ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 5 (432)

УДК 517.142

О.Г. ПАРФЕНОВ

ВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

1. Пусть $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$, $\lambda > -1$, $d\mu_\lambda = e^{-x}x^\lambda dx$ и ν — борелевская мера на $\mathbf{R}_+$ (не обязательно конечная). В работе получены критерии ограниченности, компактности и принадлежности оператора

$$L : \mathbf{L}_2(\mathbf{R}_+, \mu_\lambda) \to \mathbf{L}_2(\mathbf{R}_+, \nu),$$
$$(Lf)(y) = \int_{\mathbf{R}_+} e^{-xy} f(x) d\mu_\lambda(x) \tag{1}$$

различным операторным идеалам в терминах меры ν. Работа является продолжением статей автора [1], [2], посвященных аналогичным вопросам. Основная идея работы — изучение операторов вида (1) с помощью операторов вложения классов аналитических функций, для которых соответствующие критерии ограниченности, компактности и принадлежности различным операторным идеалам хорошо известны (см. [1] и библиографию к ней).

В п. 2 дана формулировка основного результата работы. В п. 3 приводятся необходимые сведения об операторах вложения классов Дирихле. В п. 4 дано доказательство основного результата.

2. Определения s-чисел (сингулярных чисел), операторных идеалов σ_ρ (классов Шаттена–Неймана), а также идеалов $\sigma_{\rho,\tau}$ (классы Шаттена-Лоренца) приведены в ([3], гл. 1, 3). Напомним лишь определение $\sigma_{\rho,\tau}$: компактный оператор T, действующий из гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2, принадлежит классу $\sigma_{\rho,\tau}$, если для последовательности его сингулярных чисел выполнено соотношение

$$\sum_n s_n^\tau(T) n^{\tau/\rho - 1} < \infty, \quad \rho > 0, \ \ \tau > 0.$$

Введем обозначения $\mathbf{R}_+ = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} [2^n, 2^{n+1}] = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \Delta_n$; $\nu_n = \nu(\Delta_n)$; знак $\Longleftrightarrow$ заменяет оборот "в том и только том случае, если".

Теорема 1. *Пусть* L — *оператор* (1). *Тогда*

а) L *ограничен* $\Longleftrightarrow \sup(2^{-n(1+\lambda)}\nu_n) < \infty$,

б) L *компактен* $\Longleftrightarrow 2^{-n(1+\lambda)}\nu_n \to 0$, $n \to \infty$,

в) $L \in \sigma_p$, $p > 0$, $\Longleftrightarrow \sum\limits_n (2^{-n(1+\lambda)}\nu_n)^{p/2} < \infty$,

г) $L \in \sigma_{p,\tau}$, $p \geq 1$, $\tau > 0$, $\Longleftrightarrow \sum\limits_n (2^{-n(1+\lambda)}\nu_n)^{\tau/2} n^{\tau/p-1} < \infty$.

3. Пусть $\lambda \in \mathbf{R}$. Классом Дирихле D_λ в единичном круге $\mathbf{D}$ на комплексной плоскости $\mathbf{C}$ называется гильбертово пространство функций $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n$, аналитических в $\mathbf{D}$ с нормой

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 95-01-00348).

$\|f \mid D_\lambda\|^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |f_n|^2(n+1)^\lambda$. При $\lambda = 0$ получаем известный класс Харди $\mathbf{H}^2$, при $\lambda = -1$ — класс Бергмана $\mathbf{A}^2$, при $\lambda = 1$ — обычный класс Дирихле D^2.

Пусть ν — мера на отрезке $[0,1]$. Положим $\Delta_n = [1-2^{-n},\, 1-2^{-n-1}]$, $\nu_n = \nu(\Delta_n)$, $n = 0, 1, \ldots$ Имеет место

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{J}$ *— оператор вложения* D_λ *в* $\mathbf{L}_2(\nu)$, $\lambda < 1$. *Тогда*

а) $\mathbf{J}$ *ограничен* $\Longleftrightarrow \sup(2^{-n(1-\lambda)}\nu_n) < \infty$,

б) $\mathbf{J}$ *компактен* $\Longleftrightarrow \sup(2^{-n(1-\lambda)}\nu_n) \to 0$, $n \to \infty$,

в) $\mathbf{J} \in \sigma_p$, $p > 0$, $\Longleftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} (2^{-n(1-\lambda)}\nu_n)^{p/2} < \infty$,

г) $\mathbf{J} \in \sigma_{p,\tau}$, $p \geq 1$, $\tau > 0$, $\Longleftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} (2^{-n(1-\lambda)}\nu_n)^{\tau/2} n^{\tau/p-1} < \infty$.

Теорема 2 получена Стегенгой [4]. Часть г) теоремы 2 доказана автором в работе [1].

4. Доказательство теоремы 1. Напомним некоторые результаты из [2].

Пусть (X, μ) — пространство с мерой, G — область в $\mathbf{C}$ и ν — мера в G. Рассмотрим интегральный оператор

$$\begin{gathered} K : \mathbf{L}_2(X,\mu) \to \mathbf{L}_2(G,\nu), \\ (Kf)(y) = \int_X k(x,y) f(x) d\mu(x). \end{gathered} \tag{2}$$

Назовем ядро *разложимым*, если существует система Рисса $\{f_n(x)\}_0^\infty$ в $\mathbf{L}_2(X,\mu)$ и положительная последовательность $\{k_n\}_0^\infty$ такие, что

$$k(x,y) = \sum_0^\infty k_n f_n(x) y^n. \tag{3}$$

Напомним, что системой Рисса $\{e_n\}_0^\infty$ в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ называется система векторов, образующая базис Рисса в замыкании своей линейной оболочки ([3], гл. VI).

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathbf{H}^2(k)$ аналитических функций вида

$$f(z) = \sum_0^\infty f_n z^n, \quad \|f \mid \mathbf{H}^2(k)\|^2 = \sum_0^\infty |f_n|^2 k_n^{-2}$$

и оператор вложения

$$\mathbf{J} : \mathbf{H}^2(k) \to \mathbf{L}_2(G,\nu). \tag{4}$$

Назовем главной частью линейного ограниченного оператора $T : H_1 \to H_2$ (H_1, H_2 — гильбертовы пространства) его сужение на подпространство $H_1 \ominus \mathrm{Ker}(T)$ ($\mathrm{Ker}(T)$ — ядро оператора). Назовем операторы подобными по модулю ядра, если подобны их главные части.

Можно заметить, что операторы (2), (4) подобны по модулю ядра при условии (3) (подробнее об этом см. в [2]).

Обратимся к интегральному оператору Лапласа (1). Для его анализа потребуются многочлены Лагерра. Система многочленов $\{\widehat{L}_n(x,\lambda)\}_0^\infty$ есть система Лагерра, если

а) $\widehat{L}_n(x,\lambda)$ — многочлен степени n с положительным старшим коэффициентом,

б) $\int\limits_{\mathbf{R}_+} \widehat{L}_n(x,\lambda)\widehat{L}_m(x,\lambda) d\mu_\lambda(x) = \delta_{nm}$, δ_{nm} — символ Кронекера.

(О системе Лагерра см., напр., в [5], гл. VI.)

Имеет место формула

$$(1-w)^{-\lambda-1}\exp\left(-\frac{wx}{1-w}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\widehat{L}_n(x,\lambda)w^n, \quad |w|<1, \tag{5}$$
$$A_n=[\Gamma(\lambda+n+1)/n!]^{1/2}\sim n^{\lambda/2}, \quad n\to\infty,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера ([5], сс. 233, 56–60). Как обычно, $a_n\sim b_n$ означает, что $\lim a_n b_n^{-1}=1$, $n\to\infty$.

Полагая $y=w/(1-w)$, имеем, что ядро оператора L разложимо. Удобнее провести преобразование $w=y/(1+y)$, при котором $\mathbf{R}_+$ переходит в $[0,1]$ и определить меру $\widetilde{\nu}$ на $[0,1]$ как “пересадку” меры ν (для любого измеримого множества $e\subseteq\mathbf{R}_+$ обозначим через $\widetilde{e}$ его образ при отображении $w=y/(1+y)$ и положим $\widetilde{\nu}(\widetilde{e})=\nu(e)$). Рассмотрим оператор $\widetilde{L}$, действующий из $\mathbf{L}_2(\mathbf{R}_+,\mu_\lambda)$ в $\mathbf{L}_2([0,1],\,\widetilde{\nu})$ как интегральный оператор с ядром $\exp\left(-\frac{wx}{1-w}\right)$. Имеет место соотношение $\widetilde{L}=\mathbf{i}\circ L$, где $\mathbf{i}$ — унитарный оператор из пространства $\mathbf{L}_2(\mathbf{R}_+,\nu)$ в $\mathbf{L}_2([0,1],\,\widetilde{\nu})$ вида

$$(\mathbf{i}f)(x)=f(x/(1-x)).$$

В силу формулы (5) оператор L подобен по модулю ядра оператору вложения

$$\widetilde{\mathbf{J}}:D_{-\lambda}\to\mathbf{L}_2([0,1],\,(1-x)^{2\lambda+2}d\widetilde{\nu}(x)).$$

Применяя теорему 2 к оператору $\widetilde{\mathbf{J}}$, получим утверждения теоремы 1.

Литература

1. Парфенов О.Г. *О свойствах операторов вложения некоторых классов аналитических функций* // Алгебра и анализ. – 1991. – Т. 3, вып. 2. – С. 199–222.
2. Парфенов О.Г. *Оценки сингулярных чисел интегральных операторов с разложимыми ядрами* // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. матем., механ., астр. – 1993, вып. 1. – № 1. – С. 43–50.
3. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* – М.: Наука, 1965. – 448 с.
4. Stegenga D. *Multipliers of the Dirichlet spaces* // Ill. J. Math. – 1980. – V. 24. – № 1. – P. 113–139.
5. Суетин П.К. *Классические ортогональные многочлены.* – М.: Наука, 1976. – 327 с.

Псковский государственный
педагогический институт

Поступила
02.12.1996