И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

1998 МАТЕМАТИКА № 6 (433)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 514.75

*М.А. ЧЕШКОВА*

# К ГЕОМЕТРИИ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ $n$-ПОВЕРХНОСТИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ $E^{n+m}$

В евклидовом пространстве $E^{n+m}$ рассматриваются две гладкие $n$-поверхности $M$, $\overline{M}$ и диффеоморфизм $f : M \to \overline{M}$. Исследуется случай, когда $f$ — центральная проекция.

Обозначим через $r$ радиус-вектор точки $p \in M$, через $\overline{r}$ — радиус-вектор точки $f(p) \in \overline{M}$. Тогда отображение $f : M \to \overline{M}$ запишется в виде $\overline{r} = lr$, $l \in F(M)$. Дифференциал отображения $f$ определится из равенства $df(X) = df(\partial_X r) = \partial_X \overline{r}$, $X \in TM$. Имеем $df(X) = (Xl)r + lX$, $X \in TM$. Отображение $f$ индуцирует на $M$ метрику

$$\overline{g}(X,Y) = \langle df(X), df(Y)\rangle = l^2 g(X,Y) + (Xl)(Yl)\langle r,r\rangle + l(Yl)\langle X,r\rangle + l(Xl)\langle Y,r\rangle.$$

Положим $r = U + \tau$, $U \in TM$, $\tau \in TM^{\perp}$, $\langle r,r\rangle = 2\rho$. Имеем

$$\overline{g}(X,Y) = l^2 g(X,Y) + \Psi(X,Y), \tag{1}$$

где $\Psi(X,Y) = \gamma(X)\omega(Y) + \gamma(Y)\omega(X)$, $\gamma(X) = Xl$, $\omega(X) = \rho(Xl) + l\langle U,X\rangle$.

**Лемма 1.** *Следующие утверждения эквивалентны*:
1) *центральная проекция* $f : M \to \overline{M}$ — *конформное отображение*;
2) $\Psi = 0$.

**Доказательство.** Отображение $f : M \to \overline{M}$ конформно тогда и только тогда, когда $\overline{g}(X,Y) = \sigma^2 g(X,Y)$, $\sigma \in F(M)$, или $(\sigma^2 - l^2)g(X,Y) = \Psi(X,Y)$. А так как ранг квадратичной формы $\Psi < 3$, то при $n > 2$ $\sigma^2 - l^2 = 0$, $\Psi = 0$. Для $n = 2$ существуют изотермические координаты $u$, $v$. Тогда $\gamma_u\omega_v + \gamma_v\omega_u = 0$, $\gamma_v\omega_v = \gamma_u\omega_u$, откуда следует $\Psi = 0$. □

**Следствие 1.** Если центральная проекция есть конформное отображение, то либо $f$ есть гомотетия, либо $V = -\frac{1}{\rho}U = \mathrm{grad}(\ln|l|)$.

**Доказательство.** $\Psi = 0$ в случае, когда $\gamma = 0$, $l = \mathrm{const}$, $f$ — гомотетия, либо $\omega = 0$, $X\ln|l| + \frac{1}{\rho}\langle U,X\rangle = 0$, т.е. вектор $V = -\frac{1}{\rho}U$ есть $\mathrm{grad}\ln|l|$. □

**Следствие 2.** Если центральная проекция $f : M \to \overline{M}$ есть конформное отображение, то $f$ — либо гомотетия, либо — инверсия.

**Доказательство.** Если $l = \mathrm{const}$, то $f$ — гомотетия, если $l \neq \mathrm{const}$, то $X\ln|l| = -\frac{1}{\rho}\langle X,U\rangle$. С другой стороны, дифференцируя равенство $2\rho = \langle r,r\rangle$, получим $X\rho = \langle X,r\rangle = \langle X,U\rangle$. Откуда $l\rho = k = \mathrm{const}$, $\overline{r} = \frac{2kr}{\langle r,r\rangle}$, т.е. $f$ — инверсия. □

Пусть $\overline{\alpha}$ — вторая фундаментальная форма $n$-поверхности $\overline{M}$, $\overline{\nabla}$ — связность Леви-Чивита метрики $\overline{g}$. Имеет место [1] равенство

$$\partial_X dfY - df\overline{\nabla}_X Y = \overline{\alpha}(X,Y), \tag{2}$$

откуда $\partial_X((Yl)r+lY)-(\overline{\nabla}_X Yl)r-l(\overline{\nabla}_X Y)=\overline{\alpha}(X,Y)$. Используя уравнения Гаусса-Вейнгартена ([2], с. 23), получим

$$(\mathrm{Hess}^{\overline{\nabla}}_{X,Y}\, l)r+(Xl)Y+(Yl)X+l(\nabla_X Y-\overline{\nabla}_X Y)+l\alpha(X,Y)=\overline{\alpha}(X,Y),$$

где $\mathrm{Hess}^{\overline{\nabla}}_{X,Y}\, l = XYl-\overline{\nabla}_X Yl$ — гессиан функции $l$ в связности $\overline{\nabla}$. Разлагая $\overline{\alpha}$ на касательную $\overline{\alpha}^{\top}$ и нормальную $\overline{\alpha}^{\perp}$ составляющие, получим

$$\overline{\alpha}^{\top}(X,Y)=(Xl)Y+(Yl)X+l(\nabla_X Y-\overline{\nabla}_X Y)+(\mathrm{Hess}^{\overline{\nabla}}_{X,Y}\, l)U, \tag{3}$$
$$\overline{\alpha}^{\perp}(X,Y)=l\alpha(X,Y)+(\mathrm{Hess}^{\overline{\nabla}}_{X,Y}\, l)\tau.$$

Векторы $\overline{\alpha}(X,Y)$ определяют первое нормальное пространство $\overline{N}$ или главную нормаль поверхности $\overline{M}$. Из (3) вытекают следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Если $f:M\to\overline{M}$ — центральная проекция, то следующие утверждения эквивалентны*:

1) *главная нормаль $\overline{N}$ поверхности $\overline{M}$ параллельна поверхности $M$,*
2) $l\alpha(X,Y)=-(\mathrm{Hess}^{\overline{\nabla}}_{X,Y}\, l)\tau$.

**Следствие 3.** Если $f:M\to\overline{M}$ — центральная проекция, и главная нормаль $\overline{N}$ поверхности $\overline{M}$ параллельна поверхности $M$, то главная нормаль поверхности $M$ одномерна и параллельна полю $\tau$.

**Теорема 2.** *Если $f:M\to\overline{M}$ — центральная проекция, то следующие утверждения эквивалентны*:

1) *главная нормаль поверхности $\overline{M}$ ортогональна поверхности $M$,*
2) $\overline{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+(X\ln l)Y+(Y\ln l)X+\frac{1}{l}(\mathrm{Hess}^{\overline{\nabla}}_{X,Y}\, l)U$.

Исследуем $\overline{\alpha}$, когда $f:M\to\overline{M}$ — конформное отображение. Если $f$ — гомотетия, то $Xl=0$, $\nabla=\overline{\nabla}$, $\overline{\alpha}^{\top}=0$, $\overline{\alpha}^{\perp}(X,Y)=l\alpha(X,Y)$. Если $f:M\to\overline{M}$ — конформное отображение, не являющееся гомотетией, то

$$\overline{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+(X\ln|l|)Y+(Y\ln|l|)X-\frac{\rho}{l}(\mathrm{Hess}^{\overline{\nabla}}_{X,Y}\, l)V-\frac{1}{l}\overline{\alpha}^{\top}(X,Y),$$
$$\overline{g}=l^2 g,\quad V=\mathrm{grad}(\ln|l|).$$

С другой стороны, если $f$ — конформное отображение, то ([3], с. 18) $\overline{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+(X\ln|l|)Y+(Y\ln|l|)X-g(X,Y)V$, где $\overline{g}=l^2g$, $V=\mathrm{grad}(\ln|l|)$. Таким образом, имеем

$$\overline{\alpha}^{\top}(X,Y)=(lg(X,Y)+\rho Hess^{\overline{\nabla}}_{X,Y})V. \tag{4}$$

Из (3), (4) вытекают

**Теорема 3.** *Если центральная проекция $f$ есть конформное отображение, то* $\overline{\alpha}(X,Y)=l\alpha(X,Y)+(\mathrm{Hess}^{\overline{\nabla}}_{X,Y})r+lg(X,Y)V$.

**Следствие 4.** Если главная нормаль поверхности $\overline{M}$ ортогональна поверхности $M$, и центральная проекция есть конформное отображение, отличное от гомотетии, то $\overline{\alpha}^{\perp}(X,Y)=\overline{\alpha}(X,Y)=l\alpha(X,Y)+\frac{l}{\rho}g(X,Y)\tau$.

**Пример.** Центральная проекция $f$ есть конформное отображение на $n$-плоскость. Тогда $\alpha(X,Y)=-\frac{1}{\rho}g(X,Y)\tau$. Положим $\nu$ — орт $\tau$. Тогда $\alpha(X,Y)=kg(X,Y)\nu$, где $k=\frac{1}{\rho|\tau|}$, $A_\nu X=kX$. Из уравнений Гаусса-Кодацци ([2], с. 29) следует $(Xk)\nu+k\nabla^{\perp}_X\nu=0$. Откуда имеем $Xk=0$, $\nabla^{\perp}_X\nu=0$, т. е. поверхность $M$ принадлежит гиперсфере с центром $C=r+\frac{1}{k}\nu$ радиуса $\frac{1}{k}$ и $(n+1)$-плоскости $(\overline{M},O)$, т. е. является $n$-сферой.

## Литература


1. Чешкова М.А. *К геометрии $n$-поверхностей в евклидовом пространстве* $E^{2n+1}$ // Дифференц. геометрия многообразий фигур. – 1997. – Вып. 28. – С.78–81.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* – Т. 2. – М.: Наука, 1981. – 414 с.
3. Chen B.-Y. *Geometry of submanifolds and its applications.* – Tokyo: Sci. Univ., 1981. – 96 p.



*Алтайский государственный университет*



*Поступили*
*полный текст* 16.12.1996
*краткое собщение* 27.01.1998