ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 4 (479)

УДК 517.544

Е.А. ШИРОКОВА

ПОЛУЧЕНИЕ КЛАССОВ ДАННЫХ ДЛЯ КОРРЕКТНОЙ ПОСТАНОВКИ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПУТЕМ ПЕРЕПАРАМЕТРИЗАЦИИ

Большую роль в решении обратной краевой задачи по параметру s [1] играет известный контур $L_w = \{w = u(s) + iv(s),\ s \in [0, l]\}$ — простая замкнутая кривая. В процессе решения задачи либо используется отображение области D_w, ограниченной контуром L_w, на каноническую область — единичный круг [1], либо соответствующая задача Шварца решается непосредственно в области D_w, что приводит к решению интегрального уравнения Фредгольма [2]. В настоящей работе граничные данные $u(s)+iv(s)$ обратной краевой задачи задаются как суперпозиция комплекснозначной функции $\widetilde{w}(\sigma) = \widetilde{u}(\sigma) + i\widetilde{v}(\sigma)$, $0 \le \sigma \le \sigma_k$, задающей простой замкнутый контур L_w с помощью естественного параметра σ, и функции перепараметризации $\sigma = \sigma(s)$, $s \in [0, l]$. Предполагается, что контур L_w — кривая Ляпунова, т. е. $|\widetilde{w}'(\sigma)| = 1$, $\arg \widetilde{w}'(\sigma) \in H_\alpha[0, \sigma_k]$, а $\sigma(s)$ — монотонная функция. Задача сводится к решению интегрального уравнения. Уравнение разрешимо в случае, когда $\sigma'(s) \in L_{1+\varepsilon}[0, l]$, $[\sigma'(s)]^{-1} \in L_\delta[0, l]$, $\varepsilon, \delta > 0$. Получено достаточное условие простоты искомого контура L_z, не связанное со вспомогательным отображением известной области на единичный круг, поэтому такое условие является результатом в рамках сильной проблемы однолистности [3]. С другой стороны, перепараметризацию известного контура для получения нового простого контура можно рассматривать как однолистное изменение однолистного решения обратной краевой задачи [4]. В данной статье получено достаточное условие почти выпуклости [5] искомого контура L_z в случае выпуклости известного контура L_w. Ранее достаточные условия почти выпуклости решения задачи были получены в рамках слабой проблемы однолистности [6]–[11].

1. Рассмотрим простейший случай перепараметризации $\sigma(s) = s$. Интегральное уравнение для функции $q(\sigma) = \operatorname{Im} \ln z'(w)|_{w \in L_w}$ имеет вид [2]

$$q = T[q] - R[p], \tag{1}$$

где

$$T[q] \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{\sigma_k} q(\tau)[\arg[\widetilde{w}(\tau) - \widetilde{w}(\sigma)]]'_\tau\, d\tau, \tag{2}$$

$$R[p] \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{\sigma_k} p(\tau)[\ln|\widetilde{w}(\tau) - \widetilde{w}(\sigma)|]'_\tau\, d\tau, \tag{3}$$

$$p(\sigma) = \ln s'(\sigma).$$

В данном случае $p(\sigma) \equiv 0$, следовательно, в уравнении (1) будет отсутствовать свободный член $R[p]$. Множество решений уравнения (1): $q(\sigma) \equiv \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$ [2]. Следовательно, $z(w) = e^{i\alpha} w + C$, $C \in \mathbf{C}$, $g(z) = (z - C)e^{-i\alpha}$. Естественно, что искомый контур L_z, получающийся из простого контура L_w сдвигом и поворотом, будет также простой кривой.

2. Если $\sigma'(s) \in H_\gamma[0, l]$, задача сводится к решению интегрального уравнения (1) в пространстве H_δ, $\delta = \min\{\alpha, \gamma\}$. Решение в этом классе исследовано в [2], там же приведено достаточное условие простоты — почти выпуклости — искомого контура.

3. Рассмотрим подробнее случай более слабых ограничений на $\sigma'(s)$. Заметим, что получить достаточное условие почти выпуклости искомого контура L_z при выпуклом контуре L_w можно только при условии, что

$$q(\sigma) = \arg \frac{dz}{dw}\Big|_{w\in L_w}$$

— ограниченная величина. Согласно [2] в случае, когда

$$\sigma'(s) \in L_{1+\varepsilon}[0,\sigma_k], \quad [\sigma'(s)]^{-1} \in L_\delta[0,\sigma_k], \quad \varepsilon, \delta > 0,$$

уравнение (1) имеет решение $q(\sigma) \in L_\nu[0,\sigma_k]$ $\forall \nu > 1$. Для того чтобы получить ограниченную функцию $q(\sigma)$, достаточно обеспечить ограниченность функции $f(\sigma) = R[p]$ (3).

Действительно, если

$$\arg \widetilde{w}'(\sigma) \in H_\alpha[0,\sigma_k], \quad \alpha \in (0,1];$$
$$\left|\frac{\widetilde{w}(\sigma_1) - \widetilde{w}(\sigma_2)}{\sigma_1 - \sigma_2}\right| \ge m > 0, \quad |\sigma_1 - \sigma_2| \le \frac{\sigma_k}{2},$$

то согласно [2] ядро оператора T (2) — функция $K(\tau,\sigma) \equiv \{\arg[\widetilde{w}(\tau) - \widetilde{w}(\sigma)]\}'_\tau$ имеет оценку $|K(\tau,\sigma)| \le D|\tau-\sigma|^{\alpha-1}$, где $D \le [\|\widetilde{v}'\|_C\|\widetilde{u}'\|_{H_\alpha} + \|\widetilde{u}'\|_C\|v'\|_{H_\alpha}]m^{-2}$. Учитывая то, что при заданных условиях уравнение (1) имеет решение в пространстве L_ν $\forall \nu > 1$, получим

$$\sup|q(\sigma)| \le \frac{1}{\pi}\|q\|_{L_{r/(r-1)}}\left[\max_\sigma \int_0^{\sigma_k} |K(\tau,\sigma)|^r d\tau\right]^{1/r} + \sup|f(\sigma)|,$$

где $1 < r < \frac{1}{1-\alpha}$. Следовательно, в данном случае функция $q(\sigma)$ ограничена.

Обеспечить ограниченность функции $f(\sigma)$ можно лишь, если плотность $p(\sigma)$ оператора R (3) — непрерывная функция, в противном случае $f(\sigma)$ будет иметь логарифмическую особенность как мнимая часть интеграла типа Коши с разрывной вещественной плотностью.

Итак, предположим, что

$$\arg[\widetilde{w}(\tau) - \widetilde{w}(\sigma)] = \arg[e^{i2\pi\tau/\sigma_k} - e^{i2\pi\sigma/\sigma_k}] + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{j} a_{nj}\left[\cos\frac{2\pi}{\sigma_k}(\tau j + \sigma n) + \right.$$
$$\left. + \cos\frac{2\pi}{\sigma_k}(\tau n + \sigma j)\right] + b_{nj}\left[\sin\frac{2\pi}{\sigma_k}(\tau j + \sigma n) + \sin\frac{2\pi}{\sigma_k}(\tau n + \sigma j)\right], \quad (4)$$

причем

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{j}(|a_{nj}| + |b_{nj}|)(j+n) \le b < \frac{1}{2}, \quad (5)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{j}(|a_{nj}| + |b_{nj}|) \le c < \frac{1}{\pi}. \quad (6)$$

Пусть функция $\sigma(s)$, $s \in [0,l]$, такая, что $0 < m_1 \le \sigma'(s) \le M_1$, удовлетворяет условию

$$|\sigma'(s_1) - \sigma'(s_2)| \le \frac{C}{|\ln\frac{|s_1-s_2|}{l}|^p}, \quad p > 1, \quad |s_1 - s_2| \le l/2. \quad (7)$$

Согласно [2] соответствующее уравнение (1) в этом случае разрешимо в пространстве $L_\nu[0,\sigma_k]$ $\forall \nu > 1$. Найдем ограничения на введенные параметры, достаточные для того, чтобы искомый контур L_z был почти выпуклым. Вывод условия почти выпуклости разобьем на этапы.

а) Покажем, что условие (5) обеспечивает выпуклость контура L_w. В соответствии с (4) имеем

$$\arg \widetilde{w}'(\sigma) = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{\sigma_k}\sigma + 2\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{j} a_{nj}\cos\frac{2\pi}{\sigma_k}\sigma(j+n) + b_{nj}\sin\frac{2\pi}{\sigma_k}\sigma(j+n).$$

Следовательно,

$$(\arg \widetilde{w}'(\sigma))' = \frac{2\pi}{\sigma_k} + \frac{4\pi}{\sigma_k}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{j}(j+n)\Big[-a_{nj}\sin\frac{2\pi}{\sigma_k}\sigma(j+n) + b_{nj}\cos\frac{2\pi}{\sigma_k}\sigma(j+n)\Big] \geq$$

$$\geq \frac{2\pi}{\sigma_k} - \frac{4\pi}{\sigma_k}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{j}(j+n)(|a_{nj}|+|b_{nj}|) \geq \frac{2\pi}{\sigma_k}(1-2b) > 0$$

согласно (5).

Здесь же заметим, что $\arg \widetilde{w}'(\sigma) \in H_1[0,\sigma_k]$, т.е. $\alpha = 1$.

б) Найдем теперь число $m > 0$ такое, что

$$\left|\frac{\widetilde{w}(\sigma_1)-\widetilde{w}(\sigma_2)}{\sigma_1-\sigma_2}\right| \geq m, \quad |\sigma_1-\sigma_2| \leq \frac{\sigma_k}{2}.$$

Заметим, что приведенное неравенство, естественное для простых кривых, применялось ранее в работах М.А. Лаврентьева (напр., [12]).

Имеем

$$\widetilde{w}(\sigma_1)-\widetilde{w}(\sigma_2) = \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} e^{i\arg\widetilde{w}'(t)}dt = \int_{\sigma_2}^{\sigma_1}\exp\left[i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{\sigma_k}t+\phi_0(t)\right)\right]dt,$$

где

$$\phi_0(\sigma) = 2\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{j} a_{nj}\cos\frac{2\pi}{\sigma_k}\sigma(j+n) + b_{nj}\sin\frac{2\pi}{\sigma_k}\sigma(j+n).$$

Следовательно,

$$\widetilde{w}(\sigma_1)-\widetilde{w}(\sigma_2) = i\int_{\sigma_2}^{\sigma_1}\exp(i2\pi t/\sigma_k)dt + i\int_{\sigma_2}^{\sigma_1}\exp(i2\pi t/\sigma_k)[\exp(i\phi_0(t))-1]dt =$$

$$= \frac{i\sigma_k}{\pi}\exp[i\pi(\sigma_1+\sigma_2)/\sigma_k]\sin\frac{\pi(\sigma_1-\sigma_2)}{\sigma_k} + i\int_{\sigma_2}^{\sigma_1}\exp(i2\pi t/\sigma_k)[\exp(i\phi_0(t))-1]dt.$$

Геометрически очевидно, что $|\exp(ia)-1| \leq |a|$, и, значит,

$$|\widetilde{w}(\sigma_1)-\widetilde{w}(\sigma_2)| \geq \left|\frac{\sigma_k}{\pi}\right|\left|\sin\frac{\pi}{\sigma_k}(\sigma_1-\sigma_2)\right| - \max_t|\phi_0(t)|\,|\sigma_1-\sigma_2| \geq \left(\frac{2}{\pi}-2c\right)|\sigma_1-\sigma_2|,$$

где c из (6). Таким образом, $m = \frac{2}{\pi}-2c$.

в) Покажем, что при $|\sigma_1-\sigma_2| \leq lm_1/2$ выполняется неравенство

$$\left|\ln\frac{ds}{d\sigma}\Big|_{\sigma_1} - \ln\frac{ds}{d\sigma}\Big|_{\sigma_2}\right| \leq \frac{C_1}{|\ln\frac{|\sigma_1-\sigma_2|}{\sigma_k}|^p},$$

где

$$C_1 = \frac{C|\ln lm_1/(2\sigma_k)|^p}{m_1(\ln 2)^p}. \tag{8}$$

Пусть $|\sigma_1-\sigma_2| \leq lm_1/2$, тогда

$$|s(\sigma_1)-s(\sigma_2)| \leq \frac{|\sigma_1-\sigma_2|}{\min\sigma'(s)} \leq l/2.$$

Следовательно,

$$\left|\ln\frac{ds}{d\sigma}\Big|_{\sigma_1} - \ln\frac{ds}{d\sigma}\Big|_{\sigma_2}\right| = \left|\ln\frac{d\sigma}{ds}\Big|_{s(\sigma_1)} - \ln\frac{d\sigma}{ds}\Big|_{s(\sigma_2)}\right| \leq \frac{1}{\min\sigma'(s)}\left|\frac{d\sigma}{ds}\Big|_{s(\sigma_1)} - \frac{d\sigma}{ds}\Big|_{s(\sigma_2)}\right| \leq$$

$$\leq \frac{C}{|\ln(|s(\sigma_1)-s(\sigma_2)|l^{-1})|^p m_1} =$$

$$= \frac{C}{m_1|\ln[s'(\sigma_0)|\sigma_1-\sigma_2|/l]|^p} \le \frac{C}{m_1}|\ln|\sigma_1-\sigma_2|/\sigma_k + \ln\sigma_k/l - \ln\min_s \sigma'(s)|^{-p} =$$

$$= \frac{C}{m_1}\left|1+\frac{\ln\sigma_k/l-\ln\min\sigma'(s)}{\ln|\sigma_1-\sigma_2|/\sigma_k}\right|^{-p}\left|\ln\frac{|\sigma_1-\sigma_2|}{\sigma_k}\right|^{-p} \le$$

$$\le \frac{C}{m_1}\left|1+\frac{\ln\sigma_k/l-\ln\min\sigma'(s)}{\ln[lm_1(2\sigma_k)^{-1}]}\right|^{-p}\left|\ln\frac{|\sigma_1-\sigma_2|}{\sigma_k}\right|^{-p} = \frac{C_1}{|\ln\frac{|\sigma_1-\sigma_2|}{\sigma_k}|^p},$$

где C_1 из (8).

г) Найдем оценку для $f(\sigma)=R[p]$ (3). Заметим, что

$$f(\sigma)=\ln\frac{ds}{d\sigma}\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi}\int_{L_w}\frac{d\widetilde{w}(\tau)}{\widetilde{w}(\tau)-\widetilde{w}(\sigma)}+\mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi}\int_{L_w}\frac{\ln\frac{ds}{d\sigma}|_\tau-\ln\frac{ds}{d\sigma}|_\sigma}{\widetilde{w}(\tau)-\widetilde{w}(\sigma)}d\widetilde{w}(\tau)=$$

$$=\mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi}\int_{L_w}\frac{\ln\frac{ds}{d\sigma}|_\tau-\ln\frac{ds}{d\sigma}|_\sigma}{\widetilde{w}(\tau)-\widetilde{w}(\sigma)}d\widetilde{w}(\tau).$$

Следовательно,

$$|f(\sigma)|\le\frac{1}{\pi}\Bigg[\int\limits_{|\tau-\sigma|\le lm_1/2}\left|\frac{\ln\frac{ds}{d\sigma}|_\tau-\ln\frac{ds}{d\sigma}|_\sigma}{\widetilde{w}(\tau)-\widetilde{w}(\sigma)}\right|d\tau+\int\limits_{lm_1/2<|\tau-\sigma|\le\sigma_k/2}\left|\frac{\ln\frac{ds}{d\sigma}|_\tau-\ln\frac{ds}{d\sigma}|_\sigma}{\widetilde{w}(\tau)-\widetilde{w}(\sigma)}\right|d\tau\Bigg]\le$$

$$\le\frac{1}{\pi}\Bigg[\frac{C_1}{m}\int\limits_{|\tau-\sigma|\le lm_1/2}\frac{d\tau}{|\tau-\sigma|\,|\ln\frac{|\tau-\sigma|}{\sigma_k}|^p}+\frac{4\max|\ln\frac{d\sigma}{ds}|}{m}(\ln\sigma_k/2-\ln lm_1/2)\Bigg]\le M,$$

где

$$M=\frac{1}{1-\pi c}\left[\frac{C_1}{p-1}\left|\ln\frac{lm_1}{2\sigma_k}\right|^{1-p}+2\ln M_1\ln\frac{\sigma_k}{lm_1}\right]. \tag{9}$$

д) Найдем оценку для $|q(\sigma)|$, где $q(\sigma)=\arg\frac{dz}{dw}|_{w=\widetilde{w}(\sigma)}$ — решение уравнения (1). Так как решение этого уравнения находится с точностью до постоянного слагаемого, подберем это слагаемое так, чтобы выполнялось соотношение

$$\int_0^{\sigma_k}q(\sigma)d\sigma=0.$$

Тогда

$$q(\sigma)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\sigma_k}q(\tau)\left[\{\arg[\widetilde{w}(\tau)-\widetilde{w}(\sigma)]\}'_\tau-\frac{\pi}{\sigma_k}\right]d\tau-f(\sigma),$$

и, значит,

$$\sup|q(\sigma)|\le\frac{1}{\pi}\sup|q(\sigma)|\sup\int_0^{\sigma_k}\left|\{\arg[\widetilde{w}(\tau)-\widetilde{w}(\sigma)]\}'_\tau-\frac{\pi}{\sigma_k}\right|d\tau+\sup|f(\sigma)|. \tag{10}$$

Согласно условию (5)

$$\left|\{\arg[\widetilde{w}(\tau)-\widetilde{w}(\sigma)]\}'_\tau-\frac{\pi}{\sigma_k}\right|\le\frac{2\pi}{\sigma_k}\Bigg|\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{j}a_{nj}\Big(-\sin\frac{2\pi}{\sigma_k}(\tau j+\sigma n)j-$$

$$-\sin\frac{2\pi}{\sigma_k}(\tau n+\sigma j)n\Big)+b_{nj}\Big(\cos\frac{2\pi}{\sigma_k}(\tau j+\sigma n)j+\cos\frac{2\pi}{\sigma_k}(\tau n+\sigma j)n\Big)\Bigg|\le$$

$$\le\frac{2\pi}{\sigma_k}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{j}(|a_{nj}|+|b_{nj}|)(j+n)\le\frac{2\pi b}{\sigma_k}.$$

Следовательно,
$$\frac{1}{\pi}\sup\int_0^{\sigma_k}\left|\{\arg[\widetilde{w}(\tau)-\widetilde{w}(\sigma)]\}'_\tau-\frac{\pi}{\sigma_k}\right|d\tau\le 2b<1.$$
Таким образом, согласно (10) $\sup|q(\sigma)|(1-2b)\le\sup|f(\sigma)|$, т. е. $|q(\sigma)|\le\frac{M}{1-2b}$, где M из (9).

Следовательно, если M и b малы настолько, что $M/(1-2b)<\pi/2$, то благодаря выпуклости контура L_w получим
$$\Delta\arg\frac{dz}{d\sigma}\Big|_{L_w}=\Delta\arg\frac{dz}{dw}\Big|_{L_w}+\Delta\arg\frac{dw}{d\sigma}\Big|_{L_w}>-\pi,$$
что обеспечивает почти выпуклость, а значит, простоту искомого контура L_z. Таким образом, доказана

Теорема. *Пусть исходная функция при постановке обратной краевой задачи по параметру s задана в виде $w(s)=\widetilde{w}(\sigma(s))$, где $|\widetilde{w}'(\sigma)|\equiv 1$, выполняются ограничения (4)–(6); $\sigma(s)$ — монотонная функция, удовлетворяющая неравенству (7) и ограничениям $0<m_1\le\sigma'(s)\le M_1<\infty$. Если при этом $M<\pi(1-2b)/2$, где M из (9), C_1 из (8), b и c из (5) и (6) соответственно, то постановка такой задачи является корректной, т. к. искомый контур будет простым (почти выпуклым).*

Полученное достаточное условие почти выпуклости решения внутренней обратной краевой задачи по параметру s можно было бы сравнить с достаточным условием однолистности решения той же задачи, приведенным в ([13], с. 163), где найдено ограничение, связывающее отношение $\max\sigma'(s)/\min\sigma'(s)$ с двумя геометрическими характеристиками известной области D_w. К сожалению, определение константы (B) для второй характеристики в случае произвольной выпуклой области — сама по себе непростая задача. Хотя несомненным преимуществом достаточного условия из [13] является требование только непрерывности $\sigma'(s)$ и отсутствие ограничения типа (7).

4. Условие (7) из предыдущего пункта может быть заменено подобным неравенством с другим модулем непрерывности. Итак, пусть при выполнении условий (4)–(6) на функцию $\sigma(s)$ наложены ограничения $0<m_1\le\sigma'(s)\le M_1<\infty$ и справедливо неравенство $|\sigma'(s_1)-\sigma'(s_2)|\le\omega(s_1-s_2)$, где непрерывная функция $\omega(t)$ такова, что $\omega(0)=0$, $\int\limits_0^\delta\frac{\omega(t)}{t}dt<\infty$, $\delta>0$. В этом случае также можно обеспечить почти выпуклость искомого контура L_z для некоторых модулей непрерывности $\omega(t)$. При этом меняется только оценка M для $\sup|f(\sigma)|$. Так как
$$|f(\sigma)|\le\frac{1}{\pi}\Big[\int\limits_{\sigma(-\delta)\le\tau-\sigma\le\sigma(\delta)}\left|\frac{\ln\frac{ds}{d\sigma}|_\tau-\ln\frac{ds}{d\sigma}|_\sigma}{\widetilde{w}(\tau)-\widetilde{w}(\sigma)}\right|d\tau+$$
$$+\int\limits_{\sigma(\delta)<\tau-\sigma\le\sigma(l/2),\ \sigma(-l/2)\le\tau-\sigma<\sigma(-\delta)}\left|\frac{\ln\frac{ds}{d\sigma}|_\tau-\ln\frac{ds}{d\sigma}|_\sigma}{\widetilde{w}(\tau)-\widetilde{w}(\sigma)}\right|d\tau\Big]=$$
$$=\frac{1}{\pi}\Big[2\int_0^\delta\frac{|\ln\sigma'(\xi)-\ln\sigma'(s)|}{mm_1|\xi-s|}M_1d\xi+4\frac{M_1|\ln M_1|}{mm_1}\ln\frac{l}{2\delta}\Big]\le$$
$$\le\frac{2M_1}{\pi mm_1}\Big[\frac{1}{m_1}\int_0^\delta\frac{\omega(t)}{t}dt+2|\ln M_1|\,|\ln(l/(2\delta))|\Big],$$
то за M можно взять величину
$$\frac{M_1}{(1-\pi c)m_1}\inf_{\delta>0}\Big[\frac{1}{m_1}\int_0^\delta\frac{\omega(t)}{t}dt+2|\ln M_1|\,|\ln(l/(2\delta))|\Big].$$
В случае, если $M<\frac{\pi(1-2b)}{2}$, опять получим простой — почти выпуклый — контур.

В качестве примера, более удобного для применения достаточного условия однолистности, может быть приведено

Следствие ([14]). Пусть $\widetilde{w}(\sigma)=\widetilde{u}(\sigma)+i\widetilde{v}(\sigma)$, $0\le\sigma\le\sigma_k$, — уравнение замкнутой кривой, σ — естественный параметр, причем

$$\max_{0\le\tau,\sigma\le\sigma_k}|\Phi^{(5)}_{\tau\tau\tau\sigma\sigma}|\frac{\sigma_k^5}{\pi 144}\equiv d<\frac{1}{\pi},$$

где $\Phi(\tau,\sigma)\equiv\arg[\widetilde{w}(\tau)-\widetilde{w}(\sigma)]-\arg[\exp(2\pi i\tau/\sigma_k)-\exp(2\pi i\sigma/\sigma_k)]$.

Если $\sigma=\sigma(s)$, $0\le s\le l$, — монотонная функция, удовлетворяющая условиям $0<m_1\le\sigma'(s)\le M_1<\infty$, $|\sigma'(s_1)-\sigma'(s_2)|\le\omega(s_1-s_2)$, где

$$\omega(0)=0,\int_0^\delta\frac{\omega(t)}{t}dt<\infty,\quad\delta>0,$$

причем

$$\inf_{0<\delta\le\sigma_k/2}\left[\frac{1}{m_1}\int_0^\delta\frac{\omega(t)}{t}dt+2|\ln M_1|\,|\ln(l/(2\delta))|\right]<\frac{\pi(1-2d)(1-\pi d)m_1}{2M_1},$$

то зависимость $w(s)\equiv\widetilde{w}(\sigma(s))$ представляет собой исходные данные, при которых решение соответствующей внутренней обратной краевой задачи по параметру s будет однолистным (почти выпуклым).

Доказательство. Если

$$\Phi(\tau,\sigma)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{j}a_{nj}\left[\cos\frac{2\pi}{\sigma_k}(\tau j+\sigma n)+\cos\frac{2\pi}{\sigma_k}(\tau n+\sigma j)\right]+$$
$$+b_{nj}\left[\sin\frac{2\pi}{\sigma_k}(\tau j+\sigma n)+\sin\frac{2\pi}{\sigma_k}(\tau n+\sigma j)\right],$$

как в (4), и выполняется неравенство

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{j}(|a_{nj}|+|b_{nj}|)(j+n)\le b<\frac{1}{\pi},\tag{11}$$

то условия (5), (6) теоремы справедливы. Обеспечим выполнение неравенства (11), оценивая коэффициенты разложения $\Phi'_\tau(\tau,\sigma)$. Имеем

$$a_{nj}(j+n)=-\frac{1}{\pi\sigma_k}\int_0^{\sigma_k}\int_0^{\sigma_k}\Phi'_\tau(\tau,\sigma)\left[\sin\frac{2\pi}{\sigma_k}(\tau j+\sigma n)+\sin\frac{2\pi}{\sigma_k}(\tau n+\sigma j)\right]d\tau\,d\sigma,$$
$$b_{nj}(j+n)=\frac{1}{\pi\sigma_k}\int_0^{\sigma_k}\int_0^{\sigma_k}\Phi'_\tau(\tau,\sigma)\left[\cos\frac{2\pi}{\sigma_k}(\tau j+\sigma n)+\cos\frac{2\pi}{\sigma_k}(\tau n+\sigma j)\right]d\tau\,d\sigma.$$

Если в выражениях для $a_{nj}(j+n)$, $b_{nj}(j+n)$ провести интегрирования по частям — дважды по каждому из переменных, то получим

$$|a_{nj}(j+n)|=\left|\frac{\sigma_k^3}{2^4\pi^5j^2n^2}\int_0^{\sigma_k}\int_0^{\sigma_k}\Phi^{(5)}_{\tau\tau\tau\sigma\sigma}(\tau,\sigma)\left[\sin\frac{2\pi}{\sigma_k}(\tau j+\sigma n)+\sin\frac{2\pi}{\sigma_k}(\tau n+\sigma j)\right]d\tau\,d\sigma\right|,$$
$$|b_{nj}(j+n)|=\left|\frac{\sigma_k^3}{2^4\pi^5j^2n^2}\int_0^{\sigma_k}\int_0^{\sigma_k}\Phi^{(5)}_{\tau\tau\tau\sigma\sigma}(\tau,\sigma)\left[\cos\frac{2\pi}{\sigma_k}(\tau j+\sigma n)+\cos\frac{2\pi}{\sigma_k}(\tau n+\sigma j)\right]d\tau d\sigma\right|.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{j}(|a_{nj}|+|b_{nj}|)(j+n)\le\frac{4\sigma_k^5}{2^4\pi^5}\max_{0\le\tau,\sigma\le\sigma_k}|\Phi^{(5)}_{\tau\tau\tau\sigma\sigma}(\tau,\sigma)|\sum_{j=1}^{\infty}j^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}=d,$$

где d из условия теоремы. Таким образом, неравенство (11) выполняется, следовательно, почти выпуклость решения соответствующей обратной краевой задачи обеспечена в силу оценки из раздела 4, где обе константы b и c совпадают с d.

Литература

1. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. *Обратные краевые задачи и их приложения.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1965. – 333 с.
2. Широкова Е.А. *О сведении решения обратной краевой задачи к решению уравнения Фредгольма* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 8. – С. 72–80.
3. Аксентьев Л.А. *Об однолистной разрешимости обратных краевых задач* // Тр. семин. по краев. задачам. – Изд-во. Казанск.ун-та. – 1973. – Вып. 10. – С. 11-24.
4. Аксентьев Л.А. *Об однолистности решения обратной задачи гидромеханики* // Изв. вузов. Математика. – 1961. – № 4. – С. 3–7.
5. Kaplan W. *Close-to-convex schlicht functions* // Michigan Math. J. – 1952. – V. 1. – № 2. – P. 169–185.
6. Красновидова И.С., Рогожин В.С. *Достаточные условия однолистности решения обратной краевой задачи* // УМН. – 1953. – Т. 8. – Вып.1. – С. 151–153.
7. Аксентьев Л.А. *Условия однолистности решения основных обратных краевых задач* // УМН. – 1960. – Т. 15. – Вып. 6. – С. 119–124.
8. Аксентьев Л.А. *Геометрические вопросы в обратных краевых задачах* // Тр. семин. по обратным краев. задачам. – Изд-во Казанск. ун-та. – 1964. – Вып.1. – С. 14–18.
9. Кудряшов С.Н. *Некоторые критерии выпуклости в одном направлении решения внутренней обратной краевой задачи* // Тр. семин. по обратным краев. задачам. – Изд-во Казанск. ун-та. – 1964. – Вып. 2. – С. 76–83.
10. Авхадиев Ф.Г., Гайдук В.Н. *Применение почти выпуклых функций к обратным краевым задачам* // Изв. вузов. Математика. – 1968. – № 6. – С. 3–10.
11. Майер Ф.Ф. *Подчинение в некоторых классах аналитических функций и его применение* // Тр. семин. по обратным краев. задачам. – Изд-во Казанск. ун-та. – 1990. – Вып. 24. – С. 144–152.
12. Лаврентьев М.А. *О некоторых граничных задачах в теории однолистных функций* // Матем. сб. – 1936. – Т. 71. – № 6. – С. 815–844.
13. Авхадиев Ф.Г. *Конформные отображения и краевые задачи.* – Казанский фонд “Математика”, 1996. – 216 с.
14. Широкова Е.А. *Получение классов данных для корректной постановки обратной краевой задачи с помощью перепараметризации выпуклой кривой* // Тр. Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 5. Казань, “УНИПРЕСС”, 2000. – С. 229–300.

Казанский государственный университет

Поступила
03.05.2000