ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 5 (456)

УДК 517.9

В.П. СЕРЕБРЯКОВ

К ВОПРОСУ ОБ ИНДЕКСЕ ДЕФЕКТА МАТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть $L_2^p(I)$ $(1 \le p < \infty)$ есть комплексное банахово пространство двухкомпонентных вектор-функций $y = (y_1(x), y_2(x))$, измеримых по Лебегу на полуоси $I = [0, \infty)$, у которых сумма p-х степеней модулей компонент интегрируема по Лебегу на I, с нормой

$$\|y\|_p = \left\{ \int_I (|y_1(x)|^p + |y_2(x)|^p) dx \right\}^{1/p}.$$

При $p = 2$ пространство $L_2^p(I)$ является, как известно, гильбертовым со скалярным произведением

$$(y, z) = \int_I (y_1(x)\overline{z}_1(x) + y_2(x)\overline{z}_2(x)) dx.$$

Рассмотрим на I матричное линейное дифференциальное выражение второго порядка

$$l[y] = -\{Q_0(x)y'\}' + Q(x)y, \tag{1}$$

в котором $y = (y_1(x), y_2(x))^\top$ — двухкомпонентная вектор-функция ($\top$ — символ транспонирования),

$$Q_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & q_0(x) \\ q_0(x) & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) & q(x) \\ q(x) & q_2(x) \end{pmatrix}$$

суть квадратные матрицы второго порядка, где $q_0(x)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$, $q(x)$ — действительнозначные функции, причем q_0^{-1}, q_1, q_2, q интегрируемы по Лебегу на каждом сегменте $[0, b]$, $0 < b < \infty$.

Пусть N — максимальное число линейно независимых решений из $L_2^2(I)$ уравнения

$$l[y] = \lambda y \tag{2}$$

с комплексным параметром λ при $\operatorname{Im}\lambda \ne 0$. Значение N не зависит от λ $(\operatorname{Im}\lambda \ne 0)$ и согласно [1]–[4] может равняться 2, 3 или 4, в зависимости от поведения коэффициентов $q_0(x)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$, $q(x)$ выражения (1). При этом если $N = 4$, то все решения уравнения (2) при любом комплексном (в том числе и действительном) значении параметра λ принадлежат $L_2^2(I)$; с другой стороны, если все решения уравнения (2) при каком-нибудь комплексном (хотя бы и действительном) значении $\lambda = \lambda_0$ принадлежат $L_2^2(I)$, то $N = 4$.

Обозначим через $\mathcal{L}$ минимальный замкнутый симметрический оператор, порождаемый выражением (1) в $L_2^2(I)$. Некоторые задачи спектральной теории для оператора $\mathcal{L}$ рассматривались в статьях [1]–[8]. В частности, в [3]–[8] изучался вопрос об индексе дефекта этого оператора.

Согласно [3]–[9] (см. также литературу, указанную в этих работах) дефектные числа оператора $\mathcal{L}$ совпадают со значением N максимального числа линейно независимых решений уравнения (2) при $\operatorname{Im}\lambda \ne 0$, принадлежащих пространству $L_2^2(I)$. Таким образом, индекс дефекта $\mathcal{L}$ есть $\{N, N\}$.

В работах [3]–[7] для того, чтобы исключить значение $\{4, 4\}$ для индекса дефекта оператора $\mathcal{L}$, на коэффициенты q_0, q_1, q_2, q накладывались условия, которые должны выполняться всюду (или почти всюду) на полуоси $[a, \infty)$, $a \ge 0$.

В данной статье будут представлены условия на коэффициенты, исключающие индекс дефекта $\{4,4\}$ для $\mathcal{L}$, которые должны будут выполняться лишь на бесконечной последовательности попарно непересекающихся конечных интервалов $I_n \subset I$. Представленные условия оказываются следствиями условий, накладываемых на коэффициенты q_0, q_1, q_2, q, при выполнении которых только на последовательности интервалов I_n уравнение $l[y]=0$ имеет хотя бы одно решение, не принадлежащее пространству $L_2^p(I)$ при некотором p, $1<p<\infty$. Близкая к излагаемой ниже теорема сформулирована (без доказательства) в [8] (теорема 1). Отметим, что L^p-свойства решений скалярного уравнения Штурма–Лиувилля с действительнозначным потенциалом изучались в [10].

Если X — матрица, то через X^* обозначим матрицу, эрмитово сопряженную с X, а через $\|X\|$ — норму матрицы X. Через E_r обозначим единичную матрицу r-го порядка ($r=2,4$).

Рассмотрим на I наряду с векторным дифференциальным уравнением $l[y]=0$ соответствующее ему матричное дифференциальное уравнение

$$-\{Q_0(x)Y'\}'+Q(x)Y=0, \tag{3}$$

в котором $Y=Y(x)$ — искомая квадратная матрица-функция второго порядка.

Пусть Y и Z — решения уравнения (3). Тогда

$$-(Q_0Y')'+QY=0, \quad -(Z^{*\prime}Q_0)'+Z^*Q=0.$$

Умножая слева первое из этих равенств на Z^*, второе — справа на Y, затем вычитая второе из первого и полученное соотношение интегрируя в пределах от 0 до x, находим

$$Z^{*\prime}(x)Q_0(x)Y(x)-Z^*(x)Q_0(x)Y'(x)=\text{const} \tag{4}$$

для всех $x\in I$, где const в данном случае означает постоянную квадратную матрицу 2-го порядка.

Пусть теперь Φ и Ψ — решения уравнения (3), удовлетворяющие начальным условиям

$$\Phi(0)=(Q_0\Psi')(0)=E_2, \quad (Q_0\Phi')(0)=\Psi(0)=0. \tag{5}$$

Обозначим через $F(x)$ квадратную матрицу-функцию четвертого порядка, в блочном представлении имеющую вид

$$F(x)=\begin{pmatrix}\Phi(x) & \Psi(x)\\ \Phi'(x) & \Psi'(x)\end{pmatrix}.$$

Матрица $F(x)$, как это вытекает из (4), (5), при всех $x\in I$ удовлетворяет тождеству

$$F^*(x)G(x)F(x)=H, \quad \text{где} \quad G(x)=\begin{pmatrix}0 & Q_0(x)\\ -Q_0(x) & 0\end{pmatrix}, \quad H=\begin{pmatrix}0 & E_2\\ -E_2 & 0\end{pmatrix},$$

откуда $F^*(x)G(x)=H\{F(x)\}^{-1}$ и, следовательно, $F(x)HF^*(x)G(x)=-E_4$. Выполнив в левой части этой формулы перемножение и приравняв одинаково расположенные матрицы второго порядка, получим, в частности, следующие соотношения:

$$\begin{gathered}\{\Psi(x)\Phi^*(x)-\Phi(x)\Psi^*(x)\}Q_0(x)=0,\\ \{\Psi'(x)\Phi^*(x)-\Phi'(x)\Psi^*(x)\}Q_0(x)=E_2 \quad (x\in I).\end{gathered} \tag{6}$$

Обозначим через $U(x,t)$ матрицу Коши уравнения (3), т. е. матрицу-функцию

$$U(x,t)=\Psi(x)\Phi^*(t)-\Phi(x)\Psi^*(t).$$

В силу (6) для $U(x,t)$ имеем

$$U(t,t)=0, \quad U'_x(x,t)|_{x=t}=\{Q_0(t)\}^{-1}. \tag{7}$$

Справедлива следующая лемма, которая доказывается аналогично лемме из [10] (см. также замечание в [10]).

Лемма. *Пусть существует последовательность попарно непересекающихся интервалов $I_n = (a_n, b_n) \subset I$ $(n = 1, 2, \dots)$ такая, что*

1) *$q_0(x)$ положительна почти всюду на $\bigcup\limits_n I_n$;*
2) *при некотором p, $1 < p < \infty$, функция $\{q_0(x)\}^{\frac{p}{1-p}}$ интегрируема по Лебегу на каждом I_n и ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{I_n} \{q_0(x)\}^{\frac{p}{1-p}} dx \right\}^{1-p} \left\{ \int_{I_n} dx \int_{a_n}^{x} \{q_0(x) q_0(t)\}^{-1} \|U(x,t)\| dt \right\}^{p/2}$$

расходится.

Тогда уравнение $l[y] = 0$ имеет решение, не принадлежащее пространству $L_2^p(I)$.

Положим $q_-(x) = -\min\{q(x), 0\}$, $q_+(x) = q(x) + q_-(x)$, $\sigma(x_1, x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \{q_0(x)\}^{-1} dx$. Имеет место

Теорема. *Пусть существует последовательность попарно непересекающихся интервалов $I_n = (a_n, b_n) \subset I$ $(n = 1, 2, \dots)$ такая, что*

1) *почти всюду на $\bigcup\limits_n I_n$ функция $q_0(x)$ положительна, а функции $q_1(x)$ и $q_2(x)$ либо обе неотрицательны, либо обе неположительны;*
2) *при некотором p, $1 < p < \infty$, функция $\{q_0(x)\}^{\frac{p}{1-p}}$ интегрируема по Лебегу на каждом I_n;*
3) *либо имеет место неравенство*

$$\sigma(a_n, b_n) \int_{I_n} q_-(x) dx \le C \quad (n = 1, 2, \dots), \tag{8}$$

где C — положительная постоянная, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{I_n} \{q_0(x)\}^{\frac{p}{1-p}} dx \right\}^{1-p} \{\sigma(a_n, b_n)\}^{\frac{3p}{2}}$ расходится, либо имеет место неравенство

$$\sigma(a_n, b_n) \int_{I_n} q_-(x) dx \le C \quad (n = 1, 2, \dots), \tag{9}$$

где $0 \le C < 4$ — постоянная, и хотя бы один из трех рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{I_n} \{q_0(x)\}^{\frac{p}{1-p}} dx \right\}^{1-p} \left\{ \int_{I_n} \{\sigma(a_n, x) \sigma(x, b_n)\}^2 \vartheta(x) dx \right\}^{p/2}$$

при $\vartheta(x) = q_+(x)$, $|q_1(x)|$ или $|q_2(x)|$ расходится.

Тогда уравнение $l[y] = 0$ имеет решение, не принадлежащее пространству $L_2^p(I)$.

Доказательство. Применяя метод вариации произвольных постоянных к уравнению (3) и учитывая (7), заметим, что $U(x,t)$ удовлетворяет матричному интегральному уравнению

$$U(x,t) = U_-(x,t) + \int_t^x U_-(x,\xi) Q_+(\xi) U(\xi,t) d\xi, \tag{10}$$

где $U_-(x,t)$ — матрица Коши матричного уравнения $(Q_0 Y')' + Q_- Y = 0$, $Q_- = \begin{pmatrix} 0 & q_- \\ q_- & 0 \end{pmatrix}$, $Q_+ = Q + Q_-$. Матрицу $U_-(x,t)$ можно представить в виде

$$U_-(x,t) = \sigma(t,x) J - \int_t^x \sigma(t,\xi) \sigma(\xi,x) Q_-(\xi) d\xi + \sum_{m=1}^{\infty} \int_t^x \sigma(t,\xi) \{K_{2m}(x,\xi) - K_{2m+1}(x,\xi)\} d\xi, \tag{11}$$

где

$$K_1(x,\xi) = \sigma(\xi,x) Q_-(\xi), \quad K_m(x,\xi) = \int_\xi^x \sigma(\eta,x) q_-(\eta) K_{m-1}(\eta,\xi) d\eta \quad (m = 2, 3, \dots),$$

а J — постоянная квадратная матрица второго порядка $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. С другой стороны, заметим, что, не умаляя общности, константу C в неравенстве (8) заведомо можно считать меньшей 4. При этом из (8) (или, что то же самое, (9)) в силу легко проверяемого неравенства $\sigma(\xi,\eta)\sigma(\eta,x) \le \frac{\{\sigma(\xi,x)\}^2}{4}$ $(a_n \le \xi \le x \le b_n)$ выполняется неравенство

$$\int_\xi^x \sigma(\xi,\eta)\sigma(\eta,x)q_-(\eta)d\eta \le \frac{\{\sigma(\xi,x)\}^2}{4}\int_\xi^x q_-(\eta)d\eta \le \frac{C}{4}\sigma(\xi,x) \le \sigma(\xi,x). \tag{12}$$

Принимая во внимание (12), получаем: если $a_n \le \xi \le x \le b_n$, то $\{K_m(x,\xi) - K_{m+1}(x,\xi)\}$ $(m = 1,2,\dots)$ — матрица с неотрицательными элементами. В силу этого из соотношения (11) вытекает, что каждый элемент матрицы $U_-(x,t)$ не меньше соответствующего ему (т. е. стоящего в той же строке и том же столбце) элемента матрицы $\sigma(t,x)J - \int\limits_t^x \sigma(t,\xi)\sigma(\xi,x)Q_-(\xi)d\xi$ при $a_n \le t \le x \le b_n$. Для последней матрицы имеем

$$\sigma(t,x)J - \int_t^x \sigma(t,\xi)\sigma(\xi,x)Q_-(\xi)d\xi \ge \sigma(t,x)J - \frac{\{\sigma(t,x)\}^2}{4}\int_t^x Q_-(\xi)d\xi \ge$$
$$\ge \sigma(t,x)\left\{J - \frac{\sigma(a_n,b_n)}{4}\int_{I_n} Q_-(\xi)d\xi\right\} \ge \mu\sigma(t,x)J \quad (a_n \le t \le x \le b_n, \ \ \mu = 1 - \tfrac{C}{4}),$$

где неравенство между матрицами понимается в смысле неравенства соответствующих элементов этих матриц. Таким образом, при $a_n \le t \le x \le b_n$ каждый элемент матрицы $U_-(x,t)$ не меньше соответствующего ему элемента матрицы $\mu\sigma(t,x)J$. В силу этого факта, применяя метод последовательных приближений к матричному интегральному уравнению (10), в предположении неотрицательности коэффициентов $q_1(x)$ и $q_2(x)$ почти всюду на $\bigcup\limits_n I_n$ находим, что при $a_n \le t \le x \le b_n$ $(n = 1,2,\dots)$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned}
&u_{1,1}(x,t) \ge \mu^2\int_t^x \sigma(t,\xi)\sigma(\xi,x)q_2(\xi)d\xi,\\
&u_{2,2}(x,t) \ge \mu^2\int_t^x \sigma(t,\xi)\sigma(\xi,x)q_1(\xi)d\xi,\\
&u_{1,2}(x,t) \ge \mu^2\int_t^x \sigma(t,\xi)\sigma(\xi,x)q_+(\xi)d\xi,\\
&u_{1,2}(x,t) \ge \mu\sigma(t,x),
\end{aligned}$$

где $u_{1,1}$, $u_{1,2}$, $u_{2,2}$ — элементы матрицы

$$U(x,t) = \begin{pmatrix} u_{1,1}(x,t) & u_{1,2}(x,t) \\ u_{2,1}(x,t) & u_{2,2}(x,t) \end{pmatrix}.$$

Умножая каждое из этих неравенств на $\{q_0(x)q_0(t)\}^{-1}$, затем интегрируя их по треугольной области $\{(x,t) : a_n \le t \le x \le b_n\}$, находим

$$\int_{I_n} dx\int_{a_n}^x \{q_0(x)q_0(t)\}^{-1}\|U(x,t)\|dt \ge \int_{I_n} dx\int_{a_n}^x \{q_0(x)q_0(t)\}^{-1}u_{1,2}(x,t)dt \ge \frac{\mu}{6}\{\sigma(a_n,b_n)\}^3,$$
$$\int_{I_n} dx\int_{a_n}^x \{q_0(x)q_0(t)\}^{-1}\|U(x,t)\|dt \ge \frac{\mu^2}{4}\int_{I_n}\{\sigma(a_n,x)\sigma(x,b_n)\}^2\vartheta(x)dx \quad (n = 1,2,\dots),$$

где $\vartheta(x) = q_+(x)$, $q_1(x)$ или $q_2(x)$, и для завершения доказательства остается применить лемму.

Случай, когда функции $q_1(x)$ и $q_2(x)$ неположительны почти всюду на $\bigcup\limits_n I_n$, может быть сведен к только что рассмотренному следующим замечанием: если $y = (y_1(x), y_2(x))^\top$ — решение уравнения $l[y] = 0$, то $\widehat{y} = (y_1(x),\ -y_2(x))^\top$ — решение уравнения $-\{Q_0(x)\widehat{y}'\}' + \widehat{Q}(x)\widehat{y} = 0$, где $\widehat{Q}(x) = \begin{pmatrix} -q_1(x) & q(x) \\ q(x) & -q_2(x) \end{pmatrix}$. □

Если в доказанной теореме положить $p = 2$, то получим условия, при которых индекс дефекта оператора $\mathcal{L}$ отличен от $\{4, 4\}$. Отсюда, в частности, вытекает

Следствие 1. Пусть существует последовательность попарно непересекающихся интервалов $I_n = (a_n, b_n) \subset I$ $(n = 1, 2, \dots)$ такая, что

1) почти всюду на $\bigcup\limits_n I_n$ функция $q(x)$ неотрицательна, $q_0(x)$ положительна, а $q_1(x)$ и $q_2(x)$ либо обе неотрицательны, либо обе неположительны;
2) функция $\{q_0(x)\}^{-2}$ интегрируема по Лебегу на каждом I_n и расходится хотя бы один из четырех рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{I_n} \{q_0(x)\}^{-2} dx \right\}^{-1} \{\sigma(a_n, b_n)\}^3, \tag{13}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{I_n} \{q_0(x)\}^{-2} dx \right\}^{-1} \int_{I_n} \{\sigma(a_n, x)\sigma(x, b_n)\}^2 \vartheta(x) dx, \text{ где } \vartheta(x) = q(x),\ |q_1(x)| \text{ или } |q_2(x)|.$$

Тогда индекс дефекта оператора $\mathcal{L}$ отличен от $\{4, 4\}$.

Из следствия 1 с использованием теоремы 6 из ([9], § 14, гл. IV) получаем

Следствие 2. Пусть существует последовательность попарно непересекающихся интервалов $I_n = (a_n, b_n) \subset I$ $(n = 1, 2, \dots)$ такая, что

1) на $\bigcup\limits_n I_n$ функция $q_0(x)$ положительна почти всюду, $q(x)$ существенно ограничена снизу, функции $q_1(x)$, $q_2(x)$ существенно ограничены либо обе снизу, либо обе сверху;
2) $\{q_0(x)\}^{-2}$ интегрируема по Лебегу на каждом I_n и ряд (13) расходится.

Тогда индекс дефекта оператора $\mathcal{L}$ отличен от $\{4, 4\}$.

В самом деле, следствие 2 получается из следствия 1 в силу вышеуказанной теоремы из [9], поскольку условия, накладываемые на функции q, q_1, q_2 в следствии 1, сводятся к условиям, накладываемым на те же функции в следствии 2, прибавлением к матрице $Q(x)$ постоянной симметрической матрицы.

Литература

1. Chakravarty N.K. *Some problems in eigenfunction expansions.* I // Quart. J. Math. – 1965. – V. 16. – № 62. – P. 135–150.
2. Chakravarty N.K. *Some problems in eigenfunction expansions.* II // Quart. J. Math. – 1968. – V. 19. – № 74. – P. 213–224.
3. Chakravarty N.K. *Some problems in eigenfunction expansions.* III // Quart. J. Math. – 1968. – V. 19. – № 75. – P. 397–415.
4. Eastham M.S.P. *The deficiency index of a second-order differential system* // J. London Math. Soc. – 1981. – V . 23. – № 2. – P. 311–320.
5. Eastham M.S.P., Gould K.J. *Square-integrable solutions of a matrix differential expression* // J. Math. Anal. Appl. – 1983. – V. 91. – № 2. – P. 424–433.
6. Серебряков В.П. *Об условиях квазирегулярности одного сингулярного дифференциального оператора* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ. – 1992. – № 6. – С. 7–9.
7. Серебряков В.П. *Условия квазирегулярности сингулярной системы дифференциальных уравнений второго порядка с осциллирующими коэффициентами* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 3. – С. 45–50.

8. Серебряков В.П. *Об индексе дефекта матричных дифференциальных операторов второго порядка* // УМН. – 1997. – Т. 52. – Вып. 6. – С. 183–184.
9. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1969. – 521 с.
10. Мирзоев К.А. *Об условиях существования решения уравнения $y'' = qy$, не принадлежащего пространству $L^p(0, +\infty)$* // Матем. заметки. – 1990. – Т. 47. – № 4. – С. 77–82.

Московский государственный университет

Поступила 13.08.1997