И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2006 МАТЕМАТИКА № 12 (535)

УДК 519.11

В.М. КРАВЦОВ

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ТИПОВ МАКСИМАЛЬНО НЕЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ВЕРШИН МНОГОГРАННИКА ТРЕХИНДЕКСНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

Для многогранника $M(3,n)=\Big\{x=\|x_{ijt}\|_n : x_{ijt}\geq 0 \quad \forall (i,j,t)\in N_n^3,\ \sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n x_{ijt}=1 \quad \forall t\in N_n,$ $\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{t=1}^n x_{ijt}=1 \quad \forall j\in N_n,\ \sum\limits_{j=1}^n\sum\limits_{t=1}^n x_{ijt}=1 \quad \forall i\in N_n\Big\}$, где $N_n=\{1,2,\dots,n\}$, $n\geq 2$, $N_n^3=N_n\times N_n\times N_n$, трехиндексной аксиальной задачи о назначениях, имеющей многочисленные приложения [1]–[3], одна из основных проблем связана с описанием его типов максимально нецелочисленных вершин (м. н. в.), т. е. вершин, число дробных компонент у которых равно $3n-2$. Идентификация типов вершин многогранника проводится по количеству дробных компонент, содержащихся в двумерных сечениях трехиндексных матриц, представляющих собой его вершины. Две вершины x и x' многогранника $M(3,n)$ назовем неэквивалентными, если матрица x' не может быть получена из матрицы x путем перестановки ее двумерных сечений. Естественно считать, что только неэквивалентные вершины этого многогранника имеют различные структуры.

К настоящему времени доказано существование многих, но далеко не всех возможных, типов неэквивалентных м. н. в. многогранника $M(3,n)$, $n\geq 3$, и для них установлено наличие различных структур [4]–[7].

Под двумерным сечением ориентации (i,j) трехиндексной матрицы $x=\|x_{ijt}\|_n$ с фиксированным значением индекса t будем понимать двухиндексную матрицу $x^t=\|x_{ij}^t\|_n$, элементы которой определяются следующим образом: $x_{ij}^t=x_{ijt} \quad \forall (i,j)\in N_n\times N_n$. Таким образом, у матрицы x имеются двумерные сечения ориентации (i,j), (i,t) и (j,t).

Число дробных компонент матрицы $x\in M(3,n)$, содержащихся в двумерном сечении ориентации (i,j) с фиксированным индексом t, обозначим через $z(x_{ij}^t)$, а вектор, составленный из компонент $z(x_{ij}^1), z(x_{ij}^2),\dots,z(x_{ij}^n)$, — через $z(x,(i,j))$.

Согласно лемме 4 [8], для того чтобы матрица $x\in M(3,n)$ была его м. н. в., необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\sum_{t=1}^n z(x_{ij}^t)=3n-2,\quad z(x_{ij}^t)\geq 2 \ \ \forall t\in N_n, \tag{1}$$

причем среди неравенств имеется хотя бы два равенства.

Пусть $y_{ij}^t=z(x_{ij}^t)-1 \quad \forall t\in N_n$. Тогда система (1) примет вид

$$\sum_{t=1}^n y_{ij}^t=2n-2, \tag{2}$$

и количество решений уравнения (2) в натуральных числах равно ([9], с. 11) $\binom{2n-3}{n-1}$ и совпадает с количеством целочисленных решений системы (1).

Теорема. *Для каждого целочисленного решения системы* (1) *у многогранника* $M(3,n)$ *существует матрица* x*, являющаяся его м. н. в.*

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, сформулируем некоторые вспомогательные утверждения, касающиеся нецелочисленных вершин многогранника $M(3,n)$.

Вершина многогранника $M(3,n)$ называется r-нецелочисленной, если она содержит ровно r нецелочисленных (дробных) компонент. В [10] доказано, что для любого числа $r \in \{4,6,7,\dots,3n-2\}$ и только для таких чисел у многогранника $M(3,n)$ существуют r-нецелочисленные вершины.

Зафиксируем число $m \in N_{n-1}$. Пусть I_1, J_1, T_1 — некоторые подмножества (возможно, совпадающие) мощности m множества N_n. Положим $I_2 = N_n \setminus I_1$, $J_2 = N_n \setminus J_1$, $T_2 = N_n \setminus T_1$. Так как $m \le n-1$, то $I_2 \ne \emptyset$, $J_2 \ne \emptyset$, $T_2 \ne \emptyset$. Для двух троек подмножеств (I_1,J_1,T_1) и (I_2,J_2,T_2) определим многогранники $M(I_s,J_s,T_s) = \Big\{x = \|x_{ijt}\|_{|I_s|\times|J_s|\times|T_s|} : \sum\limits_{i\in I_s}\sum\limits_{j\in J_s} x_{ijt} = 1 \quad \forall t \in T_s,$ $\sum\limits_{i\in I_s}\sum\limits_{t\in T_s} x_{ijt} = 1 \quad \forall j \in J_s,\ \sum\limits_{j\in J_s}\sum\limits_{t\in T_s} x_{ijt} = 1 \quad \forall i \in I_s,\ x_{ijt} \ge 0 \quad \forall (i,j,t) \in I_s \times J_s \times T_s\Big\}$, $s = 1,2$.

Замечание. Многогранники $M(I_1,J_1,T_1)$ и $M(I_2,J_2,T_2)$ отличаются от многогранников $M(3,m)$ и $M(3,n-m)$ соответственно лишь нумерацией элементов их матриц.

При $m=1$ многогранник $M(I_1,J_1,T_1)$, а при $m=n-1$ многогранник $M(I_2,J_2,T_2)$ вырождается в точку.

Для вершины $y^s = \|y^s_{ijt}\|_{|I_s|\times|J_s|\times|T_s|}$ многогранника $M(I_s,J_s,T_s)$, $s=1,2$, введем множество

$$K(I_s,J_s,T_s,y^s) = \{(i,j,t) \in I_s \times J_s \times T_s : y^s_{ijt} > 0\}.$$

Лемма 1 ([7]). *Пусть $y^s = \|y^s_{ijt}\|_{|I_s|\times|J_s|\times|T_s|}$ — некоторая м. н. в. многогранника $M(I_s,J_s,T_s)$, $s=1,2$. Если для некоторой пары троек индексов $(i_1,j_1,t_1) \in K(I_1,J_1,T_1,y^1)$ и $(i_2,j_2,t_2) \in K(I_2,J_2,T_2,y^2)$ выполняется условие $y^1_{i_1,j_1,t_1} \ne y^2_{i_2,j_2,t_2}$, то матрица $x = \|x_{ijt}\|_n$, в которой*

$$\begin{aligned}
&x_{ijt} = y^s_{ijt} \quad \forall (i,j,t) \in K(I_s,J_s,T_s,y^s) \setminus \{(i_s,j_s,t_s)\}, \quad s=1,2,\\
&x_{ijt} = y^s_{ijt} - \theta \quad \forall (i,j,t) \in \{(i_1,j_1,t_1),(i_2,j_2,t_2)\},\\
&x_{ijt} = \theta \quad \forall (i,j,t) \in \{(i_1,j_2,t_1),(i_2,j_1,t_2)\},\\
&x_{ijt} = 0 \quad \text{для остальных } (i,j,t) \in N_n^3,
\end{aligned}$$

является $(3n-3)$-нецелочисленной вершиной многогранника $M(3,n)$, где $\theta = \min\{y^1_{i_1,j_1,t_1}, y^2_{i_2,j_2,t_2}\}$.

С помощью леммы 1 и утверждения 1 [7] легко доказать следующие две леммы, дающие простые процедуры построения м. н. в. многогранника $M(3,n)$, исходя из м. н. в. многогранников $M(I_1,J_1,T_1)$и $M(I_2,J_2,T_2)$.

Лемма 2. *Пусть $n \ge 4$, $I_1 = J_1 = T_1 = N_{n-1}$ и $y^1 = \|y^1_{ijt}\|_{|I_1|\times|J_1|\times|T_1|}$ - некоторая м.н.в. многогранника $M(I_1,J_1,T_1)$. Тогда для любой пары троек индексов $(i_1,j_1,t_1),(i'_1,j'_1,t'_1) \in K(I_1,J_1,T_1,y^1)$, удовлетворяющих условию $y^1_{i_1,j_1,t_1} + y^1_{i'_1,j'_1,t'_1} \ne 1$, матрица $x = \|x_{ijt}\|_n$, в которой*

$$\begin{aligned}
&x_{ijt} = y^1_{ijt} \quad \forall (i,j,t) \in K(I_1,J_1,T_1,y^1) \setminus \{(i_1,j_1,t_1),(i'_1,j'_1,t'_1)\},\\
&x_{ijt} = y^1_{i_1,j_1,t_1} \quad \forall (i,j,t) \in \{(i_1,n,t_1),(n,j_1,n)\},\\
&x_{ijt} = \theta \quad \forall (i,j,t) \in \{(n,j'_1,t'_1),(i'_1,n,n)\},\\
&x_{i'_1,j'_1,t'_1} = y^1_{i'_1,j'_1,t'_1} - \theta, \quad x_{nnn} = 1 - y^1_{i_1,j_1,t_1} - \theta,\\
&x_{ijt} = 0 \quad \text{для остальных } (i,j,t) \in N_n^3,
\end{aligned}$$

является м. н. в. многогранника $M(3,n)$, где $\theta = \min\{y^1_{i'_1,j'_1,t'_1}, 1 - y^1_{i_1,j_1,t_1}\}$.

Лемма 3. *Пусть $n \ge 6$, $|I_s| = |J_s| = |T_s| \ge 2$ и $y^s = \|y^s_{ijt}\|_{|I_s|\times|J_s|\times|T_s|}$ — некоторая м. н. в. многогранника $M(I_s,J_s,T_s)$, $s=1,2$. Тогда для любых троек индексов $(i_1,j_1,t_1),(i'_1,j'_1,t'_1) \in$*

$K(I_1,J_1,T_1,y^1)$, $(i_1,j_1,t_1)\neq(i_1',j_1',t_1')$, $(i_2,j_2,t_2)\in K(I_2,J_2,T_2,y^2)$, удовлетворяющих условию $y^1_{i_1,j_1,t_1}+y^1_{i_1',j_1',t_1'}<y^2_{i_2,j_2,t_2}$, матрица $x=\|x_{ijt}\|_n$ с ненулевыми элементами

$$
\begin{aligned}
x_{ijt}&=y^1_{ijt}\quad\forall(i,j,t)\in K(I_1,J_1,T_1,y^1)\setminus\{(i_1,j_1,t_1),(i_1',j_1',t_1')\},\\
x_{ijt}&=y^2_{ijt}\quad\forall(i,j,t)\in K(I_2,J_2,T_2,y^2)\setminus\{(i_2,j_2,t_2)\},\\
x_{ijt}&=y^1_{i_1,j_1,t_1}\quad\forall(i,j,t)\in\{(i_1,j_2,t_1),(i_2,j_1,t_2)\},\\
x_{ijt}&=y^1_{i_1',j_1',t_1'}\quad\forall(i,j,t)\in\{(i_2,j_1',t_1'),(i_1',j_2,t_2)\},\\
x_{i_2,j_2,t_2}&=y^2_{i_2,j_2,t_2}-y^1_{i_1,j_1,t_1}-y^1_{i_1',j_1',t_1'},
\end{aligned}
$$

является м. н. в. многогранника $M(3,n)$.

Доказательство теоремы. При $n=2$ утверждение теоремы справедливо, т. к. известно [8], что многогранник $M(3,2)$ имеет 4-нецелочисленные вершины.

В дальнейшем будем предполагать, что $n\geq 3$. На основании теоремы 2 [6] достаточно ограничиться изучением целочисленных решений $z(x^1_{ij}),z(x^2_{ij}),\dots,z(x^n_{ij})$ системы (1), удовлетворяющих условиям

$$z(x^t_{ij})\leq n-2\quad\forall t\in N_n. \tag{3}$$

Будем доказывать теорему индукцией по числу n. При $n=3,4,5$ справедливость утверждения теоремы вытекает непосредственно из теоремы 2 [6]. Предположим, что оно верно для $n-1$, где $n\geq 6$, и докажем его для n. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. Пусть среди чисел $z(x^1_{ij}),z(x^2_{ij}),\dots,z(x^n_{ij})$ имеется хотя бы одно число, равное трем. Для определенности примем $z(x^n_{ij})=3$. Положим $I_1=J_1=T_1=N_{n-1}$, $I_2=J_2=T_2=\{n\}$. Тогда по предположению индукции у многогранника $M(I_1,J_1,T_1)$ существует матрица y^1, являющаяся м. н. в., для которой число компонент в двумерных сечениях ориентации (i,j) задается вектором $(z(x^1_{ij}),z(x^2_{ij}),\dots,z(x^{n-1}_{ij}))$.

Поскольку $\sum\limits_{t=1}^{n-1}z(x^t_{ij})=3n-5$, то существует элемент $t_1\in N_{n-1}$ с условием $z(x^{t_1}_{ij})\geq 3$. Следовательно, найдется пара троек индексов $(i_1,j_1,t_1),(i_1',j_1',t_1)\in K(I_1,J_1,T_1,y^1)$, удовлетворяющая неравенству $y^1_{i_1,j_1,t_1}+y^1_{i_1',j_1',t_1}<1$. Поэтому, применяя лемму 2, получим м. н. в. x' многогранника $M(3,n)$, для которой число компонент в двумерных сечениях ориентации (i,j) задается вектором $(z(x^1_{ij}),z(x^2_{ij}),\dots,z(x^{n-1}_{ij}),3)$.

Случай 2. Пусть среди чисел $z(x^1_{ij}),z(x^2_{ij}),\dots,z(x^n_{ij})$ нет ни одного числа, равного трем. Для определенности будем считать, что $z(x^1_{ij})\geq z(x^2_{ij})\geq\dots\geq z(x^{t_0}_{ij})>3>z(x^{t_0+1}_{ij})=z(x^{t_0+2}_{ij})=\dots=z(x^n_{ij})=2$. Из (3) вытекает $t_0>1$. Пусть $z(x^1_{ij})=p$. Тогда ввиду (3) имеем $4\leq p\leq n-2$. Положим $I_2=J_2=T_2=\{1,\,n-p+2,\,n-p+3,\dots,n\}$, $I_1=N_n\setminus I_2$, $J_1=N_n\setminus J_2$, $T_1=N_n\setminus T_2$.

Очевидно, $|I_2|=p$, $|I_1|=n-p$.

Согласно теореме 1 [7], у многогранника $M(I_2,J_2,T_2)$ найдется м. н. в. $\overline{\overline{y}}=\|\overline{\overline{y}}_{ijt}\|_{|I_2|\times|J_2|\times|T_2|}$, содержащая по крайней мере $2p-3$ компонент, каждая из которых равна $\frac{1}{2p-2}$. Легко видеть, что $z(\overline{\overline{y}}^1_{ij})=z(x^1_{ij})$, $z(\overline{\overline{y}}^{n-l+2}_{ij})=2$, $l=2,\dots,p$.

В силу предположения индукции у многогранника $M(I_1,J_1,T_1)$ существует матрица $\overline{y}=\|\overline{y}_{ijt}\|_{|I_1|\times|J_1|\times|T_1|}$, являющаяся его м. н. в., для которой число компонент в двумерных сечениях ориентации (i,j) удовлетворяет условиям $z(\overline{y}^l_{ij})=z(x^l_{ij})\quad\forall l\in T_1\setminus\{t_0\}$, $z(\overline{y}^{t_0}_{ij})=z(x^{t_0}_{ij})-2$.

Положим $\overline{y}_{i_0,j_0,t_0}=\max\{\overline{y}_{i,j,t_0}:(i,j)\in I_1\times J_1\}$.

Очевидно,

$$\overline{y}_{i_0,j_0,t_0}\geq\frac{1}{z(x^{t_0}_{ij})-2}. \tag{4}$$

Так как $z(x_{ij}^1) \geq z(x_{ij}^{t_0})$, а $z(x_{ij}^1) = p$, то $z(x_{ij}^{t_0}) \leq p$. Значит, $z(x_{ij}^{t_0}) < p+1$, т. е.

$$\frac{1}{p-1} < \frac{1}{z(x_{ij}^{t_0})-2}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) вытекает неравенство

$$\frac{1}{p-1} < \overline{y}_{i_0,j_0,t_0}. \tag{6}$$

Пусть $(i_1,j_1,1),(i_2,j_2,1) \in K(I_2,J_2,T_2,\overline{\overline{y}})$ такие, что $(i_1,j_1) \neq (i_2,j_2)$, $\overline{\overline{y}}_{i_1,j_1,1} = \overline{\overline{y}}_{i_2,j_2,1} = \frac{1}{2p-2}$. Тогда в силу (6) имеем $\overline{\overline{y}}_{i_1,j_1,1} + \overline{\overline{y}}_{i_2,j_2,1} < \overline{y}_{i_0,j_0,t_0}$. Поэтому, применяя лемму 3, получим м. н. в. x'' многогранника $M(3,n)$, для которой число компонент в двумерных сечениях ориентации (i,j) задается вектором $(z(x_{ij}^1), z(x_{ij}^2), \ldots, z(x_{ij}^n))$. $\square$

Литература

1. Pierskalla W.P. *The multidimensional assignment problem* // Oper. Res. – 1968. – V. 16. – P. 422–431.
2. Poore A.B. *Multidimensional assignment formulation of data association problems arising from multitarget and multisensor tracking* // Comput. Optimiz. and Appl. – 1994. – V. 3. – P. 27–54.
3. Arbib C., Pacciarelli D., Smriglio S. *A three-dimensional matching model for perishable production scheduling* // Discrete Appl. Math. – 1999. – № 92. – P. 1–15.
4. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В. *О типах $(3n-2)$-нецелочисленных вершин многогранника трехиндексной аксиальной задачи выбора* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 12. – С. 84–90.
5. Кравцов В.М. *О новых типах максимально нецелочисленных вершин многогранника трехиндексной аксиальной задачи о назначениях* // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2003. – № 3. – С. 80–85.
6. Кравцов В.М. *О максимально нецелочисленных вершинах многогранника трехиндексной аксиальной задачи о назначениях* // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 3. – С. 62–70.
7. Кравцов В.М. *О новых свойствах максимально нецелочисленных вершин многогранника трехиндексной аксиальной задачи о назначениях* // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 12. – С. 37–45.
8. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В. *О нецелочисленных вершинах многогранника трехиндексной аксиальной задачи о назначениях* // Дискретн. матем. – 2001. – Т. 13. – Вып. 2. – С. 120–143.
9. Холл М. *Комбинаторика.* – М.: Наука, 1970. – 424 с.
10. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В. *О числе нецелочисленных вершин многогранника трехиндексной аксиальной задачи о назначениях* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук. – 2000. – № 4. – С. 59–65.

Научно-исследовательский экономический институт Министерства экономики Республики Беларусь

Поступила
27.07.2005