ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 12 (535)

УДК 571.98

С.Я. СЕРОВАЙСКИЙ

СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ОПЕРАТОРОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В НЕГЛАДКИХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Наиболее естественный способ анализа нелинейных систем связан с их локальной аппроксимацией линейными объектами. В основе этой процедуры лежит операция дифференцирования. В зависимости от того, в каком смысле понимается аппроксимация и как осуществляется локализация, рассматриваются различные формы дифференцируемости (напр., [1]). Стандартные определения операторных производных (Гато, Фреше и др.) предъявляют весьма жесткие требования к изучаемым операторам. Ослабление этих ограничений, выводящее на более общие типы производных операторов, могло бы расширить возможности анализа нелинейных систем.

Отметим, что существует класс объектов широкой природы, для которых операция дифференцирования всегда имеет смысл. Речь идет о множестве обобщенных функций, которые, несмотря на свою высокую степень общности, оказываются всегда дифференцируемыми в обобщенном смысле. При этом обобщенные производные сохраняют многие свойства обычных производных и в случае существования последних совпадают с ними. В данной работе предлагается распространить принцип определения дифференцирования распределений на операторы. За основу берется секвенциальная теория обобщенных функций, разработанная в [2], где любое распределение оказывается в определенном смысле пределом последовательности гладких функций, а ее производные — пределом последовательности производных этих функций.

В качестве приложения рассматриваются задачи оптимального управления, связанные с негладкими операторами. Для них получены необходимые условия оптимальности, формулируемые в терминах секвенциальных производных. Показывается, что описываемый подход позволяет определить приближенное решение исследуемой задачи.

1. Понятие секвенциальной производной оператора

Пусть заданы линейные нормированные пространства X, Y и некоторая точка $x_0 \in X$. Обозначим через $D = D(X, Y, x_0)$ класс операторов, определенных в окрестности точки x_0 со значениями в пространстве Y и дифференцируемых в этой точке. Для определенности всюду в дальнейшем дифференцируемость будем понимать в смысле Фреше, хотя допустимы и другие типы операторных производных.

Определим семейство $\Sigma = \Sigma(X, Y, x_0)$ последовательностей $\{A_k\}$ операторов класса D, для которых существует такая окрестность U точки x_0, на которой определены все операторы A_k, причем последовательность значений $\{A_k x\}$ сходится в Y равномерно по $x \in U$. Зададим на Σ отношение σ, считая условие $\{A_k\}\sigma\{B_k\}$ выполненным, если найдется такая окрестность U точки x_0, принадлежащая области определения всех операторов A_k и B_k, что имеет место сходимость $(A_k x - B_k x) \to 0$ равномерно по $x \in U$. Рефлексивность и симметричность отношения σ тривиальны. Предположим, что одновременно выполнены условия $\{A_k\}\sigma\{B_k\}$ и $\{B_k\}\sigma\{C_k\}$. Последнее соотношение предполагает существование такой окрестности V точки x_0, на которой определены все операторы B_k и C_k, что имеет место равномерная по $x \in V$ сходимость $(B_k x - C_k x) \to 0$ в Y. Тогда пересечение $W = U \cap V$ оказывается окрестностью точки x_0 и принадлежит областям определения всех операторов A_k и C_k, причем имеет место равномерная по $x \in W$ сходимость $(A_k x - C_k x) \to 0$. Таким образом, отношение σ транзитивно, а значит, является эквивалентностью на Σ.

Зададим множество $SQ = SQ(X, Y, x_0)$ классов эквивалентных в смысле σ последовательностей дифференцируемых операторов, т. е. фактор-множество Σ/σ. Его элементы будем называть *секвенциальными операторами.* Определим оператор $\Psi : D \to SQ$, выбирая в качестве секвенциального оператора $\Psi(A)$ для любого $A \in D$ класс эквивалентности по отношению σ с представителем $\{A_k\}$, где $A_k = A$ для всех k. Обозначим через SD образ множества D при действии оператора Ψ, т. е. любой элемент из множества SD представляет собой такой класс эквивалентности по отношению σ, который включает в себя стационарную последовательность операторов. При этом отображение $\Psi : D \to SD$ оказывается биекцией.

Пусть a — произвольный объект из SQ и $\{A_k\}$ — какая-либо последовательность операторов семейства Σ, являющаяся представителем класса эквивалентности a. Тогда существует такая окрестность U_A точки x_0, что последовательность $\{A_k x\}$ сходится в Y равномерно по $x \in U_A$. Для любой другой последовательности $\{B_k\}$ класса a существует своя окрестность U_B точки x_0, на которой сходится последовательность $\{B_k x\}$. Отметим, что в силу эквивалентности последовательностей $\{A_k\}$ и $\{B_k\}$ на пересечении множеств U_A и U_B пределы последовательностей $\{A_k x\}$ и $\{B_k x\}$ совпадают. Обозначим через $D(A)$ множество всех точек x пространства X, для которых существует такая последовательность $\{A_k\}$ класса a, что имеет место сходимость последовательности $\{A_k x\}$. Очевидно, это множество однозначно определяется секвенциальным оператором a. Введем оператор A на множестве $D(A)$ со значениями в пространстве Y, выбирая в качестве Ax предел соответствующей последовательности $\{A_k x\}$. Если существует другая последовательность операторов $\{B_k\}$ из a, для которой семейство $\{B_k x\}$ будет сходиться, то соответствующий предел непременно совпадет с Ax. Таким образом, значение оператора A в точке x не зависит от того, какая именно последовательность класса a, сходящаяся в этой точке, была выбрана. Тем самым для любого секвенциального оператора a можно однозначно определить некоторый оператор A, действующий из пространства X в Y. Множество всех таких операторов обозначим через Q.

Определение 1. Элементы множества Q будем называть секвенциально дифференцируемыми операторами.

Любой дифференцируемый оператор является секвенциально дифференцируемым, но обратное утверждение не верно. Секвенциально дифференцируемым оказывается такой оператор, который можно локально аппроксимировать в указанном смысле дифференцируемыми операторами.

Определим оператор $B_{SQ} : SQ \to Q$ в соответствии с равенством $B_{SQ}(a) = A$.

Лемма 1. *Оператор B_{SQ} обратим, причем сужение соответствующего обратного оператора на множество SD совпадает с Ψ.*

Доказательство. Произвольный оператор A из множества Q определен в некоторой окрестности U точки x_0 со значениями в пространстве Y, причем для любой точки x из U существует такая последовательность операторов $\{A_k\}$ семейства Σ, что имеет место сходимость $A_k x \to Ax$ в Y. Класс эквивалентности по отношению σ с представителем $\{A_k\}$ является элементом a множества SQ. Поскольку для любой последовательности операторов $\{A_k\}$, определяющих значение оператора A в конкретной точке x области определения этого оператора, предел последовательности $\{A_k x\}$ один и тот же, объект a не зависит от выбора последовательности $\{A_k\}$, сходящейся в точке x, и определяется исключительно рассматриваемым оператором A. Таким образом, отображение B_{SQ} оказывается обратимым.

Предположим теперь, что элемент a принадлежит подмножеству SD из SQ. Тогда среди определяющих его последовательностей операторов семейства Σ непременно существует стационарная последовательность. Обозначив через A элемент этой последовательности, приходим к соотношениям $B_{SQ}(a) = A$ и $\Psi(A) = a$. Отсюда следует, что сужение обратного оператора к B_{SQ} на множество SD совпадает с Ψ. $\square$

Итак, множество SQ с точностью до изоморфизма B_{SQ} можно отождествить с некоторым классом обычных операторов, причем дифференцируемые операторы в точке x_0 в некотором смысле представляются элементами множества SD.

Обозначим через Φ множество всевозможных сходящихся последовательностей $\{y_k\}$ на Y. Определим на Φ отношение φ, считая условие $\{y_k\}\varphi\{z_k\}$ выполненным, если имеет место сходимость $(y_k - z_k) \to 0$ в Y. Обозначим через SY фактор-множество Φ/φ. Определим оператор $B_Y : Y \to SY$ следующим образом. Любому элементу y из Y можно поставить в соответствие стационарную последовательность, определяемую этим элементом и принадлежащую классу Φ. Соответствующий этой последовательности класс эквивалентности по отношению φ выбирается в качестве значения $B_Y y$. С другой стороны, любой объект z множества SY представляет собой класс эквивалентности сходящихся последовательностей из Y. Поскольку пределы всех этих последовательностей совпадают, можно однозначно восстановить соответствующий z элемент множества Y, являющийся пределом указанных последовательностей. Таким образом, оператор B_Y обратим. Тогда с его помощью можно перенести на SY структуру множества Y [3], в результате чего SY становится линейным нормированным пространством, изоморфным Y.

Рассмотрим произвольный секвенциальный оператор a. Пусть $\{A_k\}$ — некоторая определяющая его последовательность операторов семейства Σ, а $D(A)$ – область определения оператора $A = B_{SQ}(a)$. Для любой точки x множества $D(A)$ последовательность $\{A_k x\}$ сходится. Определяемый ею класс эквивалентности по отношению φ не зависит от выбора представителя $\{A_k\}$ класса a и зависит от самого объекта a и точки x. Обозначив указанное значение через ax, установим, что секвенциальный оператор можно интерпретировать как оператор, определенный в окрестности точки x_0 и принимающий значения из множества SY. Отметим, что операторы a и A имеют одну и ту же область определения $D(A)$.

Рассмотрим класс $LD = LD(X, Y, x_0)$ всевозможных линейных непрерывных операторов, действующих из X в Y и являющихся производными в точке x_0 операторов класса D. Определим оператор $\Delta_D : D \to LD$, который ставит в соответствие любому дифференцируемому оператору его производную в этой точке, т. е. $\Delta_D(A) = A'(x_0)$. Зададим класс $\Theta = \Theta(X, Y, x_0)$ последовательностей элементов множества LD с помощью равенства $\Theta = \{\{\Delta_D(A_k)\} \mid \{A_k\} \in \Sigma\}$. Введем на множестве Θ отношение θ, считая условие $\{A_k\}\theta\{B_k\}$ выполненным, если справедливы следующие соотношения: $A_k = \Delta_D(C_k)$, $B_k = \Delta_D(D_k)$ $\forall k$; $\{C_k\}\sigma\{D_k\}$. Очевидно, θ является эквивалентностью на Θ. Определим фактор-множество $LSQ = \Theta/\theta$, элементы которого будем называть *секвенциальными производными*. Отметим, что любому секвенциальному оператору a можно сопоставить элемент $\Delta_{SQ}(a)$, называемый его *секвенциальной производной* в точке x_0 и представляющий собой класс эквивалентности по отношению θ с представителем $\{A'_k(x_0)\}$, где $\{A_k\}$ — последовательность операторов, определяющая a.

Опишем структуру секвенциальных производных.

Лемма 2. *Для любого секвенциального оператора a существует такое линейное нормированное пространство $LSY(a)$, что секвенциальная производная от a с точностью до изоморфизма является линейным непрерывным оператором, действующим из X в $LSY(a)$.*

Доказательство. Определим множество Ω последовательностей $\{y_k\}$ пространства Y, для которых существует элемент $h \in X$ и такая последовательность $\{A_k\}$ класса Σ, что справедливы равенства $y_k = A'_k(x_0)h$ для всех номеров k. Введем отношение эквивалентности ω на Ω, считая условие $\{y_k\}\omega\{z_k\}$ выполненным, если найдутся такой элемент $h \in X$ и последовательности $\{A_k\}$ и $\{B_k\}$ класса Σ, что имеют место соотношения $y_k = A'_k(x_0)h$, $z_k = B'_k(x_0)h$ для любого k, причем $\{A_k\}\sigma\{B_k\}$. Для любого секвенциального оператора a определим множество $LSY(a)$ всевозможных классов эквивалентности вида $\{A'_k(x_0)h\}$ на Ω по отношению ω, где h — произвольный элемент множества X, а $\{A_k\}$ — последовательность операторов класса Σ, представляющая объект a. Поскольку любая секвенциальная производная $\Delta_{SQ}(a)$ сопоставляет каждому элементу $h \in X$ класс эквивалентности на Ω по отношению ω с представителем $\{A'_k(x_0)h\}$, секвенциальную производную можно интерпретировать как оператор, действующий из пространства X на множество $LSY(a)$.

Для любой пары объектов y и z множества $LSY(a)$ существуют такие элементы h и g множества X, что y и z представляют собой классы эквивалентности последовательностей $\{A'_k(x_0)h\}$ и $\{A'_k(x_0)g\}$ на Ω по отношению ω. Тогда для любых скаляров α и β в качестве линейной комбинации $\alpha h + \beta g$ выбирается класс эквивалентности последовательностей $\{A'_k(x_0)(\alpha h + \beta g)\}$. В результате множество $LSY(a)$ наделяется структурой линейного пространства, причем секвенциальная производная, интерпретируемая как оператор, действующий из X в $LSY(a)$, оказывается линейным отображением. Определим на множестве $LSY(a)$ образ нормы X при действии оператора $\Delta_{SQ}(a)$ [3]. Ей соответствует сильнейшая топология, в которой отображение $\Delta_{SQ}(a) : X \to LSY(a)$ непрерывно ([4], с. 40). В результате множество $LSY(a)$ приобретает структуру линейного нормированного пространства, причем последнее отображение является линейным и непрерывным. $\square$

Если секвенциальный оператор a принадлежит множеству SD, то среди представляющих его последовательностей операторов существует стационарная последовательность, определяемая оператором $A = B_{SQ}(a)$. Тогда его секвенциальная производная $\Delta_{SQ}(a)$ будет образована последовательностями производных, эквивалентных в смысле θ стационарной последовательности с элементом $A'(x_0)$. Обозначим через LSD образ множества SD при действии оператора Δ_{SQ}. Любой элемент этого множества представляет собой класс эквивалентности по отношению θ последовательностей производных операторов класса Θ, включающий в себя стационарную последовательность. Тем самым существует взаимно однозначное соответствие B_{LD} между множеством производных LD и множеством LSD. Таким образом, любой обычной производной $A'(x_0)$ дифференцируемого оператора A можно однозначно поставить в соответствие секвенциальную производную $\Delta_{SQ}(a)$ секвенциального оператора $a = (B_{SQ})^{-1}A$, соответствующего изучаемому дифференцируемому оператору, согласно равенству $B_{LD}(A'(x_0)) = \Delta_{SQ}(B_{SQ})^{-1}A$.

Отметим, что понятие секвенциальной производной определено не только на множестве SD, изоморфном классу всевозможных дифференцируемых операторов в данной точке D, но и на всем классе SQ. Учитывая взаимно однозначное соответствие между множествами SQ и Q, можно связать понятие секвенциальной производной с любым секвенциально дифференцируемым оператором.

Определение 2. Под *секвенциальной производной* $\Delta_Q(A)$ оператора A класса Q будем понимать секвенциальную производную секвенциального оператора $(B_{SQ})^{-1}A$.

Множеству LSQ секвенциальных производных можно дать естественную интерпретацию. Очевидно, множество LD производных в точке x_0 операторов, действующих из пространства X в Y, является линейным нормированным подпространством пространства всех линейных непрерывных операторов, действующих из пространства X в Y. Последовательность $\{A'_k(x_0)\}$ элементов пространства LD назовем фундаментальной, если соответствующая последовательность образов $\{A_k x\}$ сходится в пространстве равномерно по всем значениям x из некоторой окрестности точки x_0, на которой определены все операторы A_k. Тогда согласно теореме Хаусдорфа о пополнении метрического пространства (напр., [5], с. 37) множество LSQ по построению является пополнением пространства LD в смысле метрики, соответствующей указанному понятию фундаментальности. Отсюда следует, что с точностью до изометрии секвенциальная производная $\Delta_Q(A)$ является пределом последовательности производных $\{A'_k(x_0)\}$, где $\{A_k\}$ есть семейство операторов, аппроксимирующих в указанном смысле оператор A.

Полученные результаты можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема 1. *Секвенциальная производная $\Delta_Q(A)$ любого секвенциально дифференцируемого оператора A в точке x_0 представляет собой класс эквивалентности по отношению θ после-*

довательности производных $\{A'_k(x_0)\}$, где $\{A_k\}$ — последовательность операторов класса Σ, определяющая оператор A. При этом $\Delta_Q(A)$ является (с точностью до изоморфизма) пределом указанной последовательности производных и представляет собой линейный непрерывный оператор, определенный в пространстве X. В случае дифференцируемости оператора A в точке x_0 его производная совпадает с его секвенциальной производной с точностью до изоморфизма B_{LD}.

Отметим, что понятие секвенциальной производной оператора во многом аналогично понятию производной обобщенной функции, применяемому в секвенциальной теории распределений [2]. Разница лишь в том, что любая обобщенная функция может быть аппроксимирована в соответствующем смысле гладкими функциями, что позволяет всегда определить ее обобщенную производную как соответствующий класс эквивалентности последовательности обычных производных. Понятие секвенциальной производной оператора имеет смысл лишь для секвенциально дифференцируемых операторов, т. е. таких операторов, которые локально аппроксимируемы гладкими операторами.

2. Приложение к теории экстремума

Требуется минимизировать некоторый функционал J на выпуклом замкнутом подмножестве U_∂ линейного нормированного пространства V. Предположим, что существует решение v_0 этой задачи. Если изучаемый функционал дифференцируем по Гато в точке v_0, то для ее нахождения можно воспользоваться вариационным неравенством ([6], с. 18)

$$J'(v_0)(v - v_0) \geq 0 \ \ \forall v \in U. \tag{1}$$

В негладком случае справедлива

Теорема 2. *Если функционал J секвенциально дифференцируем в точке v_0 его минимума на множестве U_∂, то имеет место вариационное неравенство*

$$\Delta_V J(v_0)(v - v_0) \geq 0 \ \ \forall v \in U, \tag{2}$$

где $\Delta_V J(v_0)$ — секвенциальная производная от J в точке v_0.

Доказательство. При условии секвенциальной дифференцируемости существует такая последовательность функционалов $\{J_k\}$, дифференцируемых в v_0, что для некоторой окрестности U этой точки имеет место сходимость $J_k(v) \to J(v)$ равномерно по $v \in U$. Если точка v_0 минимизирует функционал J на множестве U_∂, то справедливо неравенство

$$J(v_0 + t(v - v_0)) - J(v_0) \geq 0 \ \ \forall v \in U_\partial, \quad t \in (0, 1).$$

Подберем число t столь малым, чтобы выполнялось включение $(v_0 + t(v - v_0)) \in U$. Тогда предшествующее неравенство можно записать в виде

$$\lim_{k\to\infty} J_k(v_0 + t(v - v_0)) - \lim_{k\to\infty} J_k(v_0) \geq 0 \ \ \forall v \in U_\partial, \quad t \in (0, 1). \tag{3}$$

Справедливо равенство

$$J_k(v_0 + t(v - v_0)) = J_k(v_0) + J'_k(v_0)(v - v_0) + \eta_k(t),$$

где $\eta_k(t)/t \to 0$ при $t \to 0$ для всех k. Учитывая независимость предельных переходов по параметрам t и k, из соотношения (3) после деления на t и перехода к пределу при $t \to 0$ будем иметь

$$\lim_{k\to\infty} J'_k(v_0)(v - v_0) \geq 0 \ \ \forall v \in U. \tag{4}$$

Согласно теореме 1 секвенциальная производная функционала J в точке v_0 является линейным непрерывным функционалом на V и (с точностью до изоморфизма) пределом последовательности производных $\{J'_k(v_0)\}$. Тогда последнее соотношение может быть записано в виде (2). □

Ранее отмечалось, что в случае дифференцируемости оператора его секвенциальная производная (с точностью до изоморфизма) совпадает с обычной производной. Следовательно, необходимое условие оптимальности (2) сводится к обычному вариационному неравенству (1), если функционал J дифференцируем в точке v_0. Проиллюстрируем действие теоремы 2 для одной задачи оптимального управления системой, описываемой уравнением эллиптического типа с негладкой нелинейностью.

В открытой ограниченной трехмерной области Ω изучается уравнение

$$-\Delta y + g(y) = v + f \tag{5}$$

с однородным граничным условием (задача Дирихле), где v — управление, f — известная функция из пространства $H^{-1}(\Omega)$, g — заданная функция от состояния системы y. Согласно теореме Соболева имеют место непрерывные вложения $H_0^1 \subset L_6$, $H^{-1} \subset L_{6/5}$. Здесь и всюду в дальнейшем для краткости при указании функциональных пространств опускается обозначение множества Ω. Итак, существует такая положительная константа c, что имеют место оценки

$$\|y\|_6 \leq c\|y\| \ \ \forall y \in H_0^1, \quad \|y\|_* \leq c\|y\|_{6/5} \ \ \forall y \in L_{6/5},$$

где через $\|y\|$, $\|y\|_q$ и $\|y\|_*$ обозначены нормы функции y в пространствах H_0^1, L_q и H^{-1} соответственно. Предполагается, что функция g принадлежит классу

$$G = \{g \in C(\mathrm{R}) \mid |g(y)| \leq a + b|y|^5,\ g(y)y > 0,\ [g(y) - g(x)](y - x) \geq 0\ \forall x, y\},\ a > 0,\ b > 0.$$

Тогда отображение $g : L_6 \to L_{6/5}$ непрерывно ([7], с. 312). Управление v выбирается из выпуклого замкнутого подмножества U_∂ пространства L_2. Пользуясь теорией монотонных операторов (напр., [8], с. 182), установим, что для любого управления $v \in U_\partial$ задача Дирихле для уравнения (1) имеет единственное решение $y = y(v)$ из H_0^1, причем оператор $y(\cdot) : L_2 \to H_0^1$ непрерывен.

Рассматривается функционал

$$J(v) = \frac{1}{2}\|y(v) - z\|^2 + \frac{\gamma}{2}\|v\|_2^2,$$

где z — известная функция класса H_0^1, $\gamma > 0$. Задача оптимального управления состоит в отыскании управления v, которое минимизирует функционал J на множестве U_∂.

Отличительной особенностью рассматриваемой задачи является отсутствие дифференцируемости функции g, вследствие чего дифференцирование функционала J не представляется возможным. Это обстоятельство препятствует применению известных методов решения оптимизационных задач для систем, описываемых нелинейными уравнениями эллиптического типа (напр., [9]–[13]). В стандартных методах минимизации недифференцируемых функционалов (напр., [14], [15]) отсутствие гладкости обычно наблюдается непосредственно в функционале, а не в уравнении состояния. В данном случае, напротив, функционал сам по себе является гладким, а недифференцируемый член присутствует в уравнении состояния и имеет операторный, а не функциональный смысл.

Для преодоления имеющихся трудностей воспользуемся описанной ранее методикой. Однако сначала установим разрешимость исследуемой задачи оптимального управления, опирающуюся на следующий результат.

Лемма 3. *Отображение $v \to y(v)$ слабо непрерывно.*

Доказательство. Пусть имеет место сходимость $v_k \to v$ слабо в L_2. Умножая равенство (5) при $v = v_k$ на функцию $y_k = y(v_k)$ и интегрируя результат по области Ω, установим неравенство

$$\|y_k\|^2 + \int_\Omega g(y_k)y_k dx = \int_\Omega (v_k + f)y_k dx \leq \|v_k + f\|_*\|y_k\|.$$

В силу определения множества G второе слагаемое левой части этого неравенства неотрицательно. Тогда последовательность $\{y_k\}$ ограничена в пространстве H_0^1. После выделения подпоследовательности (с сохранением прежнего обозначения) имеем сходимость $y_k \to y$ слабо в H_0^1.

Применяя теорему Реллиха–Кондрашова, установим сходимость $y_k \to y$ сильно в L_2 и п. в. на Ω. Учитывая непрерывность функции g, получаем сходимость $g(y_k) \to g(y)$ п. в. на Ω. Пользуясь теоремой Соболева, установим ограниченность последовательности $\{y_k\}$ в пространстве L_6. Тогда, учитывая определение множества G, имеем ограниченность последовательности $\{g(y_k)\}$ в пространстве $L_{6/5}$. Применяя лемму 1.3 ([8], с. 25), установим сходимость $g(y_k) \to g(y)$ слабо в $L_{6/5}$. Умножая равенство (5) на произвольную гладкую функцию λ и интегрируя результат по области Ω, после перехода к пределу заключаем $y = y(v)$. $\square$

Критерий оптимальности для решаемой задачи представляет собой сумму квадратов норм, каждая из которых является ограниченным снизу выпуклым непрерывным функционалом. Учитывая выпуклость и замкнутость множества допустимых управлений и слабую доказанную выше непрерывность функции состояния по управлению, можно легко установить разрешимость задачи стандартными методами (напр., [9], с. 13). Таким образом, справедлива

Лемма 4. *Задача оптимального управления разрешима.*

В соответствии с описанной ранее методикой осуществим гладкую аппроксимацию минимизируемого функционала. Рассмотрим последовательность непрерывно дифференцируемых функций $\{g_k\}$ класса G, удовлетворяющих условиям

$$|g_{ky}(y)| \le a_1 + b_1|y|^4 \;\; \forall y \in \mathbb{R}, \;\; k = 1, 2, \dots\, ; \;\; g_k(y) \to g(y) \text{ в } L_{6/5} \text{ равномерно по } y, \tag{6}$$

где $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, $g_{ky}(y)$ — производная от g_k. Тогда оператор $g_k(\cdot) : L_6 \to L_{6/5}$ дифференцируем по Фреше, причем справедливо равенство ([7], с. 312)

$$g_k'(y)h(x) = g_{ky}(y(x))h(x) \;\; \forall y \in L_q.$$

Пользуясь теоремой вложения Соболева, установим дифференцируемость по Фреше отображения $g_k(\cdot) : H_0^1 \to H^{-1}$.

Изучим однородную задачу Дирихле для уравнения

$$-\Delta y_k + g_k(y_k) = v + f. \tag{7}$$

Очевидно, для любого допустимого управления v она имеет единственное решение $y_k = y_k(v)$. Определим функционал

$$J_k(v) = \frac{1}{2}\|y_k(v) - z\|^2 + \frac{\gamma}{2}\|v\|_2^2.$$

Покажем, что семейство функционалов $\{J_k\}$ действительно аппроксимирует функционал J.

Лемма 5. *При $k \to \infty$ имеет место сходимость $y_k(v) \to y(v)$ в H_0^1 равномерно по $v \in U_\partial$.*

Доказательство. Из соотношений (5) и (7) следует равенство

$$-\Delta(y_k - y) + g_k(y_k) - g_k(y) + g_k(y) - g(y) = 0.$$

Умножая его на разность $y_k - y$, интегрируя результат по области Ω, будем иметь

$$\|y_k - y\|^2 + \int_\Omega [g_k(y_k) - g_k(y)](y_k - y)dx + \int_\Omega [g_k(y) - g(y)](y_k - y)dx = 0.$$

Согласно определению множества G второе слагаемое в левой части последнего равенства неотрицательно. Пользуясь теоремой Соболева, получаем

$$\|y_k - y\|^2 \le \left| \int_\Omega [g_k(y) - g(y)](y_k - y)dx \right| \le c\|y_k - y\| \, \|g_k(y) - g(y)\|_{6/5}.$$

Отсюда следует $\|y_k - y\| \le c\|g_k(y) - g(y)\|_{6/5}$. Учитывая условия (6), заключаем, что $y_k \to y$ в H_0^1, причем скорость сходимости не зависит от управления. $\square$

Из леммы 5 и определения функционала J_k непосредственно следует

Лемма 6. *При $k \to \infty$ имеет место сходимость $J_k(v) \to J(v)$ равномерно по $v \in U$.*

Для доказательства дифференцируемости функционала J_k используется

Лемма 7. *При сделанных предположениях отображение $y_k(\cdot) : L_2 \to H_0^1$ в любой точке $u \in U$ имеет производную Фреше $Dy_k(u)$, определяемую равенством*

$$\int_\Omega \mu Dy_k(u)h\,dx = \int_\Omega p_{k\mu}(u)h\,dx \ \ \forall \mu \in H^{-1}, \quad h \in L_2, \tag{8}$$

где $p_{k\mu}(u)$ — решение однородной задачи Дирихле для уравнения

$$-\Delta p_{k\mu}(u) + g_{ky}(y_k(u))p_{k\mu}(u) = \mu. \tag{9}$$

Доказательство. Умножая равенство (9) на функцию $p_{k\mu}(u)$ и интегрируя результат по области Ω с учетом определения множества G, установим неравенство

$$\|p_{k\mu}(u)\| \leq \|\mu\|_*. \tag{10}$$

Итак, линейное уравнение (9) для любого μ из класса H^{-1} допускает априорную оценку решения в пространстве H_0^1, что позволяет установить однозначную разрешимость этого уравнения в указанном пространстве. Покажем, что определяемый соотношением (8) линейный непрерывный оператор $Dy_k(u) : L_2 \to H_0^1$ действительно является производной Фреше оператора $y_k(\cdot) : L_2 \to H_0^1$ в произвольной точке u.

Из равенства (7) при $v = u$ после умножения на функцию $p_{k\mu}(u)$ и интегрирования по области Ω будем иметь

$$\int_\Omega [-\Delta y_k(u) + g_k(y_k(u))]p_{k\mu}(u)dx = \int_\Omega p_{k\mu}(u)(u+f)dx.$$

Пользуясь формулой Грина с учетом равенства (9), получим

$$\int_\Omega \mu y_k(u)dx + \int_\Omega [g_k(y_k(u)) - g_{ky}(y_k(u))y_k(u)]p_{k\mu}(u)dx = \int_\Omega p_{k\mu}(u)(u+f)dx.$$

Аналогичным образом в результате умножения равенства (7) при $v = u+h$ на $p_{k\mu}(u)$ и интегрирования по области Ω устанавливается соотношение

$$\int_\Omega \mu y_k(u+h)dx + \int_\Omega [g_k(y_k(u+h)) - g_{ky}(y_k(u))y_k(u+h)]p_{k\mu}(u)dx = \int_\Omega p_{k\mu}(u)(u+h+f)dx.$$

Из последних двух равенств и условия (8) получаем

$$\int_\Omega \mu[y_k(u+h) - y_k(u) - Dy_k(u)h]dx = \eta(\mu,h),$$

где

$$\eta(\mu,h) = \int_\Omega \{g_k(y_k(u)) - g_k(y_k(u+h)) + g_{ky}(y_k(u))[y_k(u+h) - y_k(u)]\}p_{k\mu}(u)dx.$$

В результате установим соотношение

$$\|y_k(u+h) - y_k(u) - Dy_k(u)h\| = \sup_{\|\mu\|_*=1} \left| \int_\Omega \mu[y_k(u+h) - y_k(u) - Dy_k(u)h]dx \right| = \sup_{\|\mu\|_*=1} |\eta(\mu,h)|.$$

Отсюда следует оценка

$$\begin{aligned} &\|y_k(u+h) - y_k(u) - Dy_k(u)h\| = \\ &\quad = \|g_k(y_k(u+h)) - g_k(y_k(u)) - g_{ky}(y_k(u))[y_k(u+h) - y_k(u)]\|_* \sup_{\|\mu\|_*=1} \|p_{k\mu}(u)\| \leq \\ &\qquad \leq \|g_k(y_k(u+h)) - g_k(y_k(u)) - g_{ky}(y_k(u))[y_k(u+h) - y_k(u)]\|_* \end{aligned}$$

в силу условия (10).

Учитывая дифференцируемость оператора $g_k(\cdot) : H_0^1 \to H^{-1}$, имеем равенство

$$g_k(y_k(u+h)) - g_k(y_k(u)) - g_{ky}(y_k(u))[y_k(u+h) - y_k(u)] = \alpha(h),$$

где $\|\alpha(h)\|_* = o(\|y_k(u+h) - y_k(u)\|)$. Из уравнения (7) следует соотношение

$$-\Delta[y_k(u+h) - y_k(u)] + g_k(y_k(u+h)) - g_k(y_k(u)) = h.$$

Умножая это равенство на разность $y_k(u+h) - y_k(u)$ и интегрируя результат по области Ω с учетом определения множества G, установим неравенство

$$\|y_k(u+h) - y_k(u)\| \leq \|h\|_*.$$

В результате получаем условие $\|\alpha(h)\|_* = o(\|h\|_2)$. Тогда справедливо соотношение

$$\|y_k(u+h) - y_k(u) - Dy_k(u)h\| = o(\|h\|_2),$$

откуда следуют утверждения леммы. $\square$

Из лемм 5 и 7 следует секвенциальная дифференцируемость зависимости функции состояния системы от управления.

Лемма 8. *Функционал J_k дифференцируем по Фреше в любой точке $u \in U$, причем*

$$J_k'(u)h = \int_\Omega (\gamma u - p_k(u))h\,dx \quad \forall u \in L_2,$$

где $p_k(u)$ — решение однородной задачи Дирихле для уравнения

$$-\Delta p_k(u) + g_{ky}(y_k(u))p_k(u) = \Delta y_k(u) - \Delta z.$$

Действительно, справедливо равенство

$$J_k'(u)h = \int_\Omega [\Delta z - \Delta y_k(u)]Dy_k(u)h\,dx + \gamma \int_\Omega uh\,dx \quad \forall u \in L_2,$$

откуда в силу формулы Грина и соотношения (8) следуют утверждения леммы.

Из лемм 6 и 8 следует, что изучаемый функционал является секвенциально дифференцируемым. Тогда для его минимизации можно воспользоваться описанной ранее методикой.

Теорема 3. *При сделанных предположениях решение v_0 поставленной экстремальной задачи удовлетворяет соотношению*

$$v_0 = \Pi(p_0/\gamma), \tag{11}$$

где Π есть проектор на множество U_∂, а p_0 — предел в смысле L_2 последовательности $\{p_k(v_0)\}$.

Доказательство. Согласно теореме 2 необходимым условием оптимальности является вариационное неравенство (3) или связанное с ним соотношение (4). В соответствии с леммой 8 последнее условие имеет вид

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega (\gamma v_0 - p_k(v_0))(v_0 - v)dx \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial. \tag{12}$$

По аналогии с неравенством (10) устанавливается оценка $\|p_k(v_0)\| \leq \|\Delta y(v_k) - \Delta z\|_*$. Пользуясь леммой 5, установим ограниченность последовательности $\{y_k(v_0)\}$ в пространстве H_0^1. Тогда из последнего неравенства следует ограниченность в том же классе и последовательности $\{p_k(v_0)\}$. После выделения подпоследовательности $p_k(v_0) \to p_0$ слабо в H_0^1 и (в силу теоремы Реллиха–Кондрашова) сильно в L_2. В результате условие (12) дает вариационное неравенство

$$\int_\Omega (\gamma v_0 - p_0)(v_0 - v)dx \geq 0 \quad \forall v \in U.$$

Отсюда в силу определения проектора на выпуклое подмножество гильбертова пространства следует равенство (11). $\square$

Необходимое условие оптимальности (11) представляет собой специфическое уравнение относительно искомого управления. Задача эта весьма не простая, что характерно для условий оптимальности, связанных с любыми нелинейными бесконечномерными системами (напр., [12]–[16]). Тем не менее, полученные результаты предоставляют возможность практического нахождения приближенного решения задачи. Рассмотрим соотношение

$$J_k'(v_k)(v - v_k) \geq 0 \ \ \forall v \in U_\partial, \tag{13}$$

которое можно понимать как приближенную форму необходимых условий оптимальности (3) и (4).

Теорема 4. *Если для каждого $k = 0, 1, \ldots$ решение v_k вариационного неравенства* (13) *минимизирует функционал J_k на множестве U_∂, то $J(v_k) \to J(v_0)$ при $k \to \infty$.*

Доказательство. Пользуясь теоремой 1.4 ([6], с. 18) с учетом леммы 8, установим, что соотношение (13) есть необходимое условие того, что управление v_k минимизирует функционал J_k на множестве U_∂. Существование соответствующего минимума устанавливается так же, как и в лемме 4. Учитывая очевидное неравенство $J_k(v_k) \leq J_k(v_0)$, установим соотношение

$$J_k(v_k) - J(v_0) \leq J_k(v_0) - J(v_0) \leq \sup_{u \in U} |J_k(u) - J(u)|.$$

Аналогично из неравенства $J(v_0) \leq J(v_k)$ следует

$$J(v_0) - J_k(v_k) \leq J(v_k) - J_k(v_k) \leq \sup_{u \in U} |J_k(u) - J(u)|.$$

В результате получаем оценку

$$|J_k(v_k) - J(v_0)| \leq \sup_{u \in U} |J_k(u) - J(u)|.$$

Отсюда в силу леммы 6 следует $J_k(v_k) \to J(v_0)$. Справедливо соотношение

$$|J(v_k) - J(v_0)| \leq |J(v_k) - J_k(v_k)| + |J_k(v_k) - J(v)| \leq \sup_{u \in U} |J_k(u) - J(u)| + |J_k(v_k) - J(v_0)|.$$

Пользуясь предшествующим результатом и леммой 4, установим желаемую сходимость. □

В вариационном неравенстве (13) производную функционала можно определить с помощью леммы 8.

Лемма 9. *Функция v_k, минимизирующая функционал J_k на множестве U_∂, определяется по формуле*

$$v_k = \Pi(p_k/\gamma), \tag{14}$$

где p_k — решение однородной задачи Дирихле для уравнения

$$-\Delta p_k + g_{ky}(y_k(v_k))p_k = \Delta y_k(v_k) - \Delta z.$$

Действительно, необходимое условие оптимальности (13) в силу леммы 8 записывается в виде

$$\int_\Omega (\gamma v_k - p_k)(u - v_k)dx \geq 0 \ \ \forall u \in U_\partial,$$

откуда непосредственно следует формула (14). □

Согласно лемме 9 для нахождения функции v_k сначала решается однородная задача Дирихле для системы нелинейных эллиптических уравнений

$$\begin{cases} -\Delta y_k + g_k(y_k) = \Pi(p_k/\gamma) + f, \\ -\Delta p_k + g_{ky}(y_k)p_k = \Delta y_k - \Delta z. \end{cases}$$

После этого определяется функция v_k по формуле (14). В соответствии с теоремой 4 при достаточно больших номерах k значение функционала J на этом управлении будет с заданной точностью близко к его минимуму на множестве U_∂. Теорема 4 и лемма 9 определяют следующий метод нахождения приближенного решения исходной экстремальной задачи. Понятно, что соотношения (13) и (14) дают лишь необходимые условия оптимальности, вследствие чего мы не можем гарантировать, что любое их решение удовлетворяет утверждениям теоремы 4. Однако отсутствие достаточности условий оптимальности, как правило, реализуется для нелинейных задач оптимального управления даже в условиях гладкости (в частности, [6], [9]–[13]). Аналогичная аппроксимация негладкого оператора в уравнении состояния управляемой системы последовательностью гладких операторов, но без введения понятия секвенциального дифференцирования проводилась в [16], [17].

3. Секвенциальное дифференцирование решения операторного уравнения

Формализуем полученные выше результаты. Рассматриваются линейные нормированные пространства V, Y, Z и непрерывный оператор $A : Y \to Z$, линейный непрерывный оператор $B : V \to Z$ и функция $f \in Z$. Предполагается, что для любого элемента v из V существует единственный элемент $y(v) \in Y$ такой, что имеет место равенство

$$Ay(v) = Bv + f. \tag{15}$$

В частности, полагая $V = L_2, Y = H_0^1, Z = H^{-1}, Ay = -\Delta y + g(v)$ и выбирая в качестве оператора B вложение пространства L_2 в H^{-1}, приведем уравнение (15) к однородной задаче Дирихле для уравнения (5).

Рассматривается последовательность непрерывно дифференцируемых операторов $A_k : Y \to Z$, удовлетворяющих условию $A_k y \to Ay$ в Z равномерно по $y \in Y$ и таких, что для любого элемента v из V существует единственный элемент $y_k(v) \in Y$ такой, что имеет место равенство

$$A_k y_k(v) = Bv + f. \tag{16}$$

В частности, однородная задача Дирихле для уравнения (7) приводится к виду (16) для

$$A_k y = -\Delta y + g_k(y).$$

Лемма 10. *Если для некоторого значения $u \in V$ производная $A_k'(y(u))$ оператора A_k в точке $y(u)$ обладает непрерывным обратным оператором, то отображение $v \to y_k(v)$ в точке u имеет производную Фреше $Dy_k(u)$, удовлетворяющую равенству*

$$\langle \mu, Dy_k(u)h \rangle = \langle p_{k\mu}(u), Bh \rangle \;\; \forall h \in V, \quad \mu \in Y', \tag{17}$$

где $\langle \mu, a \rangle$ — значение линейного непрерывного функционала μ в точке a, а $p_{k\mu}(u)$ — решение сопряженного уравнения

$$A_k'(y(u))^* p_{k\mu}(u) = \mu. \tag{18}$$

Доказательство. При выполнении условий леммы, учитывая связь между сопряженными уравнениями ([5], с. 459, теорема 2), установим, что уравнение (18) для любого $\mu \in Y'$ имеет единственное решение $p_{k\mu}(u) \in Z'$. Тем самым правая часть равенства (17) имеет смысл. Покажем, что определяемый этим соотношением линейный непрерывный оператор $Dy_k(u) : V \to Y$ действительно является производной Фреше оператора $y_k(\cdot) : V \to Y$ в точке u.

Согласно теореме об обратной функции ([18], с. 40) при выполнении условий леммы обратный оператор $(A_k)^{-1}$ в точке $Bu + f$ имеет производную Фреше

$$[(A_k)^{-1}]'(Bu + f) = [A_k'(y_k(u))]^{-1}.$$

Отсюда следует соотношение

$$\langle \mu, \{[(A_k)^{-1}]'(Bu + f)\} Bh \rangle = \langle \mu, [A_k'(y(u))]^{-1} Bh \rangle \;\; \forall h \in V, \quad \mu \in Y'. \tag{19}$$

В силу равенства $y_k(u) = (A_k)^{-1}(Bu + f)$ левые части условий (17) и (19) совпадают. Учитывая, что оператор, сопряженный к обратному, равен обратному оператору к сопряженному ([5], с. 459), установим совпадение и правых частей указанных соотношений. $\square$

Непосредственным следствием доказанного утверждения является лемма 7. Установим обобщение леммы 5 на изучаемое операторное уравнение.

Лемма 11. *Если обратный оператор A^{-1} непрерывен, то при $k \to \infty$ имеет место сходимость $y_k(v) \to y(v)$ в Y равномерно по $v \in V$.*

Доказательство. Справедливо равенство

$$A_k y_k(v) - Ay_k(v) = Ay(v) - Ay_k(v).$$

Отсюда следует оценка

$$\|Ay_k(v) - Ay(v)\| = \|A_k y_k(v) - Ay_k(v)\| \leq \sup_{y \in Y} \|A_k y - Ay\|.$$

Учитывая сходимость рассматриваемой последовательности операторов, заключаем, что $Ay_k(v) \to Ay(v)$ в Z равномерно по $v \in V$. Отсюда в силу непрерывности оператора A^{-1} следуют утверждения леммы.

Из лемм 10 и 11 выводится

Теорема 5. *При сделанных предположениях решение операторного уравнения* (15) *секвенциально дифференцируемо по управлению.*

Установленный результат можно интерпретировать как некоторое обобщение теоремы об обратной функции [18] на случай секвенциально дифференцируемых операторов. Из теоремы 5, в частности, вытекает секвенциальная дифференцируемость решения однородной задачи Дирихле для уравнения (5) по управлению. Если ставится задача минимизации некоторого функционала на множестве решений уравнений (15), то (при соответствующих ограничениях на минимизируемый функционал) для решения соответствующей экстремальной задачи можно будет воспользоваться теоремой 2, установив утверждения, аналогичные теоремам 3 и 4. Итак, применение секвенциальных производных позволяет исследовать негладкие оптимизационные задачи, не поддающиеся анализу известными методами.

Литература

1. Авербух В.И., Смолянов О.Г. *Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах* // УМН. – 1967. – Т. 22. – Вып. 6. – С. 201–260.
2. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. *Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход.* – М.: Мир, 1976. – 311 с.
3. Бурбаки Н. *Теория множеств.* – М.: Мир, 1965. – 456 с.
4. Бурбаки Н. *Общая топология. Основные структуры.* – М.: Наука, 1968. – 272 с.
5. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1977. – 744 с.
6. Лионс Ж.-Л. *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.* – М.: Мир, 1972. – 414 с.
7. *Функциональный анализ* / Под ред. С.Г. Крейна. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
8. Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* – М.: Мир, 1972. – 588 с.
9. Лионс Ж.-Л. *Управление сингулярными распределенными системами.* – М.: Наука, 1987. – 368 с.
10. Иваненко В.И., Мельник В.С. *Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами.* – Киев, Наук. думка, 1988. – 284 с.
11. Райтум У.Е. *Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений.* – Рига: Зинатне, 1989. – 280 с.

12. Серовайский С.Я. *Оптимизация в нелинейных эллиптических системах с управлением в коэффициентах* // Матем. заметки. – 1993. – Т. 54. – № 2. – С. 85–95.
13. Серовайский С.Я. *Градиентные методы в задаче оптимального управления нелинейной эллиптической системой* // Сиб. матем. журн. – 1996. – Т. 37. – № 5. – С. 1154–1166.
14. Кларк Ф. *Оптимизация и негладкий анализ.* – М.: Наука, 1988. – 280 с.
15. Экланд И., Темам Р. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы.* – М.: Мир, 1979. – 400 с.
16. Серовайский С.Я. *Оптимальное управление для уравнений эллиптического типа с негладкой нелинейностью* // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 309. – № 4. – С. 1420–1424.
17. Серовайский С.Я. *Приближенное решение задачи оптимального управления для сингулярного уравнения эллиптического типа с негладкой нелинейностью* // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 1. – С. 80–86.
18. Обен Ж.-П., Экланд И. *Прикладной нелинейный анализ.* – М.: Мир, 1988. – 510 с.

Казахский национальный
университет им. аль-Фараби

Поступила
22.06.2004