\to 0$, получаем

$$c_q a_0^{qq}+\overline{c}_q\overline{a}_0^{qq}=0,\quad c_q b_0^{qq}+\overline{c}_q\overline{b}_0^{qq}=0$$

или

$$c_q e_1+\overline{c}_q(-e_2)=0,\quad c_q e_2+\overline{c}_q e_1=0.$$

Собственный вектор операторного пучка (2) $e=e_1+ie_2\neq 0$ ($e_1\neq 0$ или $e_2\neq 0$). Пусть $e_1\neq 0$, тогда $(c_q^2+\overline{c}_q^2)e_1=0$, значит, $c_q=0$ и $\overline{c}_q=0$. Если $e_2\neq 0$, то $(c_q^2+\overline{c}_q^2)e_2=0$ и снова $c_q=0$ и $\overline{c}_q=0$.

Рассуждая аналогично, получаем $c_{q-1}=0$, $\overline{c}_{q-1}=0$; $c_{q-2}=0$, $\overline{c}_{q-2}=0$; $c_{q-3}=0$, $\overline{c}_{q-3}=0,\dots,c_0=0$, $\overline{c}_0=0$.

Следовательно, решения уравнения (1) $\{u_l(x)\}_{l=0}^q$ и $\{v_l(x)\}_{l=0}^q$ линейно независимы. Таким образом, получили $2(q+1)$ параметрическое семейство решений для уравнения (1)

$$u(x)=\sum_{l=0}^{q}c_l u_l(x)+\sum_{l=0}^{q}\overline{c}_l v_l(x).$$

Таким образом, доказана

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *функция $K(x,t)$ со значениями в $L(E)$ имеет непрерывные частные производные до порядка $N+1$ включительно;*

2) *$\rho(x,t)$ — такая скалярная положительная однородная нулевой степени функция, что $\varphi(s)=\rho(1,s)$ суммируема на $[0,1]$;*

3) *пучок (2) имеет характеристическое число $\lambda=\nu+i\mu$ ($\nu>0$), удовлетворяющее неравенству (3), а числа $(\nu+k)+i\mu$ ($k=1,\dots,N$) не являются характеристическими для него;*

4) *характеристическому числу $\nu+i\mu$ соответствует собственный вектор $e=e_1+ie_2$ и цепочка присоединенных векторов $e_k=e_1^k+ie_2^k$ ($k=1,\dots,q$) для операторного пучка (2);*

5) *существует такое натуральное число N, что*

$$2\big|\|K\|\big|_C\int_0^1\varphi(s)s^{\nu+N}ds<1.$$

Тогда имеется $2(q+1)$ решений вида (6) для уравнения (1). При этом для $l=0,\dots,q$

$$\begin{cases} a_0^{ll}=e_1, \quad a_0^{l-d,l}=\dfrac{l!}{(l-d)!}e_1^d; \\ b_0^{ll}=e_2, \quad b_0^{l-d,l}=\dfrac{l!}{(l-d)!}e_2^d \quad (d=1,2,\dots,l), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{a}_0^{ll}=-e_2, \quad \overline{a}_0^{l-d,l}=\dfrac{l!}{(l-d)!}(-e_2^d); \\ \overline{b}_0^{ll}=e_1, \quad \overline{b}_0^{l-d,l}=\dfrac{l!}{(l-d)!}e_1^d \quad (d=1,2,\dots,l). \end{cases}$$

Замечание 1. Для того чтобы при $0<\nu<1$ выполнялось неравенство

$$\int_0^1 \varphi(s)s^{\nu-1}ds<\infty,$$

достаточно, чтобы функция $\varphi(s)$ была ограниченной и измеримой на отрезке $[0,1]$.

Замечание 2. Число непрерывных на $[0,T]$ решений, найденных по формулам (6), зависит от величины ν: при $\nu>1$ все решения непрерывны; при $\nu=1$ два решения будут непрерывными на $[0,T]$, а остальные решения непрерывны на $(0,T]$ и суммируемы на $[0,T]$; при $0<\nu<1$ непрерывных на $[0,T]$ решений нет, все решения непрерывны на $(0,T]$ и суммируемы на $[0,T]$.

Литература

1. Sato T. *Sur l'equation integrale* $xu(x)=f(x)+\int\limits_0^x K(x,t,u(t))dt$ // J. Math. Soc. Japan. – 1953. – V. 5.– № 2. – P. 145–153.
2. Takesada T. *On the singular point of integral equations of Volterra type* // J. Math. Soc. Japan. – 1955. – V .7. – № 2. – P. 123–136.
3. Панов Л.И. *Об интегральных уравнениях с ядрами, имеющими неинтегрируемую особенность произвольного порядка* // ДАН ТаджССР. – 1967. – Т. 10. – № 6. – С. 3–7.
4. Магницкий Н.А. *О существовании многопараметрических семейств решений интегрального уравнения Вольтерра* I*-го рода* // ДАН СССР. – 1977. – Т. 235. – № 4. – С. 772–774.
5. Магницкий Н.А. *Многопараметрические семейства решений интегральных уравнений Вольтерра* // ДАН СССР. – 1978. – Т. 240. – № 2. – С. 268–271.
6. Магницкий Н.А. *Линейные интегральные уравнения Вольтерра* I *и* III *рода* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1979. – Т. 19. – № 4. – С. 970–988.
7. Крейн С.Г., Сапронов И.В. *О полноте системы решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью* // Докл. РАН. – 1997. – Т. 355. – № 4. – С. 450–452.
8. Крейн С.Г., Сапронов И.В. *Об интегральных уравнениях Вольтерра с особенностями* // УМН. – 1995. – Т. 50. – Вып. 4. – С. 140.
9. Krein S.G. *Singular integral Volterra equations* // Abstracts. Intern. Congress of Math. Zurich. 3–11 August. – 1994. – P. 125.
10. Krein S.G., Sapronov I.V. *One class of solutions of Volterra equation with regular singularity* // Укр. матем. журн. – 1997. – Т.49. – № 3. – С. 424–432.

Воронежская государственная
лесотехническая академия

Поступила
26.06.2002