И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2003 МАТЕМАТИКА № 9 (496)

УДК 517.95

Н.В. ЧИГАНОВА

ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

1. Рассмотрим уравнение

$$L(u) \equiv \operatorname{sgn} y \cdot |y|^n u_{xx} + \operatorname{sgn} x \cdot |x|^m u_{yy} + \lambda \operatorname{sgn}(xy) \cdot |x|^m |y|^n u = 0, \quad n, m > 0, \tag{1}$$

в области D, ограниченной "нормальной" кривой $\Gamma_0 : x^{2\alpha} + y^{2\beta} = 1$, лежащей в первой четверти $x, y > 0$ с концами в точках $A(1,0)$ и $B(0,1)$, характеристиками OC_1 и C_1A, лежащими в четвертой четверти, и характеристиками OC_2 и C_2B, лежащими во второй четверти, уравнения (1), где точки O, C_1, $C2$ заданы координатами $O(0,0)$, $C_1\,(x_{C_1}, y_{C_1})$, $C_2\,(x_{C_2}, y_{C_2})$, $x_{C_1} = (1/2)^{1/\alpha}$, $y_{C_1} = -\,(1/2)^{1/\beta}$, $x_{C_2} = -\,(1/2)^{1/\alpha}$, $y_{C_2} = (1/2)^{1/\beta}$, $2\alpha = m+2$, $2\beta = n+2$.

В области D для уравнения (1) ставится

Спектральная задача. *Найти значения параметра λ и соответствующие им функции $u(x,y)$, удовлетворяющие условиям*

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_1 \cup D_2); \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_1 \cup D_2; \tag{3}$$

$$u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Gamma; \tag{4}$$

$$u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in OC_1; \tag{5}$$

$$u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in OC_2, \tag{6}$$

где $D_+ = D \cap \{x > 0,\ y > 0\}$, $D_1 = D \cap \{x > 0,\ y < 0\}$, $D_2 = D \cap \{x < 0,\ y > 0\}$.

Важность исследования краевых задач для уравнения смешанного типа отмечена в [1]–[4].

Ранее в [5], [6] методом разделения переменных были построены в виде суммы рядов решения краевых задач для уравнений смешанного типа с одной линией изменения. Впервые задача Трикоми для уравнения (1) при $m = n = \lambda = 0$ изучалась в [7]. В [8] исследована спектральная задача для уравнения (1) при $m = n = 0$ и показаны ее применения для построения решения задачи Трикоми в виде суммы рядов.

В данной статье найдены собственные значения и построены в явном виде соответствующие собственные функции спектральной задачи в областях эллиптичности и гиперболичности. Для решения поставленной задачи (2)–(6) построим многообразие частных решений уравнения (1) в области D_+, а затем в областях D_1 и D_2. Построив частные решения, удовлетворяя требованиям (2)–(6), найдем собственные значения и соответствующие им собственные функции спектральной задачи.

В области D_+ введем новые переменные $x = (\alpha r)^{1/\alpha} \cos^{1/\alpha}\varphi$, $y = (\beta r)^{1/\beta} \sin^{1/\beta}\varphi$. В координатах (r, φ) уравнение (1) записывается следующим образом:

$$v_{rr} + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r^2}(-2q \operatorname{tg}\varphi + 2p \operatorname{ctg}\varphi) v_\varphi + \frac{1}{r}(1 + 2q + 2p) v_r + \lambda v = 0, \tag{7}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-97901.

где $v(r,\varphi) = u((\alpha r)^{1/\alpha}\cos^{1/\alpha}\varphi, (\beta r)^{1/\beta}\sin^{1/\beta}\varphi)$, $2q = (\alpha-1)/\alpha$, $2p = (\beta-1)/\beta$. В уравнении (7), разделяя переменные $v(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, получим

$$R''(r) + \frac{1}{r}(1+2q+2p)R'(r) + \left(\lambda - \frac{\mu^2}{r^2}\right)R(r) = 0, \quad 0 < r < 1, \tag{8}$$

$$R(0) = 0, \quad R(1) = 0, \tag{9}$$

$$\Phi''(\varphi) + (2p\operatorname{ctg}\varphi - 2q\operatorname{tg}\varphi)\Phi'(\varphi) + \mu^2\Phi(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \pi/2, \tag{10}$$

где μ — произвольная постоянная. Решение уравнения (8), удовлетворяющее условиям (9), имеет вид ([9], с. 401)

$$R(r) = (\sqrt{\lambda}r)^{-q-p}J_\rho(\sqrt{\lambda}r),$$

где $J_\rho(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода, $\rho = \sqrt{(p+q)^2+\mu^2}$.

Найдем общее решение уравнения (10). Для этого в уравнении (10) сделаем замену $x = \sin^2\varphi$. Тогда получим

$$x(1-x)F''(x) + (\tfrac{1}{2} + p - (1+p+q)x)F'(x) + \frac{\mu^2}{4}F(x) = 0. \tag{11}$$

Уравнение (11) представляет собой известное гипергеометрическое уравнение ([9], с. 69) с коэффициентами $a = (p+q)/2 + \rho/2$, $b = (p+q)/2 - \rho/2$, $c = 1/2 + p \notin Z$, общее решение которого определяется по формуле

$$\Phi(\varphi) = c_1 F\left(\frac{p+q}{2} + \frac{\rho}{2}, \frac{p+q}{2} - \frac{\rho}{2}, \frac{1}{2} + p; sin^2\varphi\right) + \\ + c_2\sin^{1-2p}\varphi F\left(\frac{q-p}{2} + \frac{1+\rho}{2}, \frac{q-p}{2} + \frac{1-\rho}{2}, \frac{3}{2} - p; \sin^2\varphi\right),$$

где c_1, c_2 — произвольные константы, $0 < \varphi < \pi/2$. Таким образом, множество частных решений уравнения (11) в области D_+ в полярных координатах (r,φ) определяется формулой

$$u(x,y) = v(r,\varphi) = (\sqrt{\lambda}r)^{-q-p}J_\rho(\sqrt{\lambda}r)\Bigg[c_1 F\left(\frac{p+q}{2} + \frac{\rho}{2}, \frac{p+q}{2} - \frac{\rho}{2}, \frac{1}{2} + p; \sin^2\varphi\right) + \\ + c_2 sin^{1-2p}\varphi F\left(\frac{q-p}{2} + \frac{1+\rho}{2}, \frac{q-p}{2} + \frac{1-\rho}{2}, \frac{3}{2} - p; sin^2\varphi\right)\Bigg], \tag{12}$$

где $\rho = \sqrt{(p+q)^2+\mu^2}$, c_1, c_2 — произвольные константы.

Рассмотрим уравнение (1) в области D_1, где введем новые переменные

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha}x^\alpha\right)^2 - \left(\frac{1}{\beta}(-y)^\beta\right)^2}, \quad \theta = -\frac{\left(\frac{1}{\beta}(-y)^\beta\right)^2}{\left(\frac{1}{\alpha}x^\alpha\right)^2 - \left(\frac{1}{\beta}(-y)^\beta\right)^2}.$$

После замены уравнение (1) примет вид

$$\sigma^2 W_{\sigma\sigma} + (1+2q+2p)\sigma W_\sigma + 4\theta(1-\theta)W_{\theta\theta} + 2(1+2p-2(1+q+p)\theta)W_\theta + \sigma^2\lambda W = 0. \tag{13}$$

В уравнении (13), разделяя переменные $u(x,y) = W(\sigma,\theta) = G(\sigma)Q(\theta)$, получим

$$G''(\sigma) + \frac{1}{\sigma}(1+2q+2p)G'(\sigma) + \left(\lambda - \frac{\mu_1^2}{\sigma^2}\right)G(\sigma) = 0, \tag{14}$$

$$\theta(1-\theta)Q''(\theta) + (\tfrac{1}{2} + p - (1+q+p)\theta)Q'(\theta) + \frac{\mu_1^2}{4}Q(\theta) = 0, \tag{15}$$

где μ_1 — произвольная постоянная. Решением уравнения (14) является функция

$$G(\sigma) = (\sqrt{\lambda}\sigma)^{-q-p}J_{\rho_1}(\sqrt{\lambda}\sigma), \ \rho_1 = \sqrt{(p+q)^2+\mu_1^2}.$$

Уравнение (15), как и уравнение (11), представляет собой гипергеометрическое уравнение с коэффициентами $a = (p+q)/2 + \rho_1/2$, $b = (p+q)/2 - \rho_1/2$, $c = 1/2 + p \notin Z$. В качестве его решений примем функции

$$Q_1(\theta) = F(a,b,c;\theta) = (1-\theta)^{-b} F\left(c-a, b, c; \frac{\theta}{\theta-1}\right),$$
$$Q_2(\theta) = (1-\theta)^{-a} F\left(a, c-b, a-b+1; \frac{1}{\theta-1}\right).$$

На характеристике OC_1, т.е. при $\theta \longrightarrow -\infty$, решение уравнения (1) должно обращаться в нуль. Таким свойством обладает функция $Q_2(\theta)$. Решение уравнения (1) в области D_1, равное нулю на характеристике OC_1, имеет вид

$$u(x,y) = W(\sigma,\theta) = c_3(\sqrt{\lambda}\sigma)^{-q-p}(1-\theta)^{-\frac{p+q}{2}-\frac{\rho_1}{2}} J_{\rho_1}(\sqrt{\lambda}\sigma) \times \\ \times F\left(\frac{p+q}{2} + \frac{\rho_1}{2}, \frac{p-q}{2} + \frac{\rho_1+1}{2}, \rho_1+1; \frac{1}{1-\theta}\right), \quad (16)$$

где c_3 — произвольная постоянная. В области D_2 заменой переменных

$$\sigma_1 = \sqrt{(\tfrac{1}{\beta}y^\beta)^2 - (\tfrac{1}{\alpha}(-x)^\alpha)^2}, \quad \theta_1 = -\frac{(\frac{1}{\alpha}(-x)^\alpha)^2}{(\frac{1}{\beta}y^\beta)^2 - (\frac{1}{\alpha}(-x)^\alpha)^2}$$

уравнение (1) приводится к виду (13) относительно переменных (σ_1, θ_1). Аналогично, решением уравнения (1) в области D_2, обращающимся в нуль на характеристике OC_2, является функция

$$u(x,y) = W(\sigma_1,\theta_1) = c_4(\sqrt{\lambda}\sigma_1)^{-q-p}(1-\theta_1)^{-\frac{p+q}{2}-\frac{\rho_2}{2}} J_{\rho_2}(\sqrt{\lambda}\sigma_1) \times \\ \times F\left(\frac{p+q}{2} + \frac{\rho_2}{2}, \frac{q-p}{2} + \frac{\rho_2+1}{2}, \rho_2+1; \frac{1}{1-\theta_1}\right), \quad (17)$$

где $\rho_2 = \sqrt{(p+q)^2 + \mu_2^2}$, c_4 — произвольная константа.

В области D решение $u(x,y)$ ищется в классе $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D)$, поэтому функция $u(x,y)$ должна удовлетворять условиям склеивания

$$u(x,0+0) = u(x,0-0), \quad (18)$$
$$u(0+0,y) = u(0-0,y), \quad (19)$$
$$u_y(x,0+0) = u_y(x,0-0), \quad (20)$$
$$u_x(0+0,y) = u_x(0-0,y). \quad (21)$$

Предварительно вычисляя

$$u(x,0+0) = c_1\left(\sqrt{\lambda}\frac{1}{\alpha}x^\alpha\right)^{-q-p} J_\rho\left(\sqrt{\lambda}\frac{1}{\alpha}x^\alpha\right),$$
$$u(x,0-0) = c_3\left(\sqrt{\lambda}\frac{1}{\alpha}x^\alpha\right)^{-q-p} J_{\rho_1}\left(\sqrt{\lambda}\frac{1}{\alpha}x^\alpha\right) F\left(\frac{p+q}{2} + \frac{\rho_1}{2}, \frac{p-q}{2} + \frac{\rho_1+1}{2}, \rho_1+1; 1\right),$$
$$u(0-0,y) = c_4\left(\sqrt{\lambda}\frac{1}{\beta}y^\beta\right)^{-q-p} J_{\rho_2}\left(\sqrt{\lambda}\frac{1}{\beta}y^\beta\right) F\left(\frac{p+q}{2} + \frac{\rho_2}{2}, \frac{q-p}{2} + \frac{\rho_2+1}{2}, \rho_2+1; 1\right),$$
$$u(0+0,y) = \left(\sqrt{\lambda}\frac{1}{\beta}y^\beta\right)^{-q-p} J_\rho\left(\sqrt{\lambda}\frac{1}{\beta}y^\beta\right) \times \\ \times\left(c_1 F\left(\frac{p+q}{2} + \frac{\rho}{2}, \frac{q+p}{2} - \frac{\rho}{2}, \frac{1}{2} + p; 1\right) + c_2 F\left(\frac{q-p}{2} + \frac{\rho+1}{2}, \frac{q-p}{2} + \frac{\rho-1}{2}, \frac{3}{2} - p; 1\right)\right),$$

с учетом условий (19) и (20) получим

$$c_1 = c_3 F\Big(\frac{p+q}{2}+\frac{\rho_1}{2}, \frac{p-q}{2}+\frac{\rho_1+1}{2}, \rho_1+1; 1\Big),$$

$$c_4 F\Big(\frac{p+q}{2}+\frac{\rho_2}{2}, \frac{q-p}{2}+\frac{\rho_2+1}{2}, \rho_2+1; 1\Big) =$$

$$c_1 F\Big(\frac{p+q}{2}+\frac{\rho}{2}, \frac{q+p}{2}-\frac{\rho}{2}, \frac{1}{2}+p; 1\Big) + c_2 F\Big(\frac{q-p}{2}+\frac{\rho+1}{2}, \frac{q-p}{2}+\frac{\rho-1}{2}, \frac{3}{2}-p; 1\Big).$$

На основании формулы ([9], с. 73)

$$F(a,b,c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad c \neq 0,-1,-2, \quad \mathrm{Re}(c-a-b) > 0, \tag{22}$$

имеем

$$c_3 = c_1 \frac{\Gamma(1-\frac{p+q}{2}+\frac{\rho}{2})\Gamma(\frac{q-p}{2}+\frac{\rho+1}{2})}{\Gamma(\rho+1)\Gamma(\frac{1}{2}-p)}, \tag{23}$$

$$c_4 = c_1 \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+p)\Gamma(1-\frac{p+q}{2}+\frac{\rho_2}{2})}{\Gamma(\frac{p-q}{2}-\frac{\rho_2}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(\rho_2+1)} + c_2 \frac{\Gamma(\frac{3}{2}-p)\Gamma(\frac{p-q}{2}+\frac{\rho_2+1}{2})}{\Gamma(1-\frac{p+q}{2}-\frac{\rho_2}{2}\Gamma(\rho_2+1)}. \tag{24}$$

Пользуясь правилом дифференцирования гипергеометрической функции ([8], с. 110), из (16) получим

$$\frac{\partial u}{\partial y} = c_3(\sqrt{\lambda})^{-p-q}\Big(\frac{1}{\alpha}x^\alpha\Big)^{-p-q-\rho_1}\bigg(\bigg(\frac{\rho_1}{\beta}\bigg(\Big(\frac{1}{\alpha}x^\alpha\Big)^2 - \Big(\frac{1}{\beta}(-y)^\beta\Big)^2\bigg)^{\frac{\rho_1}{2}-1} \times$$

$$\times (-y)^{2\beta-1} J_{\rho_1}\Big[\sqrt{\lambda}\sqrt{(\tfrac{1}{\alpha}x^\alpha) - (\tfrac{1}{\beta}(-y)^\beta)^2}\,\Big] +$$

$$+ \frac{\sqrt{\lambda}}{\beta}\bigg(\Big(\frac{1}{\alpha}x^\alpha\Big)^2 - \Big(\frac{1}{\beta}(-y)^\beta\Big)^2\bigg)^{\frac{\rho_1-1}{2}} (-y)^{2\beta-1} J'_{\rho_1}\Big[\sqrt{\lambda}\sqrt{(\tfrac{1}{\alpha}x^\alpha)^2 - (\tfrac{1}{\beta}(-y)^\beta)^2}\,\Big]\bigg) \times$$

$$\times F\Big(\frac{p+q}{2}+\frac{\rho_1}{2}, \frac{p-q}{2}+\frac{\rho_1+1}{2}, \rho_1+1; \frac{1}{1-\theta}\Big) +$$

$$+ \frac{(p+q+\rho_1)(1+p-q+\rho_1)}{2(\rho_1+1)\beta}\bigg(\Big(\frac{1}{\alpha}x^\alpha\Big)^2 - \Big(\frac{1}{\beta}(-y)^\beta\Big)^2\bigg)^{\frac{\rho_1}{2}}\Big(\frac{1}{x^\alpha}x^\alpha\Big)^{-2}(-y)^{2\beta-1} \times$$

$$\times J_{\rho_1}\Big[\sqrt{\lambda}\sqrt{(\tfrac{1}{\alpha}x^\alpha)^2 - (\tfrac{1}{\beta}(-y)^\beta)^2}\,\Big] F\Big(\frac{p+q}{2}+\frac{\rho_1}{2}+1, \frac{p-q}{2}+\frac{\rho_1+3}{2}, \rho_1+2; \frac{1}{1-\theta}\Big)\bigg).$$

Отсюда на основании формулы ([9], с. 113)

$$F\Big(a, c-b, a+1-b; \frac{1}{1-\theta}\Big) = (1-\theta)^{c-1}(-\theta)^{1-c} F\Big(a+1-c, 1-b, a+1-b; \frac{1}{1-\theta}\Big)$$

и (22) получим

$$u_y(x,0-0) = c_3(\sqrt{\lambda})^{-p-q}\beta^{2p}\Big(\frac{1}{\alpha}x^\alpha\Big)^{p-q-1} J_{\rho_1}\Big(\sqrt{\lambda}\frac{1}{\alpha}x^\alpha\Big)\frac{(p+q+\rho_1)(1+p-q+\rho_1)}{2(\rho_1+1)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(\rho_1+2)\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{p+q}{2}+\frac{\rho_1}{2}+1)\Gamma(\frac{p-q}{2}+\frac{\rho_1+3}{2})}.$$

Найдем след производной $u_y(x,y)$ на линии вырождения $y=0$:

$$u_y(x,0+0) = \lim_{y\to 0+0}\frac{\partial u}{\partial y} = -\beta^{2p}r^{2p}\lim_{\varphi\to 0+0}\sin^{2p}\varphi(R'\Phi\sin\varphi + \tfrac{1}{r}\cos\varphi\Phi' R), \tag{25}$$

где

$$\Phi'(\varphi)=c_1\frac{(p+q)^2-\rho^2}{2(1+2p)}\sin 2\varphi F\left(\frac{p+q}{2}+\frac{\rho}{2}+1,\frac{p+q}{2}-\frac{\rho}{2}+1;\frac{3}{2}+p;\sin^2\varphi\right)+$$
$$+c_2(1-2p)\sin^{-2p}\varphi\cos\varphi F\left(\frac{q-p}{2}+\frac{\rho+1}{2},\frac{q-p}{2}+\frac{1-\rho}{2},\frac{3}{2}-p;\sin^2\varphi\right)+$$
$$+c_2\sin 2\varphi\sin^{1-2p}\varphi\frac{(q-p+1)^2-\rho^2}{2(3-2p)}F\left(\frac{q-p}{2}+\frac{\rho+3}{2},\frac{q-p}{2}+\frac{3-\rho}{2},\frac{5}{2}-p;\sin^2\varphi\right),$$
$$R'(r)=-(q+p)(\sqrt{\lambda}r)^{-q-p-1}\sqrt{\lambda}J_\rho(\sqrt{\lambda}r)+(\sqrt{\lambda}r)^{-q-p}\sqrt{\lambda}J'_\rho(\sqrt{\lambda}r).$$

Вычисляя предел (25) при $y\to 0+0$, имеем

$$u_y(0+0)=-\beta^{2p}c_2(1-2p)(\sqrt{\lambda})^{-p-q}\left(\frac{1}{\alpha}x^\alpha\right)^{p-q-1}J_\rho\left(\sqrt{\lambda}\frac{1}{\alpha}x^\alpha\right).\tag{26}$$

Подставляя (25) и (26) в равенство (20), получим

$$c_2=-\frac{2c_3}{1-2p}\cdot\frac{\Gamma(\rho+1)\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{p+q}{2}+\frac{\rho}{2})\Gamma(\frac{p-q}{2}+\frac{\rho+1}{2})}.\tag{27}$$

Аналогично вычислим

$$u_x(0+0,y)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\partial u}{\partial x}=-\alpha^{2q}\lim_{\varphi\to\pi/2+0}\cos^{2q}\varphi\Phi' Rr^{2q-1}\sin\varphi=$$
$$=-\alpha^{2q}(\sqrt{\lambda})^{-q-p}(\tfrac{1}{\beta}y^\beta)^{-q-p-1}J_\rho(\sqrt{\lambda}\tfrac{1}{\beta}y^\beta)\left[c_1\frac{2\Gamma(\frac{1}{2}+q)\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{p+q}{2}+\frac{\rho}{2})\Gamma(\frac{p+q}{2}-\frac{\rho}{2})}+c_2\frac{2\Gamma(\frac{3}{2}-p)\Gamma(q+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1-\rho}{2}+\frac{q-p}{2})}\right],\tag{28}$$

$$u_x(0-0),y)=c_4\alpha^{2q}(\sqrt{\lambda})^{-q-p}(\tfrac{1}{\beta}y^\beta)^{q-p-1}J_{\rho_2}(\sqrt{\lambda}\tfrac{1}{\beta}y^\beta)\frac{2\Gamma(\frac{1}{2}+q)\Gamma(\rho_2+1)}{\Gamma(\frac{p+q}{2}+\frac{\rho}{2})\Gamma(\frac{q-p}{2}+\frac{\rho_2+1}{2})}.\tag{29}$$

Тогда с учетом равенства (21), приравнивая (28) и (29), найдем

$$c_4=c_1\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+p)\Gamma(\frac{q-p}{2}+\frac{\rho+1}{2})}{\Gamma(1+\rho)\Gamma(\frac{p+q}{2}-\frac{\rho}{2})}+c_2\frac{\Gamma(\frac{3}{2}-p)\Gamma(\frac{p+q}{2}+\frac{\rho}{2})}{\Gamma(\frac{q-p}{2}+\frac{1-\rho}{2})\Gamma(1+\rho)}.\tag{30}$$

Таким образом, для нахождения неизвестных постоянных c_1, c_2, c_3, c_4, ρ, ρ_1, ρ_2 получена система уравнений (23), (24), (27), (30). Отсюда с учетом известных формул

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z},\quad \Gamma(\tfrac{1}{2}+z)\Gamma(\tfrac{1}{2}-z)=\frac{\pi}{\cos\pi z},$$

находим

$$\rho=\rho_1=\rho_2=\rho_k=p+q+2k,\quad k=0,1,2,\dots,$$
$$c_1=c_2(p-\tfrac{1}{2})\frac{\Gamma(\frac{p+q}{2}+\frac{\rho_k}{2})\Gamma(\frac{p-q}{2}+\frac{1+\rho_k}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-p)}{\Gamma(1-\frac{p+q}{2}+\frac{\rho_k}{2})\Gamma(-\frac{p-q}{2}+\frac{1+\rho_k}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+p)},\tag{31}$$
$$c_3=c_2(p-\tfrac{1}{2})\frac{\Gamma(\frac{p+q}{2}+\frac{\rho_k}{2})\Gamma(\frac{p-q}{2}+\frac{\rho_k+1}{2})}{\Gamma(\rho+1)\Gamma(\frac{1}{2}+p)},\tag{32}$$
$$c_4=2c_2\frac{\Gamma(\frac{3}{2}-p)\Gamma(-\frac{p-q}{2}+\frac{\rho_k+1}{2})}{\Gamma(1-\frac{p+q}{2}-\frac{\rho_k}{2})\Gamma(\rho+1)}\frac{\sin(q+\rho_k)\pi\cos p\pi}{\sin(\frac{p+q}{2}+\frac{\rho_k}{2})\pi}.\tag{33}$$

Условие (4) равносильно равенству

$$(\sqrt{\lambda})^{q-p}J_{\rho_k}(\sqrt{\lambda})=0.\tag{34}$$

По теореме Ломмеля ([10], с. 102) при $\nu > -1$ функция $J_\nu(z)$ имеет только вещественные нули. В нашем случае $\nu = \rho_k = \sqrt{\mu_k^2 + (p+q)^2} > 0$. Поэтому равенство (34) имеет место при $\lambda \geq 0$. Через $a_{m,k}$ обозначим m-й корень уравнения (32). Тогда $\lambda_{k,m} = a_{m,k}^2$. Итак, найдены собственные значения $\lambda_{k,m}$ спектральной задачи как корни уравнения (34). Подставив их в равенства (12), (16) и (17), получим систему собственных функций спектральной задачи (2)–(6):

$$u_{k,m}(x,y) = \begin{cases} \left(\sqrt{\lambda_{k,m}}\sqrt{(\frac{1}{\alpha}x^\alpha)^2 + (\frac{1}{\beta}y^\beta)^2}\ \right)^{-q-p} J_{\rho_k}\left(\sqrt{\lambda_{k,m}}\sqrt{(\frac{1}{\alpha}x^\alpha)^2 + (\frac{1}{\beta}y^\beta)^2}\ \right)\times \\ \quad \times\Big[c_1 F\Big(\frac{p+q}{2} + \frac{\rho_k}{2}, \frac{p+q}{2} - \frac{\rho_k}{2}, \frac{1}{2}+p; \frac{(\frac{1}{\beta}y^\beta)^2}{(\frac{1}{\alpha}x^\alpha)^2+(\frac{1}{\beta}y^\beta)^2}\Big) + c_2\Big(\frac{(\frac{1}{\beta}y^\beta)^2}{\sqrt{(\frac{1}{\alpha}x^\alpha)^2+(\frac{1}{\beta}y^\beta)^2}}\Big)^{1-2p}\times \\ \quad\quad \times F\Big(\frac{q-p}{2} + \frac{1+\rho_k}{2}, \frac{q-p}{2} + \frac{1-\rho_k}{2}, \frac{3}{2} - p; \frac{(\frac{1}{\beta}y^\beta)^2}{(\frac{1}{\alpha}x^\alpha)^2+(\frac{1}{\beta}y^\beta)^2}\Big)\Big] & \text{в } D_+; \\ c_3\left(\sqrt{\lambda_{k,m}}\sqrt{(\frac{1}{\alpha}x^\alpha)^2 - (\frac{1}{\beta}(-y)^\beta)^2}\ \right)^{-q-p}\times \\ \quad \times J_{\rho_k}(\sqrt{\lambda_{k,m}}\sqrt{(\frac{1}{\alpha}x^\alpha)^2 - (\frac{1}{\beta}(-y)^\beta)^2})\Big(\frac{(\frac{1}{\alpha}x^\alpha)^2}{(\frac{1}{\alpha}x^\alpha)^2-(\frac{1}{\beta}(-y)^\beta)^2}\Big)^{-\frac{p+q}{2}-\frac{\rho_k}{2}}\times \\ \quad\quad \times F\Big(\frac{p+q}{2} + \frac{\rho_n}{2}, \frac{p-q}{2} + \frac{\rho_k+1}{2}, \rho_k+1; \frac{(\frac{1}{\alpha}x^\alpha)^2-(\frac{1}{\beta}(-y)^\beta)^2}{(\frac{1}{\alpha}x^\alpha)^2}\Big) & \text{в } D_1; \\ c_4\left(\sqrt{\lambda_{k,m}}\sqrt{(\frac{1}{\beta}y^\beta)^2 - (\frac{1}{\alpha}(-x)^\alpha)^2}\ \right)^{-q-p}\times \\ \quad \times J_{\rho_k}(\sqrt{\lambda_{k,m}}\sqrt{(\frac{1}{\beta}y^\beta)^2 - (\frac{1}{\alpha}(-x)^\alpha)^2})\Big(\frac{(\frac{1}{\beta}y^\beta)^2}{(\frac{1}{\beta}y^\beta)^2-(\frac{1}{\alpha}(-x)^\alpha)^2}\Big)^{-\frac{p+q}{2}-\frac{\rho_k}{2}}\times \\ \quad\quad \times F\Big(\frac{p+q}{2} + \frac{\rho_k}{2}, \frac{q-p}{2} + \frac{\rho_k+1}{2}, \rho_k+1; \frac{(\frac{1}{\beta}y^\beta)^2-(\frac{1}{\alpha}(-x)^\alpha)^2}{(\frac{1}{\beta}y^\beta)^2}\Big) & \text{в } D_2, \end{cases}$$

где c_1, c_2, c_3 и c_4 — постоянные, определяемые из (31)–(33).

2. Рассмотрим уравнение

$$L(u) \equiv \operatorname{sgn} y \cdot |y|^n u_{xx} + |x|^m u_{yy} + \lambda \cdot \operatorname{sgn} y \cdot |x|^m |y|^n u = 0, \quad n, m > 0, \tag{35}$$

в области $G = D \cap (x > 0)$. Тогда спектральная задача ставится следующим образом.

Спектральная задача. *Найти функцию* $u(x,y)$, *удовлетворяющую условиям* $u(x,y) \in C(\overline{G}) \cap C^1(G) \cap C^2(G_+ \cup D_1)$, $Lu(x,y) \equiv 0$, $(x,y) \in G_+ \cup G_-$, $u(x,y) = 0$, $(x,y) \in \Gamma_0$, $u(x,y) = 0$, $(x,y) \in OC_1$, $u(x,y) = 0$, $(x,y) \in OB$, *где* $G_+ = G \cap \{y > 0\}$, $G_- = G \cap \{y < 0\}$.

Данная задача также решается методом разделения переменных, полученное многообразие частных решений уравнения (35) совпадает с многообразием частных решений уравнения (1). Удовлетворяя решения (12) и (16) граничному условию $u(0+0, y) = 0$, $0 \leq y \leq 1$ и условиям склеивания (18), (20), найдем

$$\rho = \rho_1 = \rho_l = 2 - q + 2l, \quad l = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\rho_l = \sqrt{\mu_l^2 + (p+q)^2} > 0$.

Собственные значения $\lambda_{l,m}$ спектральной задачи определяются как корни уравнения

$(\sqrt{\lambda})^{q-p}J_{\rho_l}(\sqrt{\lambda})=0$. Аналогично первой части находим собственные функции

$$u_{l,m}(x,y)=\begin{cases}\Big(\sqrt{\lambda_{l,m}}\sqrt{(\frac{1}{\alpha}x^\alpha)^2+(\frac{1}{\beta}y^\beta)^2}\Big)^{-q-p}J_{\rho_l}\Big(\sqrt{\lambda_{,m}}\sqrt{(\frac{1}{\alpha}x^\alpha)^2+(\frac{1}{\beta}y^\beta)^2}\Big)\times\\ \times\Big[c_1F\Big(\frac{p+q}{2}+\frac{\rho_l}{2},\frac{p+q}{2}-\frac{\rho_l}{2},\frac{1}{2}+p;\frac{(\frac{1}{\beta}y^\beta)^2}{(\frac{1}{\alpha}x^\alpha)^2+(\frac{1}{\beta}y^\beta)^2}\Big)+c_2\Big(\frac{(\frac{1}{\beta}y^\beta)^2}{\sqrt{(\frac{1}{\alpha}x^\alpha)^2+(\frac{1}{\beta}y^\beta)^2}}\Big)^{1-2p}\times\\ \times F\Big(\frac{q-p}{2}+\frac{1+\rho_l}{2},\frac{q-p}{2}+\frac{1-\rho_l}{2},\frac{3}{2}-p;\frac{(\frac{1}{\beta}y^\beta)^2}{(\frac{1}{\alpha}x^\alpha)^2+(\frac{1}{\beta}y^\beta)^2}\Big)\Big] & \text{в } G_+;\\ \\ c_3\Big(\sqrt{\lambda_{l,m}}\sqrt{(\frac{1}{\alpha}x^\alpha)^2-(\frac{1}{\beta}(-y)^\beta)^2}\Big)^{-q-p}\times\\ \times J_{\rho_l}(\sqrt{\lambda_{l,m}}\sqrt{(\frac{1}{\alpha}x^\alpha)^2-(\frac{1}{\beta}(-y)^\beta)^2})\Big(\frac{(\frac{1}{\alpha}x^\alpha)^2}{(\frac{1}{\alpha}x^\alpha)^2-(\frac{1}{\beta}(-y)^\beta)^2}\Big)^{-\frac{p+q}{2}-\frac{\rho_l}{2}}\times\\ \times F\Big(\frac{p+q}{2}+\frac{\rho_l}{2},\frac{p-q}{2}+\frac{\rho_l+1}{2},\rho_l+1;\frac{(\frac{1}{\alpha}x^\alpha)^2-(\frac{1}{\beta}(-y)^\beta)^2}{(\frac{1}{\alpha}x^\alpha)^2}\Big) & \text{в } G_-,\end{cases}$$

где $\lambda_{l,m}$ — собственные значения спектральной задачи, c_1, c_2 и c_3 определены по формулам (31) и (32).

В заключение автор выражает признательность научному руководителю профессору Сабитову К.Б. за поставленную задачу.

Литература

1. Франкль Ф.И. *Избранные труды по газовой динамике.* – М.: Наука, 1973. – 605 с.
2. Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* – М.: Наука. 1981. – 448 с.
3. Берс Л. *Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики.* – М.: Ин. лит., 1961. – 208 с.
4. Овсянников Л.В. *Лекции по основам газовой динамики.* – М.: Наука, 1981. – 368 с.
5. Моисеев Е.И. *Решение задачи Трикоми в специальных областях* // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26. – № 1. – С. 93–103.
6. Моисеев Е.И. *О некоторых краевых задачах для уравнений смешанного типа* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28. – № 1. – С. 110–121.
7. Дин Ся Си. *Дифференциальные уравнения смешаннного типа* // Шусюэ Сюэбао, Acta Math. Sinica. – 1955. – V. 5. – № 2. – С.193–204.
8. Сабитов К.Б., Карамова А.А. *Спектральные свойства решений задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа и их применения* // Изв. РАН. Сер. матем. – 2001. – № 4. – С. 133–150.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* – М.: Наука, 1973. – Т. 3. – 294 с.
10. Ватсон Г.Н. *Теория бесселевых функций.* – М.: Ин. лит., 1949. Т. 1 – 799 с.

Стерлитамакский государственный педагогический институт

Стерлитамакский филиал АН Республики Башкортостан

Поступила
22.03.2002