ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 10 (449)

УДК 517.544

Ю.И. ЧЕРСКИЙ

ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ СВЕРТКИ

Некоторый практический интерес имеет система уравнений

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)u(s)ds + \sum_{p=-\infty}^{\infty} q(t-p)v_p = g(t), \quad -\infty < t < \infty, \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} z(n-s)u(s)ds + \sum_{p=-\infty}^{\infty} w_{n-p}v_p = h_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

из которых находятся функция $u(s)$ и последовательность v_p.

Предположим, что $u(t) \in L^2(-\infty,\infty)$, $q(t) \in L^2(-\infty,\infty)$, $g(t) \in L^2(-\infty,\infty)$, $v_n \in l$, $w_n \in l$, $h_n \in l$,

$$z(t) \in L^2(-\infty,\infty), \quad \operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |z(n-t)| \in L^2(-\infty,\infty), \tag{3}$$

$$0 < C_1 < |K(x)| < C_2 < \infty, \quad -\infty < x < \infty. \tag{4}$$

Здесь $K(x)$ — образ Фурье ядерной обобщенной функции $k(t)$. При этих предположениях (1) становится равенством функций из $L^2(-\infty,\infty)$, а (2) — равенством последовательностей из пространства l. Действительно, при условии (4) оператор свертки A,

$$(Au)(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)u(s)ds \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1}[K(x)(Fu)(x)],$$

действует и ограничен в пространстве $L^2(-\infty,\infty)$ и имеет ограниченный обратный

$$(A^{-1}u)(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} r(t-s)u(s)ds, \quad r(t) = F^{-1}(1/K(x)).$$

Символ F означает оператор-преобразование Фурье, $(Fu)(x) \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{ixt}dt$. Содержащееся в (1) слагаемое

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} q(t-p)v_p \tag{5}$$

также принадлежит пространству $L^2(-\infty,\infty)$. Это утверждает

Лемма 1. *Если $q(t) \in L^2(-\infty,\infty)$ и $v_p \in L$, то ряд* (5) *сходится в среднем к функции из $L^2(-\infty,\infty)$.*

Действуя оператором A^{-1} на обе части уравнения (1), получим

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t-s)g(s)ds - \sum_{p=-\infty}^{\infty} v_p \int_{-\infty}^{\infty} r(t-s-p)q(s)ds, \quad -\infty < t < \infty. \tag{6}$$

Здесь ряд также сходится в среднем квадратичном, что утверждает

Лемма 2. *При условиях леммы* 1 *и* (4) *справедлива формула*

$$A^{-1}\Big[\sum_{-\infty}^{\infty} v_p q(t-p)\Big] = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{p=-N}^{N} v_p A^{-1} q(t-p).$$

Исключив из условия (2) неизвестную функцию $u(s)$ и используя ее представление (6), придем к бесконечной системе уравнений с дискретной сверткой

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} d_{n-p} v_p = y_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Здесь $d_n = w_n - a_n \in l$, $y_n = h_n - a_n \in l$,

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} z(n-s)ds \int_{-\infty}^{\infty} r(s-\tau)q(\tau)d\tau.$$

Эти утверждения основаны на следующих леммах.

Лемма 3. *Если функция* $z(t)$ *удовлетворяет условиям* (3), *то при любой функции* $f(t)$ *из пространства* $L^2(-\infty,\infty)$ *последовательность*

$$\int_{-\infty}^{\infty} z(n-s)f(s)ds, \quad n \in \mathbb{Z},$$

принадлежит пространству l.

Лемма 4. *Для функций* $z(t)$ *и* $f(t)$, *удовлетворяющих условиям леммы* 3, *и последовательности* $v_p \in l$ *справедлива формула*

$$\int_{-\infty}^{\infty} z(n-s) \sum_{p=-\infty}^{\infty} v_p f(s-p)ds = \sum_{p=-\infty}^{\infty} v_p \int_{-\infty}^{\infty} z(n-p-s)f(s)ds,$$

где ряд в левой части сходится в среднем, а в правой — абсолютно.

Итак, для построения искомой последовательности v_p достаточно решить систему (7). Методы решения такой системы известны и теоретически не составляют проблемы. В частности, если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\Big|\sum_{p=-\infty}^{\infty} d_p e^{ixp}\Big| > C, \quad -\pi \le x \le \pi,$$

то система (7) при любой правой части $y_n \in l$ имеет в пространстве l единственное решение v_p. После определения последовательности $v_p \in l$ принадлежащая пространству $L^2(-\infty,\infty)$ искомая функция $u(t)$ строится по формуле (6).

В заключение заметим, что к дискретно-непрерывной системе (1), (2) автор пришел при рассмотрении одной задачи интерполяции случайных процессов.

По аналогии с дискретной системой Винера–Хопфа (напр., [1], с. 100) можно сформулировать дискретно-непрерывную систему, в которой, в отличие от (1), (2), отсутствуют отрицательные индексы p и n. Такая система также допускает решение в замкнутой форме.

Литература

1. Прёсдорф З. *Некоторые классы сингулярных уравнений.* – М.: Мир, 1979. – 493 с.

Одесская государственная академия строительства и архитектуры

Поступила 09.01.1998