ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 10 (473)

УДК 517.938; 513.73

И.А. ГАЛИУЛЛИН

БЭРОВСКИЙ КЛАСС ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ ПАРАМЕТРЫ

1. Показатели Ляпунова параметризованных семейств дифференциальных уравнений на многообразиях

Рассматривается связное риманово (бесконечно) дифференцируемое многообразие M^m размерности m; пусть F — векторное поле на M^m, удовлетворяющее условию $\sup\limits_{x\in M^m} \|\nabla F(x)\|_1 < +\infty$, где ∇F — ковариантный дифференциал векторного поля F, норма $\|\cdot\|_1$ — это операторная норма линейного отображения, определенная посредством римановой метрики на M^m.

Пусть, далее, S — метрическое пространство (дифференцируемых) векторных полей на многообразии M^m и расстояние задано формулой

$$d(F_1,F_2) = |F_1(x_0) - F_2(x_0)| + \sup_{x\in M^m} \|\nabla F_1(x) - \nabla F_2(x)\|_1,$$

где x_0 — произвольная точка M^m, причем выбор другой точки x_0 приводит к эквивалентной метрике; определенное таким образом метрическое пространство, как известно, является полным. Будем теперь воспринимать векторное поле $F \in S$ как дифференциальное уравнение первого порядка на M^m ([1], с. 79).

Если $(y_1,\dots,y_m)$ — система локальных координат на открытом множестве $U \subset M^m$ и $\sum\limits_i a_i\partial/\partial y_i$ — локальное выражение поля F, то интегральные кривые F в U являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\dot x_i = a_i(x_1,\dots,x_m), \quad i = 1,\dots,m. \tag{1.1}$$

Как известно, если (1.1) — система уравнений в $\mathbb{R}^m$, то система уравнений в вариациях (вдоль решения $\widetilde{x}(t)$ с начальной точкой $\widehat{x}$) имеет вид

$$\dot\xi = A_{F,\hat x}(t)\xi \quad (A_{F,\hat x}(t) = F'_x(\widetilde{x}(t)), \ \ \xi \in \mathbb{R}^m). \tag{1.2}$$

Равенства (1.2) представляют линейную систему дифференциальных уравнений, для которой известным образом определяются показатели Ляпунова $\lambda_1(F,\widehat{x}) \geq \dots \geq \lambda_m(F,\widehat{x})$.

Обобщение понятия k-го показателя Ляпунова на случай произвольного дифференцируемого риманова многообразия M^m и дифференциального уравнения (векторного поля) F на нем проведено в [2], а также в [3], где рассматриваются эндоморфизмы X_t метризованного векторного расслоения (E,p_B,B) и показатели Ляпунова определяются для непрерывного семейства $(t,e) \mapsto |X_te|$ отображений из $\mathbb{R}^+ \times E$ в $\mathbb{R}$ по формуле

$$\lambda_k(b) = \inf_{L\in\mathcal{L}_b^{m-k+1}} \ \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\ln\|X_t|_L\|_2;$$

здесь $\mathcal{L}_b^{m-k+1}$ — множество всех $(m-k+1)$-мерных векторных подпространств слоя $p_B^{-1}(b)$, а $X_t|_L$ — сужение X_t на L, норма $\|\cdot\|_2$ — стандартная операторная норма в линейном пространстве L, определенная через риманову метрику метризованного расслоения (E, p_B, B); здесь же отмечается, что λ_k может принимать значения $\pm\infty$ (в частности, $\lambda_k(0) = -\infty$), т. е. λ_k — отображение B в расширенную числовую прямую $\overline{\mathbb{R}}$.

Пусть $\mathcal{M}$ — некоторое топологическое пространство, элементы которого μ воспринимаются как параметры; пусть ψ — непрерывное отображение $\mathcal{M}$ в базу векторного расслоения (E, p_B, B). Для случая, когда образ элемента $\mu \in \mathcal{M}$ является аргументом показателя Ляпунова (что отвечает зависимости элементов базы B от параметра), рассматриваются показатели Ляпунова на образе $\psi(\mathcal{M}) \subseteq B$, зависимость которых от параметров μ определяется формулой $\mu \mapsto \lambda_k(\psi\mu)$ (эти функции $\mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ будут обозначаться $\overline{\lambda}_k(\mu)$). Следующее утверждение определяет характер этой зависимости и множества точек разрыва, когда пространство $\mathcal{M}$ метризуемо и полно в некоторой метрике.

Теорема 1 ([3]). 1. *Для любого $k = 1, \ldots, m$ функция $\overline{\lambda}_k(\mu) : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ есть бэровская функция второго класса (следовательно, по теореме Бэра ее сужение на некоторое всюду плотное множество типа G_δ в $\mathcal{M}$ является непрерывной функцией).*

2. *Точка полунепрерывности сверху каждой из функций $\overline{\lambda}_k(\mu) : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ является типичной в $\mathcal{M}$ (это означает, что множество таких точек является в $\mathcal{M}$ всюду плотным типа G_δ).*

Пусть $\dot{x} = F(x, \mu)$ — дифференциальное уравнение "с правой частью, зависящей от параметров". Конструкции работы [3] таковы, что если потребовать непрерывную зависимость элементов базы, т. е. поля F и точек многообразия ("начальных значений"), от параметров, то применимость приведенной теоремы к рассматриваемой ситуации, когда векторное поле либо структура многообразия или и то, и другое (непрерывно) зависят от параметра, будет вытекать из следующего утверждения, являющегося частным вариантом теоремы ([4], с. 385) о бэровском классе сложной функции, когда известны классы обеих функций.

Предложение. *Пусть $\mathcal{M}_0$ и B_0 — метрические пространства, отображение $\psi_0 : \mathcal{M}_0 \to B_0$ непрерывно и функция $\lambda_0(\cdot) : \psi_0(\mathcal{M}_0) \to \overline{\mathbb{R}}$ ($\overline{\mathbb{R}}$ — расширенная числовая прямая) принадлежит второму бэровскому классу. Тогда функция $\overline{\lambda}_0(\cdot) \equiv \lambda_0(\psi_0(\cdot)) : \mathcal{M}_0 \to \overline{\mathbb{R}}$ есть также функция второго бэровского класса.*

К рассмотренному случаю приложимы все утверждения теоремы 1, когда вместо уравнения (1.1) исследуется неавтономная система, т. е. уравнение вида $\dot{x} = F(x, t, \mu)$, где векторное поле F непрерывно зависит от параметра $\mu \in \mathcal{M}$.

2. Реономные механические системы и дифференциальные уравнения второго порядка на многообразиях

Здесь обобщаются необходимые конструкции [1], на основе которых устанавливается возможность применения теоремы 1 к классу векторных полей $\mathcal{F}$ на касательном расслоении, определяемых как дифференциальные уравнения второго порядка.

Пусть $T(M)$ — касательное пространство многообразия M^m без края, которое также является многообразием, причем, как следует из структуры его атласа ([1], с. 68), оно будет связным, если таковым является само многообразие M^m. Локальное выражение поля $\mathcal{F}$ имеет вид ([1], с. 159)

$$\sum_i \left(\dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q_i} + a_i(q_1, \ldots, q_m; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right). \tag{2.1}$$

Интегральные кривые поля $\mathcal{F}$ локально являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i, \quad \frac{d\dot{q}_i}{dt} = a_i(q_1, \ldots, q_m; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m), \quad i = 1, \ldots, m. \tag{2.2}$$

Изложенные в ([1], с. 152–170) определения и свойства далее используются для обобщения понятия механической системы ([1], с. 173), где конфигурационное пространство определяется как многообразие M^m, фазовое пространство — как его касательное пространство $T(M)$, кинетическая энергия — это некоторая дифференцируемая функция T на $T(M)$, а с силовым полем связана полубазисная форма Пфаффа π на $T(M)$ ([1], с. 167), наконец, сама механическая система определена как тройка (M^m, T, π).

Список аргументов функции T в локальном выражении, таким образом, состоит из "обобщенных координат" $q_1, \ldots, q_m$ и "обобщенных скоростей" $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m$, что соответствует классу механических систем, которые называются склерономными ([5], с. 35–36). Ниже приводится построение математических объектов, позволяющих на языке дифференциальной геометрии описать реономные механические системы, т. е. такие, для которых кинетическая энергия T зависит также и от времени. В этом случае T определяется здесь как дифференцируемая функция на многообразии $T(M) \times \mathbb{R}$, ее локальное выражение имеет вид $T = T(q_1, \ldots, q_m; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m; t)$. На самом касательном пространстве $T(M)$ полагаются определенными два дифференциальных оператора ([1], с. 164–165), представляющих собой эндоморфизмы пространства дифференциальных форм $\Lambda(T(M))$ на $T(M)$: вертикальное дифференцирование $\mathbf{i}_v$, действующее по формуле $\mathbf{i}_v \alpha(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_p) \mapsto \sum\limits_i \alpha(\mathcal{X}_1, \ldots, v\mathcal{X}_i, \ldots, \mathcal{X}_p)$, когда α — форма степени p, и $\mathbf{i}_v f = 0$ для дифференцируемой функции f на $T(M)$ ($\mathcal{X}_i$ — векторное поле, а v — вертикальный эндоморфизм второго касательного расслоения ([1], с. 161)); вертикальное антидифференцирование $\mathbf{d}_v$ по формуле $\mathbf{d}_v = \mathbf{i}_v \mathbf{d} - \mathbf{d} \mathbf{i}_v$, где $\mathbf{d}$ — внешнее дифференцирование.

В качестве обобщений этих определений здесь вводятся следующие операторы на $\Lambda(T(M) \times \mathbb{R})$, где $T(M) \times \mathbb{R}$ — дифференцируемое многообразие размерности $2m + 1$.

Определение 1. Вертикальным варьированием $\Lambda(T(M) \times \mathbb{R})$ называется оператор $\boldsymbol{\iota}_v$, при каждом $t \in \mathbb{R}$ являющийся вертикальным дифференцированием $\Lambda(T(M)) \subset \Lambda(T(M) \times \mathbb{R})$.

Определение 2. Вертикальным антиварьированием $\Lambda(T(M) \times \mathbb{R})$ называется оператор $\boldsymbol{\delta}_v$, при каждом $t \in \mathbb{R}$ являющийся вертикальным антидифференцированием $\Lambda(T(M)) \subset \Lambda(T(M) \times \mathbb{R})$.

Тогда имеют место локальные формулы, аналогичные ([1], с. 164),

$$\boldsymbol{\iota}_v f = 0, \quad \boldsymbol{\iota}_v(dq_i) = \boldsymbol{\iota}_v(dt) = 0, \quad \boldsymbol{\iota}_v(d\dot{q}_i) = dq_i,$$
$$\boldsymbol{\delta}_v f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} dq_i, \quad \boldsymbol{\delta}_v(dq_i) = \boldsymbol{\delta}_v(d\dot{q}_i) = \boldsymbol{\delta}_v(dt) = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Определение 3. Внешним варьированием на многообразии $M^m \times \mathbb{R}$ называется оператор $\boldsymbol{\delta}$, при каждом $t \in \mathbb{R}$ совпадающий с внешним дифференцированием $\Lambda(M^m) \subset \Lambda(M^m \times \mathbb{R})$.

Аналогично ([1], с. 89) оператор $\boldsymbol{\delta}$ локально определяется формулами $\boldsymbol{\delta} f = d(f\big|_{t=\mathrm{const}})$ и $\boldsymbol{\delta}(df) = 0$, где f — дифференцируемая функция на $M^m \times \mathbb{R}$.

Очевидно, операторы $\boldsymbol{\iota}_v$ и $\boldsymbol{\delta}_v$ (соответственно $\boldsymbol{\delta}$) наследуют свойства операторов $\mathbf{i}_v$ и $\mathbf{d}_v$ на $T(M)$ (соответственно $\mathbf{d}$ на M^m).

Как отмечалось выше, $T(M) \times \mathbb{R}$ является многообразием, и на нем среди всех векторных полей будут выделяться те поля, которые имеют вид $\mathcal{X} + \partial/\partial t$, где $\mathcal{X}$ — векторное поле на $T(M)$.

Определение 4. Неавтономным дифференциальным уравнением второго порядка $\mathcal{T}$ называется векторное поле $\mathcal{F} + \partial/\partial t$ на $T(M) \times \mathbb{R}$, для которого поле $\mathcal{F}$ является дифференциальным уравнением второго порядка на $T(M)$ ([1], с. 159).

При этом само поле $\mathcal{F}$ локально имеет выражение (2.1).

Определение 5 (ср. [1], с. 171). Замкнутая форма $\omega = \mathbf{d}\boldsymbol{\delta}_v T$ степени 2 на $T(M) \times \mathbb{R}$ называется фундаментальной формой реономной механической системы (M^m, T, π).

Ниже будет предполагаться, что сужение $\omega|_{T(M)}$ — симплектическая форма на $T(M) \times \{t\}$, тогда многообразие $T(M)$ является симплектическим.

Пусть $\mathbf{i}_{\mathcal{Y}}$ — оператор внутреннего произведения на некоторое векторное поле $\mathcal{Y}$.

Лемма 1. *Дифференциальная форма $\mathbf{i}_{\mathcal{X}+\partial/\partial t}(\mathbf{d}\boldsymbol{\delta}_v T)$ является формой Пфаффа, принадлежащей $\Lambda(T(M) \times \mathbb{R})$.*

Доказательство. Достаточно использовать локальные выражения. Так как

$$\boldsymbol{\delta}_v T = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} dq_j,$$

то

$$\omega = \mathbf{d}\boldsymbol{\delta}_v T = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} d\dot{q}_i \wedge dq_j + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 T}{\partial q_i \partial \dot{q}_j} dq_i \wedge dq_j + \sum_j \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial \dot{q}_j} dt \wedge dq_j.$$

Пусть векторное поле $\mathcal{X}$ на $T(M)$ выражается формулой

$$\sum_i \left(a_i(q_1, \ldots, q_m;\ \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} + b_i(q_1, \ldots, q_m;\ \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m) \frac{\partial}{\partial q_i} \right). \tag{2.3}$$

Внутреннее произведение $\mathbf{i}_{\mathcal{Y}}$ действует по правилам: $\mathbf{i}_{\mathcal{Y}}(df) = \mathcal{Y}f$ для дифференцируемой функции f; $\mathbf{i}_{\mathcal{Y}}(\alpha \wedge \beta) = (\mathbf{i}_{\mathcal{Y}}(\alpha)) \wedge \beta - \alpha \wedge (\mathbf{i}_{\mathcal{Y}}(\beta))$ для дифференциальных форм α и β. В частности, $\mathbf{i}_{\mathcal{X}}(d\dot{q}_i) = a_i$, $\mathbf{i}_{\mathcal{X}}(dq_i) = b_i$, $\mathbf{i}_{\mathcal{X}}(dt) = 0$, $\mathbf{i}_{\partial/\partial t}(dq_i) = \mathbf{i}_{\partial/\partial t}(d\dot{q}_i) = 0$, $\mathbf{i}_{\partial/\partial t}(dt) = 1$. Поэтому

$$\mathbf{i}_{\mathcal{X}+\partial/\partial t}\omega = \mathbf{i}_{\mathcal{X}}\omega + \mathbf{i}_{\partial/\partial t}\omega = \sum_j \left(\sum_i \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} a_i + \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial \dot{q}_j} \right) dq_j - \\ - \sum_{i,j} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} b_i \, d\dot{q}_j - \sum_i \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial \dot{q}_i} b_i \, dt. \quad \square \tag{2.4}$$

Среди полей на $T(M)$ общего вида (2.3) особо выделяется векторное поле Лиувилля $\mathcal{V}$, порождающее так называемую однопараметрическую группу гомотетий ([1], с. 158), которые локально задаются формулой $(q_i, \dot{q}_i) \mapsto (q_i, e^t \dot{q}_i)$, т. е. для $\mathcal{V}$ коэффициенты в (2.3) имеют вид $a_i = \dot{q}_i$, $b_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Из определения 3 теперь выводится

Лемма 2. *Пусть (M^m, T, π) — реономная механическая система. Тогда существует и притом единственное векторное поле $\mathcal{Z}$ на $T(M) \times \mathbb{R}$ такое, что*

$$\mathbf{i}_{\mathcal{Z}}(\mathbf{d}\boldsymbol{\delta}_v T) = \boldsymbol{\delta} T - d(\mathcal{V}T) + \pi, \tag{2.5}$$

где $\mathcal{V}$ — векторное поле Лиувилля на $T(M)$.

Доказательство. Согласно утверждению ([1], с. 126) отображение $\mathcal{X} \mapsto \mathbf{i}_{\mathcal{X}}\omega$ выражает изоморфизм векторных полей $\mathcal{X}$ на симплектическом многообразии с одной стороны и дифференциальных форм Пфаффа на этом многообразии — с другой. Правая часть равенства (2.5), очевидно, является линейной дифференциальной формой, элементом пространства $\Lambda(T(M) \times \mathbb{R})$. По лемме 1 аналогичное справедливо в отношении левой части. Зафиксируем произвольное $t \in \mathbb{R}$. При $\mathcal{Z} = \mathcal{X} + \frac{\partial}{\partial t}$, где $\mathcal{X}$ — векторное поле на $T(M)$, (2.5) превращается в равенство $\mathbf{i}_{\mathcal{X}}(dd_v T) = d(T - \mathcal{V}T) + \pi$, являющееся следствием указанного изоморфизма. Следовательно, равенство (2.5) имеет место на прямом произведении $\Lambda(T(M) \times \mathbb{R})$, и из существования и единственности поля $\mathcal{X}$ вытекает существование и единственность поля $\mathcal{Z} = \mathcal{X} + \frac{\partial}{\partial t}$. $\square$

Аналогично определению ([1], с. 174) векторное поле $\mathcal{Z}$ будет называться динамической системой, соответствующей (реономной) механической системе (M^m, T, π). Следующая теорема конкретизирует связь между рассматриваемыми полями и системами.

Теорема 2. *Динамическая система $\mathcal{Z}$, соответствующая реономной механической системе (M^m, T, π), является неавтономным дифференциальным уравнением второго порядка $\mathcal{T}$ на многообразии M^m.*

Доказательство. Используя определение поля Лиувилля $\mathcal{V}$ и оператора $\boldsymbol{\delta}$, можно записать

$$\mathcal{V}T = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i; \quad \boldsymbol{\delta}T = \sum_j \left(\frac{\partial T}{\partial q_j}dq_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}d\dot{q}_j\right).$$

Пусть, далее, локальное выражение для π имеет вид $\pi = \sum\limits_j Q_j dq_j$. Тогда правая часть равенства (2.5) представляет дифференциальную форму

$$\boldsymbol{\delta}T - d(\mathcal{V}T) + \pi = \sum_j \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \sum_i \frac{\partial^2 T}{\partial q_j \partial \dot{q}_i}\dot{q}_i + Q_j\right)dq_j - \sum_{i,j}\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\dot{q}_i d\dot{q}_j - \sum_i \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial \dot{q}_i}\dot{q}_i dt. \quad (2.6)$$

Из сравнения коэффициентов при $d\dot{q}_j$ в выражениях (2.4) и (2.6) следуют равенства $b_i = \dot{q}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, что приводит к формуле

$$\mathcal{Z} = \sum_i \left(\dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q_i} + a_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.7)$$

В силу (2.1) это означает, что векторное поле $\mathcal{Z} \equiv \mathcal{T}$ является (неавтономным) дифференциальным уравнением второго порядка. $\square$

Аналогично, сравнение коэффициентов при dq_j с учетом уравнений (2.2) дает систему равенств

$$\sum_i \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial^2 T}{\partial q_i \partial \dot{q}_j}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial q_j} + Q_j, \quad j = 1, \ldots, m,$$

что эквивалентно системе дифференциальных уравнений, имеющих форму классических уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\right) = Q_j, \quad j = 1, \ldots, m,$$

и описывающих движение как склерономных, так и реономных механических систем.

3. Показатели Ляпунова голономных механических систем

Здесь устанавливается бэровский класс показателей Ляпунова эндоморфизмов, определяемых векторными полями особого рода, а именно, (неавтономными) дифференциальными уравнениями второго порядка. Исходным объектом является механическая система в смысле определения предыдущего параграфа, притом содержащая параметры, более точно, непрерывно зависящая от них. Последнее означает, что выполняются условия теоремы 1 и вытекающие из нее утверждения. Указанное векторное поле — это динамическая система $\mathcal{T}$, соответствующая (реономной) механической системе (M^m, T, π). Векторное расслоение в этой ситуации имеет структуру, описанную в § 1. Итак, предполагается, что существует непрерывное отображение ψ полного метрического пространства $\mathcal{M}$ (параметров) в базу B расслоения, одним из составляющих элементов в которой является совокупность векторных полей на многообразии $T(M) \times \mathbb{R}$.

В § 2 от многообразия M^m не требовалось, чтобы оно было римановым, здесь это требование существенно, причем многообразие $T(M)$ также можно считать римановым (в отдельных случаях метрикой служит кинетическая энергия T). Риманову структуру можно задать и на следующем касательном расслоении, для которого тотальное пространство $T(T(M))$ называется вторым касательным пространством ([1], с. 157).

Теорема 1, изложенная в § 1, обладая высокой степенью общности, предусматривает, таким образом, проверку выполнения единственного условия, а именно, неравенства (1.1) в форме

$$\sup_{x\in T(M)} \|\nabla\mathcal{T}(x)\|_3 < +\infty, \tag{3.1}$$

где норма $\|\cdot\|_3$ аналогична норме $\|\cdot\|_1$.

Пусть векторное поле $\mathcal{T}$ в локальных координатах имеет вид (2.7), где векторы $\partial/\partial q_i$, $\partial/\partial\dot q_i$, $\partial/\partial t$, $i=1,\ldots,m$, являются базисными в касательном расслоении многообразия $T(M)\times\mathbb{R}$. Определение нормы ковариантного дифференциала требует рассмотрения ковариантной производной $\nabla_{\mathcal{Y}}\cdot\mathcal{T}$ относительно некоторого векторного поля $\mathcal{Y}$ на этом многообразии, которое также раскладывается по этим векторам. Из линейности оператора по аргументу $\mathcal{Y}$ следует, что для исследования неравенства (3.1) достаточно в качестве $\mathcal{Y}$ вначале выбрать любой из базисных векторов. Тогда по формулам ([6], сс. 79, 82) (в частности, для дифференцируемой функции $f:\nabla_{\mathcal{Y}}\cdot(f\mathcal{T}) = f\nabla_{\mathcal{Y}}\cdot\mathcal{F}+\mathcal{Y}f\cdot\mathcal{F}$) получаются следующие выражения для ковариантных производных:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathcal{Y}}\mathcal{T} = \sum_{i=1}^{m}\Bigg[\dot q_i\Bigg(\sum_{\nu=1}^{m}\Gamma^{\nu}_{i,(\cdot)}\frac{\partial}{\partial q_\nu} + \sum_{\nu=m+1}^{2m}\Gamma^{\nu}_{i,(\cdot)}\frac{\partial}{\partial \dot q_\nu} + \Gamma^{2m+1}_{i,(\cdot)}\frac{\partial}{\partial t}\Bigg) + \\ + a_i\Bigg(\sum_{\nu=1}^{m}\Gamma'^{\nu}_{i,(\cdot)}\frac{\partial}{\partial q_\nu} + \sum_{\nu=m+1}^{2m}\Gamma'^{\nu}_{i,(\cdot)}\frac{\partial}{\partial \dot q_\nu} + \Gamma'^{2m+1}_{i,(\cdot)}\frac{\partial}{\partial t}\Bigg) + \frac{\partial a_i}{\partial(*)}\mathcal{T}\Bigg] + \\ + \sum_{\nu=1}^{m}\Gamma^{\nu}_{2m+1,(\cdot)}\frac{\partial}{\partial q_\nu} + \sum_{\nu=m+1}^{2m}\Gamma^{\nu}_{2m+1,(\cdot)}\frac{\partial}{\partial \dot q_\nu} + \Gamma^{2m+1}_{2m+1,(\cdot)}\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{T},\end{aligned} \tag{3.2}$$

где функции $\Gamma^{\nu}_{i,j}$ и $\Gamma'^{\nu}_{i,j}$ — компоненты, или символы Кристоффеля линейной связности, через $(\cdot)$ обозначен номер базисного вектора $\mathcal{Y}$, через $\partial/\partial(*)$ — производная по соответствующей координате.

В этой формуле следует вместо $\mathcal{T}$ написать выражение (2.7) и собрать коэффициенты при $\partial/\partial q_i$, $\partial/\partial\dot q_i$, $\partial/\partial t$, $i=1,\ldots,m$. Теперь условие (3.1) оказывается эквивалентным ограниченности этих коэффициентов, когда $\mathcal{Y}$ пробегает множество всех базисных векторов, благодаря тому, что в конечномерном пространстве норму можно определить как максимальный коэффициент растяжения векторов ортонормированного базиса.

Далее, т. к. понятие механической системы приобрело свое формализованное определение, стало возможным говорить о показателях Ляпунова механической системы (реономной или склерономной), имея в виду показатели Ляпунова систем уравнений в вариациях, т. е. функции $\lambda_k(b)$ или же функции $\overline{\lambda}_k(\mu)$, $k=1,\ldots,2m$, когда система содержит параметры.

Как известно, если в некотором многообразии M^m выделить открытое подмножество V, то дифференциальная структура M^m индуцирует на V структуру дифференцируемого многообразия, которое называется открытым подмногообразием ([1], с. 56).

Структура уравнений Лагранжа на каждой карте такова ([7], с. 52–54), что из-за наличия соответствующих линейных и квадратичных по q и $\dot q$ членов условие ограниченности в разложении (3.2) в большинстве случаев может выполняться лишь на некотором открытом подмногообразии многообразия $T(M)$. Тогда в качестве указанного отображения ψ выбирается его ограничение на соответствующем прообразе. В частности, для параллелизуемого многообразия условие ограниченности коэффициентов в (3.2) достаточно проверять на M^m, а в $\mathbb{R}^m$ брать любой шар достаточно большого радиуса; для многообразия с атласом, состоящим из конечного числа карт, из всех радиусов выбирается наибольший.

Содержание этого параграфа составляет теперь доказательство следующего утверждения, являющегося результатом применения теоремы 1 к рассматриваемому классу дифференциальных уравнений на многообразиях.

Теорема 3. *Пусть на некотором открытом подмногообразии пространства, касательного к конфигурационному, выполнены условия ограниченности коэффициентов в разложениях* (3.2). *Тогда показатели Ляпунова механической системы, содержащей параметры, как функции, определенные на полном метрическом пространстве параметров, принадлежат второму бэровскому классу.*

Из этой теоремы выводятся как следствие другие утверждения, сформулированные в теореме 1, в частности, о том, что в пространстве параметров для каждого показателя Ляпунова точка полунепрерывности сверху является типичной.

Автор выражает глубокую благодарность В.М. Миллионщикову за консультации.

Литература

1. Годбийон К. *Дифференциальная геометрия и аналитическая механика.* – М.: Мир, 1973. – 188 с.
2. Миллионщиков В.М. *Бэровские классы функций и показатели Ляпунова.* III // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16. – № 10. – С. 1766–1785.
3. Миллионщиков В.М. *Показатели Ляпунова как функции параметра* // Матем. сб. – 1988. – Т. 137. – № 3. – С. 364–380.
4. Куратовский К. *Топология.* Т. 1. – М.: Мир, 1966. – 594 с.
5. Добронравов В.В. *Основы аналитической механики.* – М.: Высш. школа, 1976. – 264 с.
6. Номидзу К. *Группы Ли и дифференциальная геометрия.* – М.: Мир, 1973. – 188 с.
7. Уиттекер К.Т. *Аналитическая динамика.* – М.–Л.: ОНТИ, 1937. – 500 с.

Московский государственный
авиационный институт
(*технический университет*)

Поступила
24.03.1999