ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 12 (487)

УДК 517.977

О.В. ВАСИЛЬЕВ, Е.А. ЛУТКОВСКАЯ

ОБ ОДНОЙ ПРОЦЕДУРЕ УЛУЧШЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ СИНТЕЗЕ

Введение

Под параметрическим синтезом понимается поиск оптимального управления, зависящего от некоторых параметров или возмущений в задаче. В [1], [2] такой синтез построен в линейно-квадратичной задаче оптимального управления, где роль параметров играли начальное состояние $x(t_0)$, конечное состояние $x(t_1)$ и параметры p, линейно входящие в правые части линейной по состоянию и управлению системы дифференциальных уравнений. В данной статье предлагается способ улучшения управления, зависящего от произвольного начального состояния в линейной системе с управляемыми коэффициентами и с квадратичным функционалом.

1. Постановка задачи

В линейной системе с управляемыми коэффициентами

$$\dot{x} = A(u,t)x + b(u,t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \tag{1}$$

при произвольном начальном условии

$$x(t_0) = \alpha \tag{2}$$

определен функционал

$$J(u,\alpha) = \varphi(x(t_1)) + \int_T [F(x,u,t) + \tfrac{1}{2}\langle D(t)u(t), u(t)\rangle]dt. \tag{3}$$

Здесь $x = x(t,u,\alpha) \in E^n$, $t \in T$, — решение задачи Коши (1), (2) при заданном $u = u(t,\alpha) \in E^r$, $t \in T$, матричные функции $A(u,t)$, $b(u,t)$ размерности $(n\times n)$ и $(n\times 1)$ соответственно линейны по управлениям, скалярная функция $\varphi(x)$ вогнута по x, скалярная функция $F(x,u,t)$ билинейна по (x,u), матричная функция $D(t)$ размерности $(r\times r)$ симметрична и положительно определена в каждом $t \in T$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярная скобка в E^r.

Требуется улучшить заданное неоптимальное управление $u^0 = u^0(t,\alpha)$, т. е. построить управление $u^1 = u^1(t,\alpha)$, для которого

$$J(u^1,\alpha) < J(u^0,\alpha) \ \ \forall\alpha.$$

Замечание 1. Здесь мы предполагаем, что для заданного в виде некоторого аналитического выражения управления $u = u(t,\alpha)$, $t \in T$, возможно найти решение $x = x(t,u,\alpha)$, $t \in T$, задачи Коши (1), (2) также в аналитической форме. Иногда это можно сделать путем представления решения (1), (2) по формуле Коши с вычислением в аналитической форме коэффициентов фундаментальной матрицы. Возможно также применение аналитических приближенных методов

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 02-01-00243 и 02-01-81001, и программы “Университеты России”, проект УР.03.01.008.

(напр., [3]) в отличие от традиционных численных методов при поиске оптимальных программных управлений.

2. Формула приращения целевого функционала

Пусть для произвольного $\alpha \in E^n$ задано управление $u^0 = u^0(t,\alpha)$ и найдено решение $x^0 = x(t,u^0,\alpha)$ задачи Коши (1), (2). Пусть также для этого же α задано другое управление $u = u(t,\alpha)$ и найдено решение $x = x(t,u,\alpha)$ той же задачи. Обозначим $\Delta x = x - x^0$, $\Delta u = u - u^0$. Тогда на решениях уравнений в приращениях $\Delta\dot{x} = \Delta_{ux}[A(u^0,t)x + b(u^0,t)]$, $\Delta x(t_0) = 0$, приращение функционала (3) можно представить в виде

$$J(u,\alpha) - J(u^0,\alpha) = \Delta_x\varphi(x^0(t_1)) + \int_T [\Delta_{ux}F(x^0,u^0,t) + \tfrac{1}{2}\Delta_u\langle D(t)u^0(t),u^0(t)\rangle]dt +$$
$$+ \int_T \langle\psi(t), \Delta\dot{x} - \Delta_{ux}[A(u^0,t)x + b(u^0,t)]\rangle dt. \quad (4)$$

Здесь $\psi = \psi(t) \in E^n$, $t \in T$, — пока неопределенная нетривиальная сопряженная вектор-функция, Δ_{ux}, Δ_u, Δ_x — приращения функций по указанным аргументам.

Теперь введем функцию Понтрягина

$$H(\psi,x,u,t) = \langle\psi(t), A(u,t)x + b(u,t)\rangle - F(x,u,t) - \frac{1}{2}\langle D(t)u(t),u(t)\rangle;$$

произведем интегрирование по частям слагаемого $\int\limits_T \langle\psi(t),\Delta\dot{x}(t)\rangle dt$; разложим приращение $\Delta_x\varphi$ в ряд Тейлора до первого слагаемого, приращение $\Delta_{ux}H(\psi,x^0,u^0,t)$ представим в виде

$$\Delta_{ux}H(\psi,x^0,u^0,t) = \Delta_u H(\psi,x,u^0,t) + \Delta_x H(\psi,x^0,u^0,t),$$

и последнее слагаемое в правой части этой формулы разложим в ряд Тейлора до первого члена. Наконец, введем сопряженную задачу Коши

$$\dot{\psi} = -A(u,t)'\psi + \frac{\partial F(x,u,t)}{\partial x}, \quad \psi(t_1) = -\frac{\partial\varphi(x(t_1))}{\partial x}, \quad (5)$$

где $'$ — символ транспонирования матрицы, и заметим, что на заданной паре $(u^0(t,\alpha), x(t,u^0,\alpha))$ существует единственное решение задачи Коши (5) $\psi^0 = \psi(t,u^0,\alpha)$, которое можно найти в аналитической форме так же, как находилось $x^0 = x(t,u^0,\alpha)$.

В результате формула приращения (4) примет следующий вид:

$$J(u,\alpha) - J(u^0,\alpha) = -\int_T \Delta_u H(\psi^0,x,u^0,t)dt + o_\varphi(\|\Delta x(t_1)\|). \quad (6)$$

Отметим, что в (6) первое слагаемое в правой части подсчитано на $x = x(t,u,\alpha)$. Именно этим она отличается от традиционного вида. Такого типа нетрадиционные формулы приращения используются в [4] для построения численных методов поиска оптимальных программных управлений. Далее, в силу вогнутости скалярной функции $\varphi(x)$ остаток от разложения ее приращения $\Delta_x\varphi(x)$ неположителен:

$$o_\varphi(\|\Delta x(t_1)\|) \le 0. \quad (7)$$

Наконец, $o_H(\|\Delta x(t)\|) = 0$ в силу билинейности правых частей системы (1) и функции F по (x,u).

3. Процедура улучшения

Заметим, что в силу предположений о параметрах задачи (1)-(3) скалярная функция $H(\psi, x, u, t)$ имеет структуру

$$H(\psi, x, u, t) = \langle W(\psi, x, t), u(t)\rangle - \frac{1}{2}\langle D(t)u(t), u(t)\rangle + H_1(\psi, x, t), \tag{8}$$

причем вектор-функция $W(\psi, x, t)$ линейна по x

$$W(\psi, x, t) = B(\psi, t)x + \overline{W}(\psi, t).$$

Здесь $B(\psi, t)$ — матричная функция размерности $(r \times n)$, $W(\psi, x, t) \in E^r$, $\overline{W}(\psi, t) \in E^r$, $t \in T$.

Переходим к описанию процедуры улучшения управления $u^0 = u^0(t, \alpha)$. Прежде всего для произвольного x найдем

$$\overline{u}^0(t, \alpha, x) = \arg\max_u [\langle W(\psi^0, x, t), u(t)\rangle - \tfrac{1}{2}\langle D(t)u(t), u(t)\rangle], \quad t \in T. \tag{9}$$

В силу определенной положительности матричной функции $D(t)$, $t \in T$,

$$\overline{u}^0(t, \alpha, x) = D^{-1}(t)[B(\psi^0, t)x(t) + \overline{W}(\psi^0, t)]. \tag{10}$$

Теперь управление (10) подставим в систему (1). В результате (с учетом линейности по (u, x) правых частей (1)) получим задачу Коши для векторного уравнения Риккати

$$\begin{gathered} \dot{x} = A(\overline{u}^0(t, \alpha, x), t)x + b(\overline{u}^0(t, \alpha, x), t), \\ x(t_0) = \alpha. \end{gathered} \tag{11}$$

Пусть $\overline{x}^0 = \overline{x}^0(t, \alpha)$ — решение задачи Коши (11). Подставим это решение в формулу (10) и получим

$$u^1(t, \alpha) = \overline{u}^0(t, \alpha, \overline{x}^0). \tag{12}$$

Замечание 2. Для решения задачи Коши (11) можно применять аналитические приближенные методы [3]. Разработаны специальные аналитические методы решения задач Коши для уравнения Риккати [5], которые также можно использовать.

Окончательно, исходя из вида (8) функции H, операции (9), (10) и формулы (12), имеем

$$\Delta_{\overline{u}^0} H(\psi^0, \overline{x}^0, u^0, t) \geq 0, \quad t \in T. \tag{13}$$

Отсюда в силу неравенств (7) и (13) и из формулы приращения (6) при $u = \overline{u}^0 = u^1$

$$J(u^1, \alpha) \leq J(u^0, \alpha).$$

При необходимости процедура улучшения найденного управления может повторяться, если оно не оптимально. Окончательным результатом является

Утверждение. *На последовательности управлений $\{u^k = u^k(t, \alpha),\ t \in T\}$, $k = 0, 1, \ldots$, генерируемой предложенной процедурой, строгое улучшение*

$$J(u^{k+1}, \alpha) < J(u^k, \alpha)$$

обеспечивается при таких $\alpha \in E^n$, при которых существуют отрезки $T_k \subset T$ положительной меры, где

$$\Delta_{\overline{u}^k} H(\psi^k, \overline{x}^k, u^k, t) > 0, \quad t \in T_k \subset T, \quad \operatorname{mes} T_k > 0. \tag{14}$$

Если же при каких-то $\alpha^k \in E^n$

$$\Delta_{\overline{u}^k} H(\psi^k, \overline{x}^k, u^k, t) \equiv 0, \quad t \in T, \tag{15}$$

то управление $u^k = u^k(t,\alpha)$ *для этих* α^k *удовлетворяет необходимому условию оптимальности*

$$\frac{\partial H(\psi^k, x^k, u^k, t)}{\partial u} = 0. \tag{16}$$

Действительно, первое положение утверждения следует из формулы приращения (6) при $u^0 = u^k$, $u = \overline{u}^k = u^{k+1}$ и неравенства (14). Наконец, если при каких-то $\alpha^k \in E^n$ выполняется тождество (15), то это означает $\overline{u}^k(t,\alpha^k) = u^k(t,\alpha^k)$ и справедливость условия (16).

Наконец, если правые части системы (1) и подинтегральная функция $F(x,u,t)$ линейны по x и по u, то из условия (9) $\overline{u}^0 = \overline{u}^0(t,\alpha)$. Действительно, для задачи

$$\dot{x} = A(t)x + G(t)u(t) + f(u,t), \quad x(t_0) = \alpha,$$
$$J(u,\alpha) = \varphi(x(t_1)) + \int_T [\langle a(t), x(t)\rangle + \langle g(t), u(t)\rangle + \tfrac{1}{2}\langle D(t)u(t), u(t)\rangle]dt \to \min,$$

имеем

$$H(\psi,x,u,t) = \langle W(\psi,t), u(t)\rangle - \tfrac{1}{2}\langle D(t)u(t), u(t)\rangle + H_1(\psi,x,t),$$
$$W(\psi,t) = G(t)'\psi(t) - g(t),$$
$$\overline{u}^0(t,\alpha) = D^{-1}(t)[G(t)'\psi^0(t) - g(t)].$$

Пример. $\dot{x} = u(t)x$, $x(0)=\alpha$, $t \in [0,1]$,

$$J(u,\alpha) = x(1) + \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)dt \to \min.$$

Здесь $H(\psi,x,u,t) = \psi u x - \frac{1}{2}u^2$, $\dot{\psi} = -u(t)\psi$, $\psi(1) = -1$,

$$\overline{u}(t,x,\psi) = \arg\max_u H(\psi,x,u,t) = \psi x.$$

Пусть $u^0(t,\alpha) = \alpha$. Тогда $x^0(t,\alpha) = \alpha e^{\alpha t}$, $J(u^0,\alpha) = \alpha e^{\alpha} + \frac{\alpha^2}{2}$,

$$\psi^0(t,\alpha) = -e^{\alpha}e^{-\alpha t}, \quad \overline{u}^0(t,\alpha,x) = -e^{\alpha}e^{-\alpha t}x;$$
$$\overline{x}^0(t,\alpha) : \dot{\overline{x}} = -e^{\alpha}e^{-\alpha t}x^2, \quad x(0)=\alpha, \quad \overline{x}^0(t,\alpha) = \frac{\alpha}{1 + e^{\alpha} - e^{\alpha}e^{-\alpha t}}.$$

Отсюда

$$u^1(t,\alpha) = \frac{-\alpha e^{\alpha}e^{-\alpha t}}{1 + e^{\alpha} - e^{\alpha}e^{-\alpha t}}, \quad J(u^1,\alpha) = \alpha e^{-\alpha} + \frac{1}{2}\alpha e^{\alpha} - \frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha} - \frac{1}{2}\alpha^2.$$

Здесь функция $f_0(\alpha) = J(u^1,\alpha) - J(u^0,\alpha)$, которая определяет величину спуска при различных α на первом шаге, принимает вид

$$f_0(\alpha) = -\alpha(\operatorname{sh}\alpha + \alpha).$$

Нетрудно показать, что $f_0(\alpha) < 0$ или $J(u^1,\alpha) < J(u^0,\alpha)$ $\forall \alpha \neq 0$. При $\alpha_0 = 0$ имеем $J(u^1,\alpha_0) = J(u^0,\alpha)$. В случае $\alpha_0 = 0$ управление $u^* \equiv 0$ является оптимальным в поставленной задаче.

Литература

1. Васильев О.В., Лутковская Е.А. *К проблеме параметрического синтеза оптимального управления* // Оптимизация, управление, интеллект. – 1999. – № 3. – С. 178–187.
2. Лутковская Е.А. *Об одном способе построения параметрического синтеза для линейно-квадратичной задачи оптимального управления* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 12. – С. 71–73.
3. Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л. *Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.* – М.: Наука, 1965. – 384 с.
4. Срочко В.А. *Итерационные методы решения задач оптимального управления.* – М.: Физматлит, 2000. – 160 с.
5. Егоров А.И. *Уравнения Риккати.* – М.: Физматлит, 2001. – 203 с.

Иркутский государственный университет

Поступила
21.06.2002