ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 10 (485)

УДК 517.547

И.И. МАРЧЕНКО

ОБ ОЦЕНКАХ ВЕРХНЕЙ И НИЖНЕЙ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ПЛОТНОСТЕЙ В ТЕОРИИ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В данной статье будут использованы стандартные обозначения теории распределения значений $m(r,a,f)$, $N(r,a,f)$, $T(r,f)$, $\delta(a,f)$ [1], [2]. Р. Неванлинной были получены две основные теоремы этой теории.

Теорема А. *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция в плоскости $\mathbb{C}$. Тогда для каждого $a\in\overline{\mathbb{C}}$*

$$m(r,a,f)+N(r,a,f)=T(r,f)+O(1),\quad r\to\infty. \tag{1}$$

Теорема Б. *Для трансцендентной мероморфной функции $f(z)$ и любого конечного набора различных комплексных чисел $\{a_k\}_{k=1}^q\in\overline{\mathbb{C}}$ неравенство*

$$\sum_{k=1}^{q} m(r,a_k,f)\le(2+o(1))T(r,f),\quad r\to\infty, \tag{2}$$

выполняется для всех r, исключая, быть может, множество конечной меры.

Из соотношений (1), (2) следует, что $\delta(a,f)\le 1$ и $\sum\limits_{a\in\overline{\mathbb{C}}}\delta(a,f)\le 2$.

В 1969 г. В.П. Петренко поставил вопрос о том, как изменится неванлинновская теория, если рассмотреть приближение мероморфной функции $f(z)$ к значению a в другой метрике. В связи с этим он ввел следующую функцию :

$$\mathcal{L}(r,a,f)=\max_{|z|=r}\log^+\frac{1}{|f(z)-a|},\quad \mathcal{L}(r,\infty,f)=\max_{|z|=r}\log^+|f(z)|.$$

Величина $\beta(a,f)=\liminf\limits_{r\to\infty}\frac{\mathcal{L}(r,a,f)}{T(r,f)}$ называется величиной отклонения мероморфной функции $f(z)$ в точке a.

Функция $\mathcal{L}(r,a,f)$ характеризует приближение функции f к значению a на окружности $\{z: |z|=r\}$ в равномерной метрике, а $m(r,a,f)$ — в метрике $L_1[0,2\pi]$. Таким образом, величина $\beta(a,f)$ характеризует приближение функции $f(z)$ к значению a в более сильной метрике, чем $\delta(a,f)$. Тем не менее оказалось, что для мероморфных функций конечного нижнего порядка $\lambda=\liminf\limits_{r\to\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r}$ свойства величин $\beta(a,f)$ напоминают свойства $\delta(a,f)$. Так, в [3] получена точная оценка сверху для $\beta(a,f)$, а также некоторая оценка для $\sum\limits_{(a)}\beta(a,f)$. Через $\Phi(\lambda)$ обозначим класс мероморфных функций конечного нижнего порядка λ, а через $\Phi(\lambda,\rho)$ — класс мероморфных функций конечного нижнего порядка λ и порядка $\rho=\limsup\limits_{r\to\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r}$.

Теорема В. *Для $f\in\Phi(\lambda)$ и $a\in\overline{\mathbb{C}}$ выполняются неравенства*

$$\beta(a,f)\le B(\lambda):=\begin{cases}\pi\lambda\sin^{-1}\pi\lambda, & \text{если}\ \ \lambda\le 0.5; \quad (3)\\ \pi\lambda, & \text{если}\ \ \lambda>0.5, \quad (4)\end{cases}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS, грант 2000-15.

$$\sum_{(a)} \beta(a,f) \le 816\pi(\lambda+1)^2.$$

Оценка (3) была получена А.А. Гольдбергом и И.В. Островским в 1961 г. [4]. Следует сказать несколько слов об оценке (4). В 1932 г. Р. Пэли высказал гипотезу: если $g(z)$ — целая функция конечного порядка $\rho \ge \frac{1}{2}$, то

$$\beta(\infty, g) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log M(r,g)}{T(r,g)} \le \pi\rho.$$

В 1969 г. Н.В. Говоров [5] подтвердил эту гипотезу. В том же году В.П. Петренко получил оценку (4) в общем случае для мероморфных функций конечного нижнего порядка, применив при этом новый метод, основанный на найденном им представлении мероморфной функции в секторе [6]. В 1990 г. автор со своим учеником А.И. Щербой получили точную оценку для $\sum\limits_{(a)} \beta(a,f)$ [7].

Теорема Г. *Пусть $f \in \Phi(\lambda)$. Тогда*

$$\sum_{(a)} \beta(a,f) \le 2B(\lambda).$$

В 1970 г. Д. Шиа (см. [3], [8]) исследовал влияние валироновского дефекта $\Delta(a,f) := \limsup\limits_{r\to\infty} \frac{m(r,a,f)}{T(r,f)}$ на величину отклонения.

Положим

$$\Lambda(\Delta) := \left\{\lambda : 0 \le \lambda \le 0.5 \ \text{ и } \ \sin\frac{\pi\lambda}{2} \le \sqrt{\frac{\Delta}{2}}\right\},$$

$$B(\lambda,\Delta) := \begin{cases} \pi\lambda\sqrt{\Delta(2-\Delta)}, & \text{если } \ \lambda \notin \Lambda(\Delta); \\ \frac{\pi\lambda}{\sin\pi\lambda}(1-(1-\Delta)\cos\pi\lambda), & \text{если } \ \lambda \in \Lambda(\Delta). \end{cases}$$

Теорема Д. *Для $f \in \Phi(\lambda)$ и для каждого $a \in \overline{\mathbb{C}}$ справедливо неравенство*

$$\beta(a,f) \le B(\lambda, \Delta(a,f)). \tag{5}$$

Точность оценки (5) была показана в [9]. В 1999 г. автор распространил теорему Д на случай суммы величин отклонений [10].

Теорема Е. *Если $f \in \Phi(\lambda)$, то справедливо неравенство*

$$\sum_{a\in\mathbb{C}} \beta(a,f) \le 2B(\lambda,\Delta),$$

где $\Delta = \Delta(0,f')$ — валироновский дефект производной в нуле.

В 1998 г. автор [11] получил аналог второй основной теоремы для равномерной метрики. Напомним определение верхней и нижней логарифмической плотности множества. Пусть E — измеримое множество на положительной полуоси. Величины

$$\mathcal{L}_0(E) = \limsup_{R\to\infty} \frac{1}{\log R} \int\limits_{E\cap[1,R]} \frac{dt}{t}, \quad l_0(E) = \liminf_{R\to\infty} \frac{1}{\log R} \int\limits_{E\cap[1,R]} \frac{dt}{t}$$

называются соответственно верхней и нижней логарифмической плотностью множества E.

Теорема Ж. *Пусть $f \in \Phi(\lambda,\rho)$ — трансцендентная функция, $0 < \gamma < \infty$, $\{a_k\}_{k=1}^q \in \overline{\mathbb{C}}$ — конечный набор различных комплексных чисел,*

$$E_1(\gamma) = \left\{r : \sum_{k=1}^q \mathcal{L}(r,a_k,f) < 2B(\gamma)T(r,f)\right\}.$$

Тогда $\mathcal{L}_0(E_1(\gamma)) \ge 1 - \frac{\lambda}{\gamma}$, $l_0(E_1(\gamma)) \ge 1 - \frac{\rho}{\gamma}$.

В 2000 г. в работе [12] получен следующий результат.

Теорема З. *Пусть* $f \in \Phi(\lambda, \rho)$, $0 < \gamma < \infty$, $a \in \overline{\mathbb{C}}$, $\varepsilon > 0$ *— произвольное фиксированное число,*

$$
\begin{aligned}
E_2(\gamma) &= \{r : \mathcal{L}(r, a, f) < B(\gamma, \Delta(a, f))T(r, f)\}, \quad &&\text{если } \Delta(a, f) > 0,\\
E_2(\gamma) &= \{r : \mathcal{L}(r, a, f) < \varepsilon T(r, f)\}, &&\text{если } \Delta(a, f) = 0.
\end{aligned}
$$

Тогда $\mathcal{L}_0(E_2(\gamma)) \geq 1 - \frac{\lambda}{\gamma}$, $l_0(E_2(\gamma)) \geq 1 - \frac{\rho}{\gamma}$.

Данная работа посвящена доказательству аналога теоремы З для случая $\sum\limits_{k=1}^{q} \mathcal{L}(r, a_k, f)$.

Теорема И. *Пусть* $f \in \Phi(\lambda, \rho)$ *— трансцендентная функция,* $0 < \gamma < \infty$, $\{a_k\}_{k=1}^{q} \in \mathbb{C}$ *— конечный набор различных комплексных чисел,* $\varepsilon > 0$ *— произвольное фиксированное число,*

$$
\begin{aligned}
E(\gamma) &= \left\{r : \sum_{k=1}^{q} \mathcal{L}(r, a_k, f) < 2B(\gamma, \Delta(0, f'))T(r, f)\right\}, \quad &&\text{если } \Delta(0, f') > 0,\\
E(\gamma) &= \left\{r : \sum_{k=1}^{q} \mathcal{L}(r, a_k, f) < \varepsilon T(r, f)\right\}, &&\text{если } \Delta(0, f') = 0.
\end{aligned}
$$

Тогда $\mathcal{L}_0(E(\gamma)) \geq 1 - \frac{\lambda}{\gamma}$, $l_0(E(\gamma)) \geq 1 - \frac{\rho}{\gamma}$.

Доказательство. Пусть $f(z)$ — мероморфная трансцендентная функция конечного порядка ρ, $\{a_k\}_{k=1}^{q}$ — набор различных комплексных чисел, $c = \min\limits_{i \neq j} |a_i - a_j|$. Для каждого фиксированного $R > 0$ рассмотрим множество

$$G_R = \{z : |z| < R,\ |f'(z)| < R^{-2-\rho}\}.$$

Обозначим через $G_{R,k}$ множество, состоящее из тех связных компонент G_R, в каждой из которых есть точка z_1 такая, что $|f(z_1) - a_k| < \frac{c}{4}$. В [11] с помощью метода А. Вейцмана [13] показано, что при $R > R_0$ множества $G_{R,k}$, $k = 1, 2, \ldots, q$, попарно не пересекаются. Далее при $R > R_0$ рассмотрим

$$
u_{R,k}(z) = \begin{cases} \log \frac{1}{|f'(z)|}, & \text{если } z \in G_{R,k};\\ (\rho + 2)\log R, & \text{если } z \notin G_{R,k}. \end{cases}
$$

Легко видеть, что $u_{R,k}(z)$ — δ-субгармоническая функция в круге $\{z : |z| < R\}$. Действительно, пусть $\varphi_1(z) = \sum\limits_{z_i \in G_{R,k}} \log|z - z_i|$, где $\{z_i\}$ — нули $f'(z)$ с учетом кратностей. Тогда $\varphi_2(z) = u_{R,k}(z) + \varphi_1(z)$ субгармонична в круге $|z| < R$. Следовательно, $u_{R,k}(z) = \varphi_2(z) - \varphi_1(z)$.

Напомним определение и основные свойства T^*-функции Бернстейна для δ-субгармонических функций [14]. Для этого положим

$$
\begin{gathered}
m^*(z, u_{R,k}) = \sup_{|E| = 2\theta} \frac{1}{2\pi} \int_E u_{R,k}(re^{i\varphi})d\varphi, \quad z = re^{i\theta},\\
T^*(z, u_{R,k}) = m^*(z, u_{R,k}) + N(r, u_{R,k}),
\end{gathered}
$$

где $|E|$ — лебегова мера E, $N(r, u_{R,k}) = \int\limits_1^r \frac{\mu_{R,k}(t)}{t}dt$, $\mu_{R,k}(t)$ — число нулей $f'(z)$ в области $G_{R,k} \cap \{z : |z| < t\}$.

Легко видеть, что $m^*(z, u_{R,k}) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\theta \widetilde{u}_{R,k}(re^{i\varphi})d\varphi$, где $\widetilde{u}_{R,k}(z)$ — круговая симметризация функции $u_{R,k}(z)$ ([15], с. 90).

Далее положим [7] $T_0^*(z, f) = \sum\limits_{k=1}^{q} T^*(z, u_{R,k})$. Доказательство теоремы И базируется на следующей лемме, доказанной автором в [11].

Пусть $\tau > 0$, $0 < \alpha \le \min\left(\pi, \frac{\pi}{2\tau}\right)$, $-\frac{\pi}{2\tau} \le \psi \le \frac{\pi}{2\tau} - \alpha$,

$$h_R(r) = \frac{1}{\pi}\Big\{ \sum_{k=1}^{q} \widetilde{u}_{R,k}(r)\cos\tau\psi - \sum_{k=1}^{q} \widetilde{u}_{R,k}(re^{i\alpha})\cos\tau(\alpha+\psi) - $$
$$- \pi\tau\sin\tau(\alpha+\psi)T_0^*(re^{i\alpha}, f) + \pi\tau\sin\tau\psi N(r,0,f')\Big\}.$$

Лемма 1. *Пусть* $A = \{r : 1 \le r < R,\ h_R(r) > 0\}$. *Тогда*

$$\tau\int_A \frac{dt}{t} \le \log T(4R, f) + \log\log R + O(1), \quad R \to \infty.$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^{q} \mathcal{L}(r, a_k, f) = \sum_{k=1}^{q} \log^+ \max_{|z|=r} \frac{1}{|f(z) - a_k|} = \sum_{k=1}^{q} C_k(r), \quad \text{где} \quad C_k(r) = \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta_k}) - a_k|}\,,$$

$r \in [R_0, R)$. Если $|f(re^{i\theta_k}) - a_k| \ge \frac{c}{4}$, то

$$C_k(r) \le \log^+ \frac{4}{c}. \tag{6}$$

Пусть $|f(re^{i\theta_k}) - a_k| < \frac{c}{4}$. Тогда

$$C_k(r) \le \log^+ \left|\frac{f'(re^{i\theta_k})}{f(re^{i\theta_k}) - a_k}\right| + \log^+ \frac{1}{|f'(re^{i\theta_k})|} \le$$
$$\le D_k(r) + \log^+ \frac{1}{|f'(re^{i\theta_k})|}, \quad D_k(r) = \log^+ M\left(r, \frac{f'}{f - a_k}\right), \quad M(r,f) = \max_{|z|=r}|f(z)|.$$

Если $|f'(re^{i\theta_k})| \ge \frac{1}{R^{2+\rho}}$, то имеем

$$C_k(r) \le D_k(r) + (2+\rho)\log R. \tag{7}$$

При $|f'(re^{i\theta_k})| < \frac{1}{R^{2+\rho}}$ справедливо неравенство

$$\log^+ \frac{1}{|f'(re^{i\theta_k})|} \le \max_{|z|=r, z\in G_{R,k}} \log^+ \frac{1}{|f'(z)|} = \widetilde{u}_{R,k}(r)\,.$$

Поэтому в этом случае

$$C_k(r) \le D_k(r) + \widetilde{u}_{R,k}(r). \tag{8}$$

Из неравенств (6)–(8) получим для всех $r \in [R_0, R)$

$$C_k(r) \le \widetilde{u}_{R,k}(r) + D_k(r) + (2+\rho)\log R + \log^+ \frac{4}{c}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{q} \mathcal{L}(r, a_k, f) \le \sum_{k=1}^{q} \widetilde{u}_{R,k}(r) + \sum_{k=1}^{q} D_k(r) + (2+\rho)q\log R + q\log^+ \frac{4}{c}. \tag{9}$$

При $\gamma \le \rho$ теорема И очевидна. Пусть $\gamma > \rho$, τ — любое фиксированное число такое, что $\rho < \tau < \gamma$. В лемме 1 положим $\psi = \frac{\pi}{2\tau} - \alpha$.Тогда

$$h_R(r) = \frac{1}{\pi}\Big\{ \sum_{k=1}^{q} \widetilde{u}_{R,k}(r)\sin\tau\alpha - \pi\tau T_0^*(re^{i\alpha}, f) + \pi\tau\cos\tau\alpha N(r,0,f')\Big\}.$$

Из определения функций $u_{R,k}(z)$ и $T_0^*(z,f)$ имеем

$$T_0^*(z,f) \le T\left(r, \frac{1}{f'}\right) + q(\rho+2)\log R \le T(r,f') + q(\rho+2)\log R + C,$$

где $|z| = r \in [R_0, R)$, а C — некоторая постоянная.

Из определения дефекта Валирона

$$\Delta(0,f') = 1 - \liminf_{r\to\infty} \frac{N(r,0,f')}{T(r,f')}$$

следует $N(r,0,f') > (1-\Delta(0,f')-\varepsilon)T(r,f')$, $r > r_0(\varepsilon)$. Если $\Delta(0,f') = 1$, то теорема И следует из теоремы З, т. к. $B(\lambda,1) = B(\lambda)$. Пусть $\Delta(0,f') < 1$, $0 < \varepsilon < 1 - \Delta(0,f')$.

Таким образом, при $r \in [r_0(\varepsilon), R)$ имеем

$$h_R(r) > \frac{1}{\pi}\Bigg\{ \sum_{k=1}^{q} \widetilde{u}_{R,k}(r)\sin\tau\alpha - \pi\tau T(r,f') - \pi\tau C -$$

$$- \pi\tau(\rho+2)\log R + (1-\Delta(0,f')-\varepsilon)\, T(r,f')\pi\tau\cos\tau\alpha\Bigg\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Bigg\{ \sum_{k=1}^{q} \widetilde{u}_{R,k}(r)\sin\tau\alpha - \pi\tau T(r,f')(1-(1-\Delta(0,f')-\varepsilon)\cos\tau\alpha) - \pi\tau C - \pi\tau q(\rho+2)\log R\Bigg\}.$$

Следовательно, если $r \notin A$ (A — множество из леммы 1), то $h_R(r) \le 0$, и поэтому при $r \in [r_0(\varepsilon), R) \setminus A$

$$\sum_{k=1}^{q} \widetilde{u}_{R,k}(r) \le \frac{\pi\tau}{\sin\tau\alpha}(1-(1-\Delta(0,f')-\varepsilon)\cos\tau\alpha)T(r,f') + \frac{\pi\tau C}{\sin\tau\alpha} + \frac{\pi\tau q(\rho+2)\log R}{\sin\tau\alpha}.$$

Отсюда и из неравенства (9) получим, что для $r \in [r_0(\varepsilon), R) \setminus A$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{q} \mathcal{L}(r,a_k,f) \le \frac{\pi\tau}{\sin\tau\alpha}(1-(1-\Delta(0,f')-\varepsilon)\cos\tau\alpha)T(r,f') +$$

$$+ \frac{\pi\tau C}{\sin\tau\alpha} + \frac{\pi\tau q(\rho+2)\log R}{\sin\tau\alpha} + \sum_{k=1}^{q} D_k(r) + (2+\rho)q\log R + q\log^+\frac{4}{c}. \quad (10)$$

Далее нам понадобится лемма о росте логарифмической производной в равномерной метрике, которая была доказана в [11].

Лемма 2. *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция в $\mathbb{C}$. Тогда вне множества конечной меры*

$$\log^+ M\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(\log(rT(r,f))).$$

В силу леммы 2 и неравенства (10) имеем, что для всех $r \in [r_0(\varepsilon), R) \setminus A$, исключая, быть может, множество конечной меры,

$$\sum_{k=1}^{q} \mathcal{L}(r,a_k,f) \le \frac{\pi\tau}{\sin\tau\alpha}(1-(1-\Delta(0,f')-\varepsilon)\cos\tau\alpha)T(r,f') + O(\log R) \le$$

$$\le \frac{2\pi\tau}{\sin\tau\alpha}(1-(1-\Delta(0,f')-\varepsilon)\cos\tau\alpha)T(r,f) + O(\log R). \quad (11)$$

Проведем доказательство теоремы И для случая $\Delta(0,f') > 0$. Если $\Delta(0,f') = 0$, то доказательство теоремы И проводится аналогично, только в качестве $\Delta(0,f')$ будет выступать произвольное положительное число. В формуле (11) положим $\alpha=\frac{1}{\tau}\arccos(1-\Delta(0,f'))$. Тогда для указанных r имеем

$$\sum_{k=1}^{q}\mathcal{L}(r,a_k,f)\le 2B(\tau,\Delta(0,f'))T(r,f)+2\pi\tau\varepsilon\operatorname{ctg}\alpha T(r,f)+O(\log R). \tag{12}$$

Так как $f(z)$ — трансцендентная функция, то

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{\log r}=\infty\,.$$

Выберем $\alpha(R)\to 0$ так, чтобы $\varphi(R)=\frac{T(R^{\alpha(R)},f)}{\log R}\to\infty$ при $R\to\infty$. Положим $S(R)=R^{\alpha(R)}$. Пусть $r\in[S(R),R]$. Тогда

$$T(r,f)\ge T(S(R),f)=T(R^{\alpha(R)},f)=\varphi(R)\log R.$$

Следовательно, $\log R=o(T(r,f))$, $r\in[S(R),R)$, $R\to\infty$. Отсюда и из (12) получаем, что для всех $r\in[S(R),R)\setminus A$ кроме, быть может, множества конечной меры,

$$\sum_{k=1}^{q}\mathcal{L}(r,a_k,f)\le 2B(\tau,\Delta(0,f'))T(r,f)+2\pi\tau\varepsilon\operatorname{ctg}\alpha T(r,f)+o(T(r,f)). \tag{13}$$

В силу строгой монотонности $B(x,\Delta)$ и из неравенства $\gamma>\tau$ следует

$$B(\tau,\Delta(0,f'))<B(\gamma,\Delta(0,f')).$$

Поэтому из (13) для всех $r\in[S(R),R)\setminus A$, кроме, быть может, множества конечной меры, при $R>\widetilde{R}_0$ ($\widetilde{R}_0=\widetilde{R}_0(\gamma)$)

$$\sum_{k=1}^{q}\mathcal{L}(r,a_k,f)<2B(\gamma,\Delta(0,f'))T(r,f).$$

Отсюда при $R>\widetilde{R}_0$

$$[S(R),R)\setminus(A\cup A_0)\subset E(\gamma),\quad \operatorname{mes}A_0<\infty.$$

Таким образом,

$$\tau\int\limits_{E(\gamma)\cap[1,R]}\frac{dt}{t}\ge\tau\int\limits_{E(\gamma)\cap[\tilde{R}_0,R]}\frac{dt}{t}\ge\tau\int\limits_{[S(R),R]\setminus(A\cup A_0)}\frac{dt}{t}+O(1)\ge$$

$$\ge\tau\int\limits_{S(R)}^{R}\frac{dt}{t}-\tau\int\limits_{A}\frac{dt}{t}-\tau\int\limits_{A_0}\frac{dt}{t}=\tau[\log R-\alpha(R)\log R]-\tau\operatorname{mes}A_0-\tau\int\limits_{A}\frac{dt}{t}.$$

Из леммы 1 получаем

$$\tau\int\limits_{E(\gamma)\cap[1,R]}\frac{dt}{t}\ge\tau\log R(1-\alpha(R))-\log T(4R,f)-\log\log R+O(1),\quad R\to\infty.$$

Деля это неравенство на $\log R$ и устремляя $R\to\infty$, получаем $\tau l_0(E(\gamma))\ge\tau-\rho$. Поэтому $l_0(E(\gamma))\ge 1-\rho/\tau$. В силу произвольности числа $\tau<\gamma$ следует

$$l_0(E(\gamma))\ge 1-\frac{\rho}{\gamma}.$$

Оценка для верхней логарифмической плотности получается аналогично, только в качестве R надо взять последовательность R_n, для которой $\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log T(R_n,f)}{\log R_n}$.

Литература

1. Неванлинна Р. *Однозначные аналитические функции.* – М.: ОГИЗ, 1941. – 388 с.
2. Гольдберг А.А., Островский И.В. *Распределение значений мероморфных функций.* – М.: Наука, 1970. – 592 с.
3. Петренко В.П. *Рост мероморфных функций.* – Харьков: Изд-во Харьковск. ун-та, 1978. – 136 с.
4. Гольдберг А.А., Островский И.В. *Некоторые теоремы о росте мероморфных функций* // Зап. Харьковск. матем. о-ва. – 1961. – Т. 27 – С. 3–37.
5. Говоров Н.В. *О проблеме Пэли* // Функц. анализ и прилож. – 1969. – Т.3. – № 2. – С. 38–43.
6. Петренко В.П. *Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1969. – № 2. – С. 414–454.
7. Марченко И.И., Щерба А.И. *О величинах отклонений мероморфных функций* // Матем. сб. – 1990. – Т. 181. – № 1. – С. 3–24.
8. Fuchs W.H.J. *Topics in Nevanlinna theory* // Proceedings of the NRL conference on classical function theory. – 1970. – P. 1–32.
9. Рыжков М.А. *О точности оценки величины отклонения для мероморфной функции* // Теория функций, функц. анализ и их прилож. Харьков: Вища школа, 1982. – № 37. – С. 114–115.
10. Марченко И.И. *Об отклонениях и дефектах мероморфных функций конечного порядка* // Укр. матем. журн. – 1999. – Т. 51. – № 6. – С. 784–791.
11. Марченко И.И. *Об аналоге второй основной теоремы для равномерной метрики* // Матем. физика, анализ, геометрия. – 1998. – Т. 5. – № 3–4. – С. 212–227.
12. Марченко И.И. *Об оценке Шиа для величины отклонения мероморфной функции* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 8. – С. 46–51.
13. Weitsman A. *A theorem on Nevanlinna dificiencies* // Acta Math. – 1972. – V. 128 – № 1–2. – P. 41–52.
14. Baernstein A. *Integral means, univalent functions and circular symmetrization* // Acta Math. – 1974. – V. 133. – № 1. – P. 139–169.
15. Хейман У.К. *Многолистные функции.* – М.: Ин. лит., 1960. – 179 с.

Харьковский национальный университет (Украина)
Щецинский университет (Польша)

Поступила
20.02.2002