ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 12 (499)

УДК 517.929

Е.А. НУРМИНСКИЙ

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ МЕТОД ПРОЕКЦИИ НА ВЫПУКЛУЮ ОБОЛОЧКУ СЕМЕЙСТВА МНОЖЕСТВ

Введение

В теории и практике математического программирования часто встречается задача

$$\min_{x\in X}\|x\| = \|z^*\| \tag{1}$$

нахождения в заданном множестве X элемента с минимальной нормой $\|\cdot\|$. На (1) можно смотреть и как на нахождение проекции начала координат на множество X, поэтому будем называть эту проблему задачей проекции.

Такая задача встречается в теории двойственности (построение отделяющей гиперплоскости), обобщенном решении несовместных задач, распознавании образов, оценке параметров, методах безусловной и условной оптимизации и пр. Чаще всего используется евклидова норма, однако, особенно в экономических приложениях, встречаются и другие нормы.

Следует отметить, что, как правило, на практике приходится находить проекцию на множество X, конструируемое с помощью некоторых базовых операций из более “простых” элементов. Наиболее известный пример — это система ограничений $X = \{x : g_i(x) \le 0,\ i = 1, 2, \dots, M\}$, которая представляет собой пересечение семейства множеств X_i, $i = 1, 2, \dots, M$, т. е. $X = \cap_{i=1}^{M} X_i$, где $X_i = \{x : g_i(x) \le 0\}$. Даже при аффинных функциях $g_i(\cdot)$ проекция на результирующее множество X представляет собой нетривиальную задачу. Это уже давно [1]–[3] и, правда, для более простой задачи допустимости (т. е. нахождении какого-либо $x \in X$) породило идею последовательного циклического проектирования (CSP), по которой решение x^i задачи

$$\min_{x\in X_i}\|x^{i-1} - x\| = \|x^{i-1} - x^i\| \tag{2}$$

проектируется на последующее множество X_{i+1}. При исчерпании всего списка множеств X_i осуществляется снова проектирование на первое множество и т. д.

В дальнейшем, с распространением параллельных вычислений, эта идея была модифицирована в том плане, что проекции выполнялись одновременно, а затем результаты усреднялись с какими-то весами (см., напр., [4] и ссылки там же). Эти алгоритмы получили название PBS-методов. Потенциальным вычислительным преимуществом этих методов является простота отдельной операции проектирования и возможность их одновременного выполнения. Что касается реальных вычислительных характеристик, то они до сих пор не очень хорошо исследованы и в настоящее время продолжается работа над ускорением их сходимости (напр., [5], [6]).

В данной работе рассмотрен другой способ конструирования множества X, а именно, с помощью операции взятия выпуклой оболочки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-0225.

Определение 1. Выпуклой оболочкой $\mathrm{co}\{X_i,\ i=1,2,\ldots,M\}$ семейства множеств X_i, $i=1,2,\ldots,M$, называется множество

$$X=\left\{x=\sum_{i=1}^{M}\lambda_i x^i,\quad \text{где}\ \ x^i\in X_i,\quad \lambda_i\geq 0,\quad i=1,2,\ldots,M;\ \ \sum_{i=1}^{M}\lambda_i=1\right\}. \tag{3}$$

Подробное изложение свойств выпуклых оболочек можно найти, например, в [7].

Множества X_i могут быть различной природы. Поскольку

$$\mathrm{co}\{X_i,\ i=1,2,\ldots,M\}=\mathrm{co}\{\mathrm{co}\{X_i\},\ i=1,2,\ldots,M\},$$

то без ограничения общности множества X_i можно считать выпуклыми.

Допустимое множество задачи линейного программирования, например, при условии его ограниченности представимо в виде выпуклой оболочки (3) с одноточечными множествами X_i, представляющими собой крайние точки полиэдра допустимости. Заметим, что можно агрегировать крайние точки (или множества X_i) и получать различные представления X в виде выпуклой оболочки граней или подмножеств различной размерности.

В рамках введенных понятий и обозначений основная цель работы заключается в том, чтобы предложить алгоритм, использующий параллельное решение задач типа (2) и их последующее агрегирование для получения решения исходной задачи (1) с множеством (3). Неявное предположение при этом состоит в том, что задачи проекции типа (2) непосредственно с X_i или их простыми модификациями достаточно легко разрешимы по сравнению с первоначальной задачей (1).

В последующем будем считать норму $\|\cdot\|$ евклидовой.

1. Алгоритм

Предлагаемый метод решения задачи (1)–(3) имеет итеративный характер и состоит из начальной инициализации и последующих итераций, каждая из которых состоит из трех шагов.

Начало. Положить $k=0$ (счетчик итераций) и выбрать начальное приближение $z^0\in X$ для решения задач (1)–(3).

Шаг 1. Присоединить к каждому множеству X_i точку z^k, т. е. сформировать множества $\overline{X}_{i,k}=\mathrm{co}\{X_i,z^k\}$ и для каждого $i=1,2,\ldots,M$ решить задачу

$$\min_{x\in\overline{X}_{i,k}}\|x\|=\|x^{i,k}\|. \tag{4}$$

Шаг 2. Из точек $x^{i,k}$, $i=1,2,\ldots,M$, составить множество $Z_k=\mathrm{co}\{x^{i,k},\ i=1,2,\ldots,M\}$ и решить координирующую задачу

$$\min_{z\in Z_k}\|z\|=\|z^{k+1}\|. \tag{5}$$

Шаг 3. Увеличить счетчик итераций $k\to k+1$, повторить итерацию.

С точки зрения параллельных вычислений координирующая задача (5) существенно уменьшает степень параллелизма, однако можно предположить, что в реальных параллельных вычислительных системах количество M одновременно выполняющихся блоков (4) не слишком велико.

Фактически оно должно соответствовать архитектуре вычислительной системы, т. е. количеству процессорных элементов. В параллельных вычислителях массового применения это количество, как правило, не превосходит нескольких десятков (см. статистику в [8]). Соответственно задача (5) имеет относительно небольшой объем и ее вклад в общий объем вычислений не слишком велик. Таким образом, при крупнозернистой параллелизации, где основные вычислительные затраты связаны с решением задач (4), замедление, вызванное синхронизирующим барьером (5), не будет оказывать большого негативного влияния.

Заметим, что мы не предписываем каких-либо определенных способов решения задач (4), (5). Эти задачи могут решаться итеративно или, при их разумных объемах, конечными методами квадратичного программирования. При итеративном решении возникают, однако, интересные вопросы контроля точности вычислений и использования приближенных решений (4), что будет исследовано в дальнейшем. В настоящий момент рассмотрим лишь принципиальную схему алгоритма и убедимся в ее разумности.

2. Анализ сходимости

Предварительно введем некоторые вспомогательные обозначения и приведем (для самодостаточности изложения) некоторые полезные свойства выпуклых множеств.

Обозначим через $(X)_z$ опорную функцию множества X:

$$(X)_z = \sup_{x\in X} zx.$$

В этих обозначениях проекция начала координат на множество X определяется следующей леммой.

Лемма 1. *Точка $z^* \in X$ является решением задачи* (1) *тогда и только тогда, когда*

$$\|z^*\|^2 + (X)_{-z^*} \leq 0.$$

Доказательство. Фактически это другой способ записи вариационной формы условий оптимальности z^*, которая выглядит как

$$\|z^*\|^2 \leq z^* x \ \text{ для всех } \ x \in X. \quad \square$$

Если множество X задается соотношением (3), то его опорная функция легко вычисляется через опорные функции составляющих X_i, $i = 1, 2, \ldots, M$. Обозначим через Δ_M множество неотрицательных весов $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_M)$, нормированных на единицу,

$$\Delta_M = \left\{\lambda : \sum_{i=1}^{M} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, M\right\}.$$

Из определения опорной функции следует

Лемма 2. *Если $X = \mathrm{co}\{X_i, \ i = 1, 2, \ldots, M\}$, то*

$$(X)_z = \sup_{\lambda\in\Delta_M} \sum_{i=1}^{M} \lambda_i (X_i)_z = \max_{i=1,2,\ldots,M} (X_i)_z .$$

Лемма 3. *Последовательность $\{\|z^k\|\}$ монотонно убывает и, следовательно, ограничена в совокупности.*

Доказательство следует из оценок

$$\|z^{k+1}\|^2 \leq \min_{i=1,2,\ldots,M} \|x^{i,k}\|^2 = \min_{i=1,2,\ldots,M} \min_{x\in\mathrm{co}(X_i, z^k)} \|x\|^2 \leq \min_{i=1,2,\ldots,M} \|z^k\|^2 = \|z^k\|^2. \quad \square$$

Из леммы 3 следует также существование предела $\lim_{k\to\infty} \|z^k\| = \rho$.

Основной результат о сходимости алгоритма раздела 1 представляет

Теорема. *Последовательность $\{z^k\}$ сходится к единственной предельной точке z^*, являющейся решением задачи* (1).

Доказательство. Заметим, что задача (1) имеет единственное решение в силу строгой квазивыпуклости евклидовой нормы, поэтому для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что любая предельная точка последовательности $\{z^k\}$ является ее решением.

Предположим поэтому, что $\overline{z}$ — некоторая предельная точка $\{z^k\}$, которая существует в силу леммы 3. Пусть K — множество индексов таких, что

$$\lim_{k\in K,\ k\to\infty} z^{k+1} = \overline{z}.$$

Из оценок

$$\rho \le \|z^{k+1}\| \le \|x^{i,k}\| \le \min_{x\in \overline{X}_{i,k}} \|x\| \le \|z^k\|$$

следует, что $\|x^{i,k}\|$ монотонно убывают и имеют тот же предел ρ, что и $\|z^k\|$.

Пусть $\overline{x}^i$ — некоторые предельные точки последовательностей $\{x^{i,k},\ k\in K\}$. Поскольку

$$z^{k+1} \in Z_k = \mathrm{co}\{x^{i,k},\ i=1,2,\ldots,M\},$$

то и

$$\overline{z} \in \mathrm{co}\{\overline{x}^i,\ i=1,2,\ldots,M\}$$

с $\rho = \|\overline{z}\| = \|\overline{x}^i\|$, $i=1,2,\ldots,M$. Последнее возможно только в том случае, когда $\overline{z}=\overline{x}^i$, $i=1,2,\ldots,M$.

Далее, по построению для $i=1,2,\ldots,M$

$$\|x^{i,k}\|^2 + (X_i)_{-x^{i,k}} \le \|x^{i,k}\|^2 + \left(\mathrm{co}\{X_i, z^k\}\right)_{-x^{i,k}} = \|x^{i,k}\|^2 + (X_{i,k})_{-x^{i,k}} \le 0.$$

Переходя к пределу по $k\to\infty$, $k\in K$, получаем

$$\|\overline{z}\|^2 + (X_i)_{-\overline{z}} \le 0, \quad i=1,2,\ldots,M.$$

Отсюда

$$\|\overline{z}\|^2 + \max_{i=1,2,\ldots,M} (X_i)_{-\overline{z}} = \|\overline{z}\|^2 + (X)_{-\overline{z}} \le 0$$

и, следовательно, $\overline{z}$ — решение задачи (1), т. е. $\overline{z}=z^*$. Единственность этого решения влечет за собой сходимость

$$\lim_{k\to\infty} z^k = z^*,$$

причем одновременно $x^{i,k}\to z^*$ для всех $i=1,2,\ldots,M$. $\square$

До сих пор исследование предложенного алгоритма носило теоретический характер, однако уже доказательство сходимости позволяет надеяться на наличие у метода положительных вычислительных свойств. В частности, сходимость всех раздельных решений (4) к общей точке — проекции z^* — может уменьшить часто встречающийся эффект неустойчивости по направлению для z^*, когда начало координат близко к X. Особый интерес это представляет в связи с методами, основанными на построении отделяющих плоскостей [9]–[13].

Литература

1. Kaczmarz S. *Angenäherte Auflösung von Systemen linearer Gleichungen* // Bull. Acad. Polon. Sci. Lett. – 1937. – A 35. – P. 355-357.
2. Брегман Л.М. *Метод последовательных проекций для поиска общей точки выпуклых множеств* // ДАН СССР. – 1965. – Т. 162. – С. 487–490.
3. Губин Л.Г., Поляк Б.Т., Райк Е.В. *Метод проекции для нахождения общей точки выпуклых множеств* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1967. – Т. 7. – № 1. – С. 1–24.
4. Censor Y., Cohen N., Kutscher (Kotzer) T., Shamir J. *Summed squared distance error reduction by simultaneous multiprojections and applications* // Appl. Math. and Comput. – 2002. – V. 126. – P. 157–179.
5. Crombez C. *A parallel projection method based on sequential most remote set in convex feasibility problems* // Appl. Math. and Comput. – 1995. – V. 72. – P. 113–124.

6. Garcia-Palomares U.M., Gonzalez-Castano F.J. *Incomplete projection algorithms for solving the convex feasibility problem* // Numer. Algorithms. – 1998. – V. 18. – P. 177–193.
7. Лейхтвейс К. *Выпуклые множества.* – М.: Наука, 1985. – 336 с.
8. *Учебно-информационный центр по параллельным вычислениям*: http://parallel.ru.
9. Sonnevend G. *New algorithms in convex programming based on the notion of "centre" (for systems of analytic inequalities) and on rational extrapolation* // Trends in Math. Optim. Intern. Ser. Numer. Math. – Birkhäuser-Verlag: Basel, 1988. – V. 84. – P. 311–326.
10. Нурминский Е.А. *Об одном классе методов выпуклого программирования* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1986. – Т. 26. – Вып. 8. – С. 1150–1159.
11. Goffin J.-L., Haurie A., Vial J.-Ph. *Decomposition and nondifferentiable optimization with the projective algorithm* // Management Sci. – 1992. – V. 37. – P. 284–302.
12. Ye Y. *A potential reduction algorithm allowing column generations* // SIAM J. Optim. – 1992. – V. 2. – P. 7–20.
13. Altman A., Kiwiel K.C. *A note on some analytic center cutting plane methods for convex feasibility and minimization problems* // Comput. Optim. and Appl. – 1996. – V. 5. – P. 175–180.

Дальневосточный государственный университет

Поступила
18.05.2003