ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 6 (505)

УДК 517.977

С.Ю. КУЛТЫШЕВ, Л.М. КУЛТЫШЕВА

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ОПЕРАТОРНЫХ МОДЕЛЕЙ ЭВОЛЮЦИОННОГО ТИПА

В статье продолжены исследования работ [1]–[4], посвященных задаче нахождения параметров математической модели реального объекта по косвенным измерениям его входа и выхода. Получены условия разрешимости и однозначной разрешимости этой задачи для некоторых классов операторных моделей и некоторых видов измерений входа и выхода объекта.

Сложность указанной задачи состоит в том, что объект и его математическая модель рассматриваются на отрезке времени $[\theta, T]$, а измерения входа и выхода объекта производятся на более узком отрезке времени $[\nu, \tau]$, где $\theta \leq \nu < \tau < T$. Кроме того, операторы, описывающие работу измерителей входа и выхода, в большинстве случаев необратимы.

Ниже предлагаются способы преодоления указанных трудностей и методы решения рассматриваемой задачи в детерминистической постановке.

1. Постановка задачи

Пусть R^n — n-мерное евклидово пространство; $B_1^m[\theta,T]$, $B_2^n[\theta,T]$, $B_3^q[\theta,T]$ — банаховы пространства m-, n- и q-мерных вектор-функций, определенных на отрезке $[\theta,T]$; Y, Z, W — банаховы пространства.

Рассмотрим реальный объект на отрезке времени $[\theta,T]$, где θ — момент возникновения объекта. Через $\overline{v}(t)$ обозначим m-мерный вектор параметров, характеризующих внешние воздействия на объект в момент времени $t \in [\theta,T]$, $\overline{v}(t) \in R^m$, а через $\overline{x}(t)$ — n-мерный вектор параметров, характеризующих реакцию объекта на внешние воздействия в момент t, $\overline{x}(t) \in R^n$. Вектор-функции $\overline{v}$ и $\overline{x}$ будем называть входом и выходом объекта соответственно. Будем считать, что $\overline{v} \in V_{[\theta,T]}$, а $\overline{x} \in X_{[\theta,T]}$, где $V_{[\theta,T]}$, $X_{[\theta,T]}$ — некоторые подмножества из $B_1^m[\theta,T]$, $B_2^n[\theta,T]$ соответственно.

Так как объект реальный, то $\overline{x}(t)$ зависит только от предистории изменения внешних воздействий, т. е. $\overline{x}(t)$ однозначно определяется значениями $\overline{v}(s)$ при $s \in [\theta,t]$, следовательно, $\overline{x}(t) = A(t, \overset{t}{\underset{\theta}{C}}\,\overline{v})$, где $A(t,\cdot) : V_{[\theta,t]} \to R^n$ при каждом фиксированном $t \in [\theta,T]$, а $\overset{t}{\underset{\theta}{C}}$ — оператор сужения вектор-функций $\overline{v}$ на отрезок $[\theta,t]$.

Равенство $\overline{x}(t) = A(t, \overset{t}{\underset{\theta}{C}}\,\overline{v})$ задает математическую модель рассматриваемого объекта. Попытки построить эту математическую модель, т. е. найти оператор A, часто приводят к неявной зависимости $F(\overline{x},\overline{v}) = 0$ между $\overline{v}$ и $\overline{x}$, поэтому имеет смысл ввести

Определение 1. Уравнение $F(x,v) = 0$ назовем математической моделью рассматриваемого объекта, если

1) $F : X_{[\theta,T]} \times V_{[\theta,T]} \to W$ — непрерывный оператор;

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00255 и региональный грант № 04-01-96016).

2) уравнение $F(x,v) = 0$ однозначно разрешимо относительно x при каждом $v \in V_{[\theta,T]}$ и его решение представимо в виде $x(t) = A(t, \overset{t}{\underset{\theta}{C}} v)$, где $A(t,\cdot) : V_{[\theta,t]} \to R^n$ при каждом фиксированном $t \in [\theta,T]$;
3) оператор $B : V_{[\theta,T]} \to X_{[\theta,T]}$, $(Bv)(t) = A(t, \overset{t}{\underset{\theta}{C}} v)$, непрерывен;
4) выполняется равенство $F(\overline{x}, \overline{v}) = 0$.

Пусть далее $y = P(\overset{\tau}{\underset{\nu}{C}} v)$, $z = Q(\overset{\tau}{\underset{\nu}{C}} x)$ — измерения входа и выхода объекта, где $P : V_{[\nu,\tau]} \to Y$, $Q : X_{[\nu,\tau]} \to Z$ — непрерывные операторы, $[\nu,\tau]$ — отрезок времени, в течение которого производятся эти измерения, $\theta \le \nu < \tau < T$.

Обычно математическая модель объекта строится в виде $\overline{F}(x,v,\omega) = 0$, где ω — неизвестный вектор параметров модели, $\omega \in \Omega \subseteq B_4$, B_4 — некоторое банахово пространство,

$$\overline{F} : X_{[\theta,T]} \times V_{[\theta,T]} \times \Omega \to W$$

— непрерывный оператор, который при каждом $\omega \in \Omega$ удовлетворяет условиям 1), 2), 3) определения 1 и условию 4) при некотором $\omega \in \Omega$.

Задачу идентификации поставим так: *по известным y, z, P, Q, $\overline{F}$, ν и τ найти такое $\omega \in \Omega$, при котором $\overline{F}(\overline{x}, \overline{v}, \omega) = 0$.*

Таким образом, если $\overline{\omega}$ — решение задачи идентификации, то математическая модель объекта имеет вид $F(x,v) \overset{\text{def}}{=} \overline{F}(x,v,\overline{\omega}) = 0$.

2. Основные теоремы об идентификации

При изучении задачи идентификации возникают следующие вопросы.

Вопрос 1. При каких условиях задача идентификации разрешима?

Вопрос 2. При каких условиях задача идентификации имеет единственное решение?

Вопрос 3. Как вычислить искомое ω?

Для ответа на эти вопросы понадобится

Лемма 1. *Пусть*

а) *H — гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и нормой $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$;*
б) *$x, x_1, \dots, x_n$ — элементы из H;*
в) *$\Omega \subseteq R^l$ и $\alpha : \Omega \to R^n$ — непрерывная вектор-функция, $\alpha(\omega) = \{\alpha_i(\omega),\ i = \overline{1,n}\}$;*
г) *линейная алгебраическая система*

$$\sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x_j\rangle \overline{\alpha}_i = \langle x, x_j\rangle, \quad j = \overline{1,n}, \tag{1}$$

имеет единственное решение $\overline{\alpha} = \{\overline{\alpha}_i\} \in R^n$;
д) *уравнение $\alpha(\omega) = \overline{\alpha}$ имеет в области Ω единственное решение $\omega = \overline{\omega}$.*

Тогда функция $\psi(\omega) = \left\| x - \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(\omega) x_i \right\|$ имеет в области Ω единственную точку минимума $\omega = \overline{\omega}$.

Доказательство. В силу условия г) функция $\varphi(\beta) = \left\| x - \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i x_i \right\|$, где $\beta = \{\beta_i\} \in R^n$, имеет в пространстве R^n единственную точку минимума $\beta = \overline{\alpha}$. Действительно, по теореме об ортогональном разложении элементов гильбертова пространства ([5], с. 162, теорема 1) $x = x_0 + x_\perp$, где $x_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{\alpha}_i x_i$, $\overline{\alpha} = \arg\min\limits_{\beta \in R^n} \varphi(\beta)$, а $x_\perp$ — элемент, ортогональный к каждому x_i, $i = \overline{1,n}$. Умножая это равенство скалярно на x_j, $j = \overline{1,n}$, получаем, что $\overline{\alpha}$ удовлетворяет системе (1), а эта система имеет единственное решение. Далее, $\overline{\omega}$ доставляет минимум функции ψ, т. к. $\alpha(\overline{\omega}) = \overline{\alpha}$. Предположим, что функция ψ имеет две различные точки минимума $\overline{\omega}$ и $\overline{\overline{\omega}}$, т. е. $\psi(\overline{\omega}) = \psi(\overline{\overline{\omega}})$ и $\overline{\omega} \neq \overline{\overline{\omega}}$. Тогда $\psi(\overline{\omega}) = \psi(\overline{\overline{\omega}}) = \varphi(\overline{\alpha}) = \varphi(\overline{\overline{\alpha}})$, где $\overline{\alpha} = \alpha(\overline{\omega})$, а $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha(\overline{\overline{\omega}})$. Но так как $\varphi(\overline{\alpha}) = \min\limits_{\beta \in R^n} \varphi(\beta)$, то $\overline{\alpha} = \overline{\overline{\alpha}}$ и $\overline{\omega} = \overline{\overline{\omega}}$ — противоречие. Следовательно, функция ψ имеет единственную точку минимума $\omega = \overline{\omega}$. $\square$

Следствие. Если выполнены условия г), д) и справедливо равенство $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{\alpha}_i x_i$, то уравнение $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(\omega) x_i$ имеет единственное решение $\omega = \overline{\omega}$.

Действительно, если $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{\alpha}_i x_i$, то $\psi(\overline{\omega}) = 0$, следовательно, уравнение $x - \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i(\omega) x_i = 0$ имеет единственное решение $\omega = \overline{\omega}$.

Пусть математическая модель объекта имеет вид

$$A_0(t, \overset{t}{\underset{\theta}{C}} x) + B_0(t, \overset{t}{\underset{\theta}{C}} v) - \sum_{i=1}^{K} \alpha_i(\omega) A_i(t, \overset{t}{\underset{\theta}{C}} x) - \sum_{j=1}^{L} \beta_j(\omega) B_j(t, \overset{t}{\underset{\theta}{C}} v) = 0, \quad t \in [\theta, T], \tag{2}$$

где $A_i(t, \cdot) : X_{[\theta,t]} \to R^q$, $B_j(t, \cdot) : V_{[\theta,t]} \to R^q$ при каждом (почти каждом) $t \in [\theta, T]$, операторы $\overline{A}_i : X_{[\theta,T]} \to B_3^q[\theta, T]$, $(\overline{A}_i x)(t) = A_i(t, \overset{t}{\underset{\theta}{C}} x)$ и $\overline{B}_j : V_{[\theta,T]} \to B_3^q[\theta, T]$, $(\overline{B}_j v)(t) = B_j(t, \overset{t}{\underset{\theta}{C}} v)$ непрерывны, $\omega \in \Omega \subseteq R^l$, $\alpha_i : \Omega \to R^1$ и $\beta_j : \Omega \to R^1$ — непрерывные функции.

Пусть измерения входа и выхода объекта имеют вид

$$y_j = \overline{Q} \overset{\tau}{\underset{\mu}{C}} \overline{B}_j(\overline{v}), \quad j = \overline{0, L}, \tag{3}$$

$$z_i = \overline{Q} \overset{\tau}{\underset{\mu}{C}} \overline{A}_i(\overline{x}), \quad i = \overline{0, K}, \tag{4}$$

где $\mu \in (\theta, \tau]$, $\overline{Q} : B_3^q[\mu, \tau] \to H$ — линейный ограниченный оператор, H — гильбертово пространство.

Ответ на вопрос 1 дает

Теорема 1. *Если задача идентификации для* (2)–(4) *разрешима, то существует такое* $\widehat{\omega} \in \Omega$, *что* $z_0 + y_0 - \sum\limits_{i=1}^{K} \alpha_i(\widehat{\omega}) z_i - \sum\limits_{j=1}^{L} \beta_i(\widehat{\omega}) y_j = 0$.

Доказательство. Если задача идентификации для (2)–(4) разрешима, то существует такое $\widehat{\omega} \in \Omega$, что $\overline{A}_0 \overline{x} + \overline{B}_0 \overline{v} - \sum\limits_{i=1}^{K} \alpha_i(\widehat{\omega}) \overline{A}_i \overline{x} - \sum\limits_{j=1}^{L} \beta_j(\widehat{\omega}) \overline{B}_j \overline{v} = 0$. Тогда $\overline{Q} \overset{\tau}{\underset{\mu}{C}} \Big[\overline{A}_0 \overline{x} + \overline{B}_0 \overline{v} - \sum\limits_{i=1}^{K} \alpha_i(\widehat{\omega}) \overline{A}_i \overline{x} - \sum\limits_{j=1}^{L} \beta_j(\widehat{\omega}) \overline{B}_j \overline{v}\Big] = 0$ и далее $z_0 + y_0 - \sum\limits_{i=1}^{K} \alpha_i(\widehat{\omega}) z_i - \sum\limits_{j=1}^{L} \beta_j(\widehat{\omega}) y_i = 0$. $\square$

Эта теорема дает необходимое условие разрешимости задачи идентификации для модели (2) при измерениях входа и выхода объекта (3), (4).

Следствие. Если $\inf\limits_{\omega \in \Omega} \Big\| z_0 + y_0 - \sum\limits_{i=1}^{K} \alpha_i(\omega) z_i - \sum\limits_{j=1}^{L} \beta_j(\omega) y_j \Big\| > 0$, то задача идентификации для (2)–(4) неразрешима.

Ответ на вопрос 2 дает

Теорема 2. *Пусть*

а) $\exists \widehat{\omega} \in \Omega : \overline{A}_0 \overline{x} + \overline{B}_0 \overline{v} - \sum\limits_{i=1}^{K} \alpha_i(\widehat{\omega}) \overline{A}_i \overline{x} - \sum\limits_{j=1}^{L} \beta_j(\widehat{\omega}) \overline{B}_j \overline{v} = 0$;

б) *линейная алгебраическая система*

$$\sum_{i=1}^{K}\langle z_i, z_\xi\rangle\overline{\alpha}_i + \sum_{j=1}^{L}\langle y_j, z_\xi\rangle\overline{\beta}_j = \langle z_0 + y_0, z_\xi\rangle, \quad \xi = \overline{1,K};$$
$$\sum_{i=1}^{K}\langle z_i, y_\eta\rangle\overline{\alpha}_i + \sum_{j=1}^{L}\langle y_j, z_\eta\rangle\overline{\beta}_j = \langle z_0 + y_0, z_\eta\rangle, \quad \eta = \overline{1,L}, \tag{5}$$

имеет единственное решение $\{\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_K, \overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_L\}$ *в пространстве* R^{K+L};

в) *система*

$$\alpha_i(\omega) = \overline{\alpha}_i, \quad i = \overline{1,K};$$
$$\beta_j(\omega) = \overline{\beta}_j, \quad j = \overline{1,L}, \tag{6}$$

имеет в области Ω *единственное решение* $\omega = \overline{\omega}$.

Тогда задача идентификации для (2)–(4) *имеет единственное решение* $\omega = \overline{\omega}$.

Доказательство. В силу условия а) выполняется равенство $z_0+y_0-\sum\limits_{i=1}^{K}\alpha_i(\widehat{\omega})z_i-\sum\limits_{j=1}^{L}\beta_j(\widehat{\omega})y_j=0$, следовательно, $z_0 + y_0 = \sum\limits_{i=1}^{K}\widehat{\alpha}_i z_j + \sum\limits_{j=1}^{L}\widehat{\beta}_j y_j$, где $\widehat{\alpha}_i = \alpha_i(\widehat{\omega})$, $\widehat{\beta}_j = \beta_j(\widehat{\omega})$. Умножая скалярно обе части этого равенства на z_ξ, $\xi = \overline{1,K}$, и y_η, $\eta = \overline{1,L}$, получим, что $\widehat{\alpha}_i$ и $\widehat{\beta}_j$ удовлетворяют системе (5). Но эта система имеет единственное решение $\{\overline{\alpha}_j, \overline{\beta}_j\}$, следовательно, $\widehat{\alpha}_i = \overline{\alpha}_i$, $\widehat{\beta}_j = \overline{\beta}_j$ и выполняется условие $z_0 + y_0 - \sum\limits_{i=1}^{K}\overline{\alpha}_i z_i - \sum\limits_{j=1}^{L}\overline{\beta}_j y_j = 0$. Отсюда в силу следствия к лемме 1 получаем, что уравнение $z_0 - y_0 - \sum\limits_{i=1}^{K}\alpha_i(\omega)z_i - \sum\limits_{j=1}^{L}\beta_j(\omega)y_j = 0$ имеет единственное решение $\omega = \overline{\omega}$. Таким образом, $\widehat{\omega} = \overline{\omega}$ и задача идентификации для (2)–(4) имеет единственное решение $\omega = \overline{\omega}$. □

Эту теорему иллюстрирует

Пример 1. Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из последовательно соединенных индуктивности и активного сопротивления. Через $\overline{v}(t)$ обозначим напряжение на входе цепи, а через $\overline{x}(t)$ — ток в цепи, L — величина индуктивности, R — величина активного сопротивления.

Пусть $\overline{v}(t) = 1 + t$, $t \in [0,4]$, а $\overline{x}(t) = t$, $t \in [0,4]$, $V_{[\theta,T]} = B_1^1[\theta,T] = C^1_{[0,4]}$, $B_2^1[\theta,T] = C^1_{[0,4]}$, $X_{[\theta,T]} = C_1^1[0,4]$, где $C^1_{[0,4]}$ — пространство непрерывных на $[0,4]$ функций с нормой $\|x\| = \max\limits_{t\in[0,4]}|x(t)|$, $C_1^1[0,4]$ — множество непрерывно дифференцируемых на $[0,4]$ функций.

Математической моделью этой цепи будет

$$x(t) - \alpha + \frac{R}{L}\int_0^t x(s)ds - \frac{1}{L}\int_0^t v(s)ds = 0, \quad t \in [0,4],$$

где $v \in C^1_{[0,4]}$, $x \in C_1^1[0,4]$, $\omega = \{\alpha, R, L\}$, $\Omega = \{\alpha, R, L : \alpha \in R^1,\ R \in R^1,\ L \in R^1,\ R > 0,\ L > 0\}$.

Пусть измерения входа и выхода объекта имеют вид

$$\widehat{y}_i = 1, \qquad \overline{y}_i = \int_0^i \overline{v}(s)ds,$$
$$\widehat{z}_i = \overline{x}(i), \quad \overline{z}_i = \int_0^i \overline{x}(s)ds, \quad i = 0,1,2,3,$$

а $H = R^4$ (скалярное произведение в R^4 имеет вид $\langle x,y\rangle = \sum\limits_{i=0}^{3}x_i y_i$, норма $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=0}^{3}x_i^2}$). Проверим выполнение условий теоремы 2 для этого примера.

1) Условие а) выполняется, т. к.

$$\overline{x}(t) - \alpha + \frac{R}{L}\int_0^t \overline{x}(s)ds - \frac{1}{L}\int_0^t \overline{v}(s)ds = 0$$

при $\alpha = 0$, $R = 1$ и $L = 1$ для всех $t \in [0, 4]$.

2) Система (5) в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} \langle\widehat{y},\widehat{y}\rangle\overline{\alpha}_1 + \langle\overline{z},\widehat{y}\rangle\overline{\alpha}_2 + \langle\overline{y},\widehat{y}\rangle\overline{\beta}_1 = \langle\widehat{z},\widehat{y}\rangle, \\ \langle\widehat{y},\overline{z}\rangle\overline{\alpha}_1 + \langle\overline{z},\overline{z}\rangle\overline{\alpha}_2 + \langle\overline{y},\overline{z}\rangle\overline{\beta}_1 = \langle\widehat{z},\overline{z}\rangle, \\ \langle\widehat{y},\overline{y}\rangle\overline{\alpha}_1 + \langle\overline{z},\overline{y}\rangle\overline{\alpha}_2 + \langle\overline{y},\overline{y}\rangle\overline{\beta}_1 = \langle\widehat{z},\overline{y}\rangle, \end{cases}$$

где $\widehat{y} = \{\widehat{y}_0, \widehat{y}_1, \widehat{y}_2, \widehat{y}_3\}$, $\overline{z} = \{\overline{z}_0, \overline{z}_1, \overline{z}_2, \overline{z}_3\}$, $\widehat{z} = \{\widehat{z}_0, \widehat{z}_1, \widehat{z}_2, \widehat{z}_3\}$, $\overline{y} = \{\overline{y}_0, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3\}$. Эта система имеет единственное решение $\overline{\alpha}_1 = 0$, $\overline{\alpha}_2 = -1$, $\overline{\beta}_1 = 1$, т. е. выполняется условие б) теоремы 2.

3) Система (6) для этого примера имеет вид

$$\alpha = \overline{\alpha}_1 = 0, \quad -\frac{R}{L} = \overline{\alpha}_2 = -1, \quad \frac{1}{L} = \overline{\beta}_1 = 1.$$

Эта система имеет в области Ω единственное решение $\overline{\omega} = \{\overline{\alpha}, \overline{R}, \overline{L}\} = \{0, 1, 1\}$, т. е. выполняется условие в). Таким образом, задача идентификации для этого примера имеет единственное решение $\omega = \overline{\omega} = \{0, 1, 1\}$. Следует отметить, что условие теоремы 1 здесь тоже выполняется, т. к. справедливо равенство $\overline{z} - \overline{\alpha}_1\widehat{y} - \overline{\alpha}_2\overline{y} - \overline{\beta}_1\overline{z} = 0$.

Ответ на вопрос 3: если выполняются условия теоремы 2, то для вычисления искомого $\overline{\omega}$ нужно решить систему (5) относительно $\{\overline{\alpha}_1, \dots, \overline{\alpha}_K, \overline{\beta}_1, \dots, \overline{\beta}_L\}$, а затем вычислить $\overline{\omega}$, решив систему (6).

3. Приближенная идентификация

Как видно из формул (2)–(4), измерения входа и выхода объекта (3) и (4) зависят от вида модели (2). Но так бывает не всегда, поэтому имеет смысл поставить задачу приближенной идентификации, которую можно сформулировать следующим образом: *найти такое* $\omega \in \Omega$, *при котором* $\|\overline{F}(\widetilde{x}, \widetilde{v}, \omega)\| \to \min \le \varepsilon_1$, *где*

$$\widetilde{v} = \sum_{k=1}^{K} \overline{\beta}_k \varphi_k, \quad K : \min_{\{\beta_k\}} \left\| y - P\left(\overset{\tau}{\underset{\nu}{C}} \sum_{k=1}^{K} \beta_k \varphi_k \right) \right\| \le \varepsilon_2,$$

$$\{\overline{\beta}_k\} = \arg\min_{\{\beta_k\}} \left\| y - P\left(\overset{\tau}{\underset{\nu}{C}} \sum_{k=1}^{K} \beta_k \varphi_k \right) \right\|, \quad \beta_k \in R^1,$$

$$\widetilde{x} = \sum_{k=1}^{L} \overline{\gamma}_k \psi_k, \quad L : \min_{\{\gamma_k\}} \left\| z - Q\left(\overset{\tau}{\underset{\nu}{C}} \sum_{k=1}^{L} \gamma_k \psi_k \right) \right\| \le \varepsilon_3,$$

$$\{\overline{\gamma}_k\} = \arg\min_{\{\gamma_k\}} \left\| z - Q\left(\overset{\tau}{\underset{\nu}{C}} \sum_{k=1}^{L} \gamma_k \psi_k \right) \right\|, \quad \gamma_k \in R^1,$$

ε_1, ε_2, ε_3 — *заданные малые положительные числа или нули,* $\{\varphi_k,\ k = 1, 2, \dots\}$ — *полная система элементов в банаховом пространстве* $V_{[\theta,T]}$, $\{\psi_k,\ k = 1, 2, \dots\}$ — *полная система элементов в банаховом пространстве* $X_{[\theta,T]}$.

Замечание 1. Если $\widetilde{v} = \overline{v}$, $\widetilde{x} = \overline{x}$, то решение задачи приближенной идентификации является решением и исходной задачи идентификации.

Замечание 2. Если $\widetilde{\omega}$ — решение задачи приближенной идентификации, то приближенная математическая модель рассматриваемого объекта имеет вид

$$\overline{F}(x, v, \widetilde{\omega}) = 0.$$

Пусть далее математической моделью будет

$$F_0(x,v) - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(\omega) F_i(x,v) = 0, \tag{7}$$

где $F_i : X_{[\theta,T]} \times V_{[\theta,T]} \to H$ — непрерывные операторы, $\omega \in \Omega \subseteq R^l$, $\alpha_i : \Omega \to R^1$ — непрерывные функции, а измерения входа и выхода объекта имеют вид

$$y = \overline{P}(\overset{\tau}{\underset{\nu}{C}}\,\overline{v}), \tag{8}$$

$$z = \overline{Q}(\overset{\tau}{\underset{\nu}{C}}\,\overline{x}), \tag{9}$$

где $\overline{P} : V_{[\nu,\tau]} \to \overline{Y}$, $\overline{Q} : X_{[\nu,\tau]} \to \overline{Z}$ — линейные ограниченные операторы, $\overline{Y}$ и $\overline{Z}$ — гильбертовы пространства.

Введем обозначения

$$\overline{y}_k = \overline{P}(\overset{\tau}{\underset{\nu}{C}}\,\varphi_k), \quad \overline{z}_k = \overline{Q}(\overset{\tau}{\underset{\nu}{C}}\,\psi_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Теорема 3. *Пусть*

а) *система элементов* $\{\overline{y}_k,\ k = 1, 2, \dots\}$ *полна в* $\overline{Y}$;

б) *система элементов* $\{\overline{z}_k,\ k = 1, 2, \dots\}$ *полна в* $\overline{Z}$;

в) *линейная алгебраическая система*

$$\sum_{k=1}^{K} \langle \overline{y}_k, \overline{y}_\xi \rangle \overline{\beta}_k = \langle y, \overline{y}_\xi \rangle, \quad \xi = \overline{1,K},$$

имеет единственное решение $\{\overline{\beta}_k\}$ *в пространстве* R^K, *где* $K : \left\| y - \sum_{k=1}^{K} \beta_k \overline{y}_k \right\| \le \varepsilon_2$ *при соответствующих* $\beta_k \in R^1$;

г) *линейная алгебраическая система*

$$\sum_{k=1}^{L} \langle \overline{z}_k, \overline{z}_\eta \rangle \overline{\gamma}_k = \langle z, \overline{z}_\eta \rangle, \quad \eta = \overline{1,L},$$

имеет единственное решение $\{\overline{\gamma}_k\}$ *в пространстве* R^L, *где* $L : \left\| z - \sum_{k=1}^{L} \gamma_k \overline{z}_k \right\| \le \varepsilon_3$ *при соответствующих* $\gamma_k \in R^1$;

д) *линейная алгебраическая система*

$$\sum_{i=1}^{N} \langle u_i, u_j \rangle \overline{\alpha}_i = \langle u_0, u_j \rangle, \quad j = \overline{1,N},$$

имеет единственное решение $\{\overline{\alpha}_i\} \in R^N$, *где*

$$u_i = F_i(\widetilde{x}, \widetilde{v}), \quad \widetilde{x} = \sum_{k=1}^{L} \overline{\gamma}_k \psi_k, \quad \widetilde{v} = \sum_{k=1}^{K} \overline{\beta}_k \varphi_k;$$

е) *система* $\{\alpha_i(\omega) = \overline{\alpha}_i,\ i = \overline{1,N}\}$ *имеет в области* Ω *единственное решение* $\overline{\omega}$;

ж) *выполняется неравенство*

$$\left\| u_0 - \sum_{i=1}^{N} \overline{\alpha}_i u_i \right\| \le \varepsilon_1 .$$

Тогда задача приближенной идентификации для (7)–(9) *имеет решение* $\omega = \overline{\omega}$.

Доказательство. В силу условия а) найдутся такие K и $\{\beta_k,\, k=\overline{1,K}\}$, что $\left\| y - \sum\limits_{k=1}^{K} \beta_k \overline{y}_k \right\| \le \varepsilon_2$, следовательно, $\min\limits_{\{\beta_k\}} \left\| y - \sum\limits_{k=1}^{K} \beta_k \overline{y}_k \right\| \le \varepsilon_2$. Этот минимум в силу условия в) и леммы 1 достигается в единственной точке $\{\beta_k\} = \{\overline{\beta}_k\} \in R^K$ и определяется $\widetilde{v} = \sum\limits_{k=1}^{K} \overline{\beta}_k \varphi_k$.

Далее в силу условия б) найдутся такие L и $\{\gamma_k,\, k=\overline{1,L}\}$, что $\left\| z - \sum\limits_{k=1}^{L} \gamma_k \overline{z}_k \right\| \le \varepsilon_3$, следовательно, $\min\limits_{\{\gamma_k\}} \left\| z - \sum\limits_{k=1}^{L} \gamma_k \overline{z}_k \right\| \le \varepsilon_3$. Этот минимум в силу условия г) и леммы 1 достигается в единственной точке $\{\overline{\gamma}\} \in R^L$ и определяется $\widetilde{x} = \sum\limits_{k=1}^{L} \overline{\gamma}_k \psi_k$.

Далее в силу условий д), е), ж) и леммы 1 $\min\limits_{\omega\in\Omega} \left\| F_0(\widetilde{x},\widetilde{v}) - \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i(\omega) F_i(\widetilde{x},\widetilde{v}) \right\| \le \varepsilon_1$, причем этот минимум достигается в единственной точке $\omega = \overline{\omega}$. Таким образом, задача приближенной идентификации для (7)–(9) имеет решение $\omega = \overline{\omega}$. $\square$

Пример 2. Рассмотрим электрическую цепь из примера 1.

Пусть $\overline{v}(t) = 1+t$, $\overline{x}(t) = t$, $t\in[0,3]$, а измерения входа и выхода имеют вид

$$y_1 = \overline{v}(1) = 2, \quad y_2 = \overline{v}(2) = 3, \tag{10}$$

$$z_1 = \overline{x}(1) = 1, \quad z_2 = \overline{x}(2) = 2. \tag{11}$$

Математической моделью цепи будет

$$x(t) - \alpha + \frac{R}{L}\int_0^t x(s)ds - \frac{1}{L}\int_0^t v(s)ds = 0, \quad t\in[0,3], \tag{12}$$

где $v \in C^1_{[0,3]}$, $x \in C^1_{[0,3]}$, $\omega = \{\alpha, R, L\}$, $\Omega = \{\omega : \alpha\in R^1,\, R\in R^1,\, L\in R^1,\, R>0,\, L>0\}$.

Пусть $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0{,}001$ и $\varphi_k(t) = \psi_k(t) = t^{k-1}$. Проверим выполнение условий теоремы 2.

Условие а) выполняется, т. к. $\overline{y}_k = \{1^{k-1}, 2^{k-1}\}$, $k=1,2,3,\ldots$, и эта система векторов полна в пространстве $\overline{Y} = R^2$.

Условие б) тоже выполняется, т. к. система векторов $\overline{z}_k = \{1^{k-1}, 2^{k-1}\}$, $k=1,2,3,\ldots$, полна в пространстве $\overline{Z} = R^2$.

Условие в) выполняется, т. к. при $K=2$, $\beta_1 = 1$ и $\beta_2 = 1$ справедливо неравенство $\|y - \beta_1\overline{y}_1 - \beta_2\overline{y}_2\| = 0 < \varepsilon_2 = 0{,}001$, где $y = \{y_1, y_2\}$, и линейная алгебраическая система

$$\langle \overline{y}_1, \overline{y}_1\rangle \overline{\beta}_1 + \langle \overline{y}_2, \overline{y}_1\rangle \overline{\beta}_2 = \langle y, \overline{y}_1\rangle,$$
$$\langle \overline{y}_1, \overline{y}_2\rangle \overline{\beta}_1 + \langle \overline{y}_2, \overline{y}_2\rangle \overline{\beta}_2 = \langle y, \overline{y}_2\rangle$$

имеет единственное решение $\{\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2\} = \{1,1\}$.

Условие г) выполняется, т. к. при $L=2$, $\gamma_1 = 0$ и $\gamma_2 = 1$ справедливо неравенство $\|z - \gamma_1\overline{z}_1 - \gamma_2\overline{z}_2\| = 0 < \varepsilon_3 = 0{,}001$, где $z = \{z_1, z_2\}$, и линейная алгебраическая система

$$\langle \overline{z}_1, \overline{z}_1\rangle \overline{\gamma}_1 + \langle \overline{z}_2, \overline{z}_1\rangle \overline{\gamma}_2 = \langle z, \overline{z}_1\rangle,$$
$$\langle \overline{z}_1, \overline{z}_2\rangle \overline{\gamma}_1 + \langle \overline{z}_2, \overline{z}_2\rangle \overline{\gamma}_2 = \langle z, \overline{z}_2\rangle$$

имеет единственное решение $\{\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2\} = \{0,1\}$.

Условие д) выполняется, т. к. $W = H = L^1_2[0,3]$ — пространство квадратично суммируемых на $[0,3]$ функций со скалярным произведением $\langle x,y\rangle = \int\limits_0^3 x(t)y(t)dt$ и нормой $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$, $N=3$, $\widetilde{v}(t) = 1+t$, $\widetilde{x}(t) = t$, $u_0(t) = t$, $u_1(t) = 1$, $u_2(t) = \int\limits_0^t \widetilde{x}(s)ds = \frac{1}{2}t^2$, $u_2(t) = \int\limits_0^t \widetilde{v}(s)ds = t + \frac{1}{2}t^2$, и линейная алгебраическая система $\sum\limits_{i=1}^{3}\langle u_i, u_j\rangle\overline{\alpha}_i = \langle u_0, u_j\rangle$, $j=\overline{1,3}$, имеет единственное решение $\{\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,\overline{\alpha}_3\}=\{0,-1,1\}$.

Условие е) выполняется, т. к. система

$$\alpha=\overline{\alpha}_1=0,\quad -\frac{R}{L}=\overline{\alpha}_2=-1,\quad \frac{1}{L}=\overline{\alpha}_3=1$$

имеет в области Ω единственное решение $\{\alpha, R, L\}=\{0,1,1\}$.

И, наконец, условие ж) выполняется, т. к. справедливо неравенство

$$\left\|u_0-\sum_{i=1}^{3}\overline{\alpha}_i u_i\right\|=0<\varepsilon_1=0{,}001.$$

Таким образом, задача приближенной идентификации для (10)–(12) при $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=0{,}001$ имеет решение $\omega=\overline{\omega}=\{\overline{\alpha},\overline{R},\overline{L}\}=\{0,1,1\}$, а приближенная математическая модель рассматриваемой электрической цепи имеет вид

$$x(t)+\int_0^t x(s)ds-\int_0^t v(s)ds=0,\quad t\in[0,3].$$

4. Идентификация простейших дифференциальных моделей с запаздыванием

Пусть математической моделью объекта будет

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=\sum_{i=1}^{n}a_i x(\mu_i t)+bx(t)+cv(t),\quad t\in[0,T];\\&x(0)=\alpha,\end{aligned}\tag{13}$$

где $v\in C^1_{[0,T]}$, $x\in C^1_1[0,T]$, $C^1_1[0,T]$ — множество непрерывно дифференцируемых на $[0,T]$ функций,

$$\omega=\{a_1,\dots,a_n,\mu_1,\dots,\mu_n,b,c,\alpha\}\in\Omega,$$
$$\Omega=\{\omega: a_i\in R^1,\ \mu_i\in R^1,\ b\in R^1,\ c\in R^1,\ \alpha\in R^1,\ 0<\mu_i\le 1\},$$

а измерения входа и выхода объекта имеют вид

$$y_j=\overline{v}(t_j),\quad j=\overline{0,2n+1},\quad 0=t_0<t_1<\dots<t_{2n+1}<T,\tag{14}$$
$$z_j=\overline{x}(t_j),\quad j=\overline{0,2n+1}.\tag{15}$$

Задачу идентификации поставим так: *по известным $\{y_j,z_j\}$ найти такое $\omega\in\Omega$, при котором выполняются равенства*

$$\begin{aligned}&\dot{\widetilde{x}}(t)=\sum_{i=1}^{n}a_i\widetilde{x}(\mu_i t)+b\widetilde{x}(t)+c\widetilde{v}(t),\quad t\in[0,T];\\&\widetilde{x}(0)=\alpha,\end{aligned}\tag{16}$$

где $\widetilde{v}(t)=\sum\limits_{k=0}^{2n+1}\beta_k t^k:\widetilde{v}(t_j)=y_j$, $j=\overline{0,2n+1}$, а $\widetilde{x}(t)=\sum\limits_{k=0}^{2n+1}\gamma_k t^k:\widetilde{x}(t_j)=z_j$, $j=\overline{0,2n+1}$.

Теорема 4. *Задача идентификации для* (13)–(15) *однозначно разрешима тогда и только тогда, когда система*

$$\begin{cases}\gamma_0\sum\limits_{i=1}^{n}a_i+\gamma_0 b+\beta_0 c=\gamma_1,\quad \alpha=z_0;\\ \gamma_k\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\mu_i^k+\gamma_k b+\beta_k c=(k+1)\gamma_{k+1},\quad k=\overline{1,2n};\\ \gamma_{2n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}a\mu_i^{2n+1}+\gamma_{2n+1}b+\beta_{2n+1}c=0\end{cases}\tag{17}$$

имеет в области Ω *единственное решение* $\overline{\omega} = \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n, \overline{\mu}_1, \ldots, \overline{\mu}_n, \overline{b}, \overline{c}, \overline{\alpha}\}$, *которое и является решением задачи идентификации.*

Доказательство. Полиномы $\widetilde{v}(t)$ и $\widetilde{x}(t)$ являются решением обычной задачи интерполяции и поэтому определяются однозначно. Подставим найденные $\widetilde{v}$ и $\widetilde{x}$ в систему (16), тогда получим равенство

$$\sum_{k=1}^{2n+1} k\gamma_k t^{k-1} - \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{k=0}^{2n+1} \gamma_k \mu_i^k t^k - b\sum_{k=0}^{2n+1} \gamma_k t^k - c\sum_{k=0}^{2n+1} \beta_k t^k = 0$$

для всех $t \in [0, T]$ и $\alpha = z_0$. Этот степенной многочлен равен нулю тогда и только тогда, когда его коэффициенты равны нулю, т. е. когда выполняются равенства (17). Таким образом, система (16) однозначно разрешима относительно $\omega \in \Omega$ тогда и только тогда, когда система (17) имеет в области Ω единственное решение $\omega = \overline{\omega}$. $\square$

Пример 3. Пусть математической моделью будет

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = ax(\mu t) + bx(t) + cv(t), \quad t \in [0, 4]; \\ &x(0) = \alpha, \end{aligned}$$

$\overline{v}(t) = 1 + 2{,}5t + 3{,}75t^2 + 0{,}875t^3$, $\overline{x}(t) = t + t^2 + t^3$, а измерения входа и выхода объекта имеют вид

$$y_j = \overline{v}(j), \quad z_j = \overline{x}(j), \quad j = \overline{0, 3}.$$

Тогда $\widetilde{v}(t) = 1 + 2{,}5t + 3{,}75t^2 + 0{,}875t^3$, $\widetilde{x}(t) = t + t^2 + t^3$, $t \in [0, 4]$, а система (17) примет форму

$$\begin{cases} c = 1, \quad \alpha = 0; \\ a\mu + b + 2{,}5c = 2, \\ a\mu^2 + b + 3{,}75c = 3, \\ a\mu^3 + b + 0{,}875c = 0. \end{cases}$$

Поскольку $c = 1$, то эта система преобразуется к виду

$$\begin{cases} a\mu + b = -0{,}5, \\ a\mu^2 + b = -0{,}75, \\ a\mu^3 + b = -0{,}875. \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы выразим b и подставим во второе и третье уравнения. Тогда получим

$$\begin{aligned} a\mu(\mu - 1) &= -0{,}25, \\ a\mu(\mu^2 - 1) &= -0{,}375. \end{aligned}$$

Второе уравнение этой системы можно записать в виде $a\mu(\mu - 1)(\mu + 1) = -0{,}375$, отсюда $-0{,}25(\mu + 1) = -0{,}375$ и далее $\mu = \frac{0{,}375}{0{,}25} - 1 = 0{,}5$, $a = \frac{-0{,}25}{\mu(\mu-1)} = 1$ и $b = -0{,}5 - a\mu = -1$. Таким образом, искомое $\overline{\omega}$ единственно, $\overline{\omega} = \{\overline{a}; \overline{\mu}; \overline{b}; \overline{c}; \overline{\alpha}\} = \{1; 0,5; -1; 1; 0\}$.

Пусть далее математическая модель имеет вид

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = ax(t) + \sum_{i=1}^{n} b_i x(t - \mu_i) + v(t), \quad t \in [t_0, T]; \\ &x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \xi \in [0, t_0], \quad 0 < \mu_i \le t_0 < T, \end{aligned} \tag{18}$$

где $v \in C^1_{[0,T]}$, $x \in C^1_1[0,T]$, $a \in R^1$, $b_i \in R^1$, $\mu_i \in R^1$, $\varphi \in C^1_1[0,t_0]$, $\omega = \{a, b_1, ..., b_n, \mu_1, ..., \mu_n, \varphi\} \in \Omega$, $\Omega = \{\omega : a \in R^1,\ b_i \in R^1,\ \mu_i \in R^1,\ 0 < \mu_i \le t_0,\ \varphi \in C^1_1[0,t_0]\}$, а измерения входа и выхода объекта имеют вид

$$y_k = \overline{v}(t_k), \quad k = \overline{0,2m}, \quad t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{2m} < T, \tag{19}$$

$$z_k = \overline{x}(t_k), \quad k = \overline{0,2m}. \tag{20}$$

Задачу идентификации поставим так: *по известным $\{y_k, z_k\}$ найти $\omega \in \Omega$, при котором выполняются равенства*

$$\begin{aligned} &\dot{\widetilde{x}}(t) = a\widetilde{x}(t) + \sum_{i=1}^{n} b_i \widetilde{x}(t-\mu_i) + \widetilde{v}(t), \quad t \in [t_0, T]; \\ &\widetilde{x}(\xi) = \varphi(\xi), \quad \xi \in [0, t_0], \end{aligned} \tag{21}$$

где $\widetilde{v}(t) = \alpha_0 + \sum\limits_{i=1}^{m}(\alpha_i \cos\frac{2\pi i t}{T} + \beta_i \sin\frac{2\pi i t}{T})$, $t \in [0,T]$, $\{\alpha_i, \beta_i\} : \widetilde{v}(t_k) = y_k$, $k = \overline{0,2m}$; $\widetilde{x}(t) = \overline{\alpha}_0 + \sum\limits_{i=1}^{m}(\overline{\alpha}_i \cos\frac{2\pi i t}{T} + \overline{\beta}_i \sin\frac{2\pi i t}{T})$, $t \in [0,T]$, $\{\overline{\alpha}_i, \overline{\beta}_i\} : \widetilde{x}(t_k) = z_k$, $k = \overline{0,2m}$.

Теорема 5. *Задача идентификации для* (18)–(20) *однозначно разрешима тогда и только тогда, когда система*

$$\begin{cases} \overline{\alpha}_0(a + \sum\limits_{j=1}^{n} b_j) + \alpha_0 = 0, \quad \varphi(t) = \widetilde{x}(t), \quad t \in [0, t_0]; \\ a\alpha_i + \sum\limits_{j=1}^{n} b_j(\overline{\alpha}_i \cos\frac{2\pi i \mu_j}{T} - \overline{\beta}_i \sin\frac{2\pi i \mu_j}{T}) = \overline{\beta}_i \frac{2\pi i}{T} - \alpha_i, \\ a\beta_i + \sum\limits_{j=1}^{n} b_j(\overline{\alpha}_i \sin\frac{2\pi i \mu_j}{T} + \overline{\beta}_i \cos\frac{2\pi i \mu_j}{T}) = -\overline{\alpha}_i \frac{2\pi i}{T} - \beta_i \end{cases} \tag{22}$$

имеет в области Ω единственное решение $\overline{\omega} = \{\overline{a}, \overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_n, \overline{\mu}_1, \ldots, \overline{\mu}_n, \overline{\varphi}\}$, которое и является решением задачи идентификации.

Доказательство. Тригонометрические многочлены $\widetilde{v}$ и $\widetilde{x}$ являются решением задачи интерполяции и поэтому определяются однозначно. Подставим полученные $\widetilde{v}$ и $\widetilde{x}$ в систему (21), тогда получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{M}\left(\overline{\beta}_i \frac{2\pi i}{T}\cos\frac{2\pi i t}{T} - \overline{\alpha}_i \frac{2\pi i}{T}\sin\frac{2\pi i t}{T}\right) - a\overline{\alpha}_0 - a\sum_{i=1}^{m}\left(\overline{\alpha}_i \cos\frac{2\pi i t}{T} + \overline{\beta}_i \sin\frac{2\pi i t}{T}\right) - \\ - \sum_{j=1}^{n} b_j\left[\overline{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^{m}\left(\overline{\alpha}_i \cos\frac{2\pi i (t-\mu_j)}{T} + \overline{\beta}_i \sin\frac{2\pi i (t-\mu_j)}{T}\right)\right] - \\ - \alpha_0 - \sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i \cos\frac{2\pi i t}{T} + \beta_i \sin\frac{2\pi i t}{T}\right) = 0 \end{aligned}$$

при всех $t \in [t_0, T]$. Этот тригонометрический полином равен нулю тогда и только тогда, когда его коэффициенты равны нулю, т. е. когда выполняются равенства (22). Таким образом, система (21) однозначно разрешима относительно $\omega \in \Omega$ тогда и только тогда, когда система (22) имеет в области Ω единственное решение $\omega = \overline{\omega}$. □

Пример 4. Пусть для объекта имеем

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-\mu) + v(t), \quad t \in [2, 2\pi]; \\ &x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \xi \in [0, 2], \quad 0 < \mu \le 2, \end{aligned} \tag{23}$$

$\overline{v}(t) = (1+\sin 1)\cos t + (1-\cos 1)\sin t + (1-\cos 2)\cos 2t - (2+\sin 2)\sin 2t$, $\overline{x}(t) = \sin t + \cos 2t$, $t \in [0, 2\pi]$, а измерения входа и выхода объекта имеют вид

$$y_k = \overline{v}(t_k), \quad k = \overline{0,4}, \quad t_0 = 2, \quad t_1 = 2{,}5, \quad t_2 = 3, \quad t_3 = 3{,}5, \quad t_4 = 4, \tag{24}$$

$$z_k = \overline{x}(t_k), \quad k = \overline{0,4}. \tag{25}$$

Тогда $\widetilde{v}(t) = \overline{v}(t)$ и $\widetilde{x}(t) = \overline{x}(t)$ при $t \in [0, 2\pi]$. Система (22) для этого примера примет форму

$$\begin{cases} b\sin\mu = \sin 1, \quad \varphi(t) = \sin t + \cos 2t, \quad t \in [0,2]; \\ a + b\cos\mu = -1 + \cos 1, \\ a + b\cos 2\mu = -1 + \cos 2, \\ b\sin 2\mu = \sin 2. \end{cases}$$

Из последнего уравнения этой системы в силу первого уравнения имеем $2\sin 1\cos\mu = \sin 2$, откуда $\cos\mu = \cos 1$ и $\mu = 1$, т.к. $0 < \mu \leq 2$. Далее имеем $b\sin\mu = b\sin 1 = \sin 1$, откуда $b = 1$. В силу второго уравнения $a = -1 + \cos 1 - b\cos\mu = -1$. Таким образом, $\overline{\varpi} = \{\overline{a}, \overline{b}, \overline{\mu}, \overline{\varphi}\} = \{-1; 1; 1; \sin t + \cos 2t\}$ является единственным решением задачи идентификации для (23)–(25).

Замечание 3. Как показывает обзор [6], полученные выше результаты являются новыми по крайней мере по сравнению с результатами работ, описанных в этом обзоре.

Литература

1. Култышев С.Ю., Култышева Л.М. *Имитационное моделирование реальных объектов и параметрическая идентификация функциональных систем* // Вестн. Пермск. гос. тех. ун-та. Матем. и прикл. матем. – 1996. – № 1. – С. 17–22.
2. Култышев С.Ю., Култышева Л.М. *К вопросу об идентификации функционально-дифференциальных систем с последействием* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 3. – С. 16–27.
3. Култышев С.Ю., Чазов А.В. *Идентификация функционально-дифференциальных систем* // Вестн. Пермск. гос. тех. ун-та. Матем. и прикл. матем. – 1999. – С. 182–187.
4. Култышев С.Ю., Култышева Л.М., Чазов А.В. *К вопросу об идентификации* // Вестн. Пермск. гос. тех. ун-та. Прикл. матем. и механика. – 2000. – № 1. – С. 19–22.
5. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
6. Клейман Е.Г. *Идентификация нестационарных объектов* // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 10. – С. 3–45.

Пермский государственный технический университет

Поступила 08.10.2003