ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 7 (530)

УДК 517.518

М.Г. ПЛОТНИКОВ

О ГРАНИЦЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ РЯДОВ ХААРА

В работе изучаются вопросы единственности для двумерных рядов Хаара. При этом рассматривается класс так называемых ρ-регулярных сходимостей для двумерных рядов (ρ может принимать любое значение из полуинтервала $(0;1]$), каждая из которых является более общей, чем часто используемая сходимость по прямоугольникам. Среди указанных сходимостей находится такая, что при менее общих сходимостях (внутри данного класса) единственность для двумерных рядов Хаара имеет место, а при более общих — нет.

Используется следующее определение одномерных функций Хаара $\chi_n(x)$: $\chi_1(x) \equiv 1$ для $x \in [0,1]$; если $n = 2^k + i$, где $k \geq 0$, $1 \leq i \leq 2^k$, то

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 2^{k/2} & \text{при } x \in \left(\frac{2i-2}{2^{k+1}}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right); \\ -2^{k/2} & \text{при } x \in \left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{2i}{2^{k+1}}\right); \\ 0 & \text{вне } \left[\frac{2i-2}{2^{k+1}}, \frac{2i}{2^{k+1}}\right]. \end{cases}$$

В точке 0 (соответственно 1) функцию $\chi_n(x)$ полагаем равной пределу справа (соответственно слева) функции $\chi_n(x)$, а в остальных точках отрезка $[0,1]$ — среднему арифметическому правого и левого пределов. При таком определении система $\{\chi_n(x)\}$ полна в $C[0,1]$ ([1], [2]).

Двумерный ряд Хаара

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}\chi_{n,m}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}\chi_n(x)\chi_m(y) \tag{1}$$

называется ρ-регулярно сходящимся к сумме $S(x,y)$ в точке $(x,y) \in [0,1]^2$, если последовательность прямоугольных частичных сумм $S_{N,M}(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{N}\sum\limits_{m=1}^{M} a_{n,m}\chi_{n,m}(x,y)$ сходится к $S(x,y)$ при $\min\{N,M\} \to \infty$ и

$$\min\{N/M; M/N\} \geq \rho. \tag{2}$$

Если условие (2) отбросить, то получим обычную сходимость по прямоугольникам. Если для чисел N, M будет выполняться условие (2), то частичную сумму $S_{N,M}(x,y)$ будем называть ρ-регулярной. Обозначим ρ-регулярную сходимость в виде $S_{N,M}(x,y) \xrightarrow{\rho} S(x,y)$. Очевидно, при $\rho_1 < \rho_2$ из ρ_1-регулярной сходимости следует ρ_2-регулярная сходимость, а из сходимости по прямоугольникам следует ρ-регулярная сходимость при любом $\rho \in (0,1]$.

Простейшая задача теории единственности ортогональных рядов выглядит так: следует ли из того, что ряд по некоторой системе функций сходится к нулю на своей области определения, равенство нулю коэффициентов этого ряда? Для рядов (1) при сходимости по прямоугольникам ответ на вопрос задачи оказывается положительным, что следует из работ [3] и [4]. В [5] было доказано, что аналогичная ситуация имеет место и при ρ-регулярной сходимости рядов (1), если $\rho \leq 1/2$. Более того, в [5] для каждого $\rho \leq 1/2$ построен обобщенный интеграл, названный

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 02-01-00428) и программой поддержки ведущих научных школ (проект НШ-1657.2003.1).

(P_R^ρ)-интегралом, с помощью которого коэффициенты всюду на $[0,1]^2$ ρ-регулярно сходящихся рядов (1) восстанавливаются по формулам Фурье. Отметим, что любой из интегралов данного семейства не может быть покрыт не только интегралом Лебега, но и многими известными обобщенными интегралами, например, нерегулярным или ρ-регулярным интегралами Хенстока–Перрона [6].

Тем не менее, такая ситуация имеет место не во всех случаях. В [7] было доказано, что при значениях ρ, близких к единице, единственность нарушается. А именно, для любого $\rho \in (\sqrt{2}/2;1]$ существует ряд (1), не все коээффициенты которого нулевые, сходящийся к нулю ρ-регулярно всюду на $[0,1]^2$.

Ясно, что существует $\rho_0 \in [1/2, \sqrt{2}/2]$ такое, что при $\rho < \rho_0$ единственность имеет место, а при $\rho > \rho_0$ нарушается. Единственность сейчас понимается в самом узком смысле, т. е. под ней подразумеваем, что все коэффициенты сходящегося всюду к нулю ряда (1) необходимо нулевые. Покажем, что $\rho_0 = \sqrt{2}/2$. Для каждого значения $\rho < \rho_0$ построим обобщенный интеграл, который назовем (P_d^ρ)-интегралом и покажем, что с помощью этого интеграла коэффициенты всюду на $[0,1]^2$ сходящегося ρ-регулярно двумерного ряда Хаара восстанавливаются по формулам Фурье. Тем самым будет получено обобщение результатов [5].

Воспользуемся следующими определениями [4]–[6]. Двоично-рациональными называются точки множества $Q_d \overset{\text{def}}{=} \{x = p/2^n \in [0,1],\ p,n \in \mathbb{Z}\}$, а двоично-иррациональными — точки множества $I_d \overset{\text{def}}{=} [0,1] \setminus Q_d$. Замкнутый прямоугольник, лежащий в $[0,1]^2$ и имеющий вид $\left[\frac{p}{2^n};\frac{p+1}{2^n}\right] \times \left[\frac{q}{2^m};\frac{q+1}{2^m}\right]$ с целыми p, q, n и m, называется двоичным интервалом, а пара чисел (n,m) – его рангом. Двойную последовательность $\{\Delta_{k,l}\}$ двоичных интервалов назовем основной для точки $(x,y) \in [0,1]^2$, если $(x,y) \in \Delta_{k,l}$, $\Delta_{k+1,l} \subset \Delta_{k,l}$, $\Delta_{k,l+1} \subset \Delta_{k,l}$ и ранг $\Delta_{k,l}$ равен (k,l) для всех k и l.

Для заданного ряда (1) построим функцию двоичного интервала $\Psi(\Delta)$ по формуле

$$\Psi(\Delta) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{\Delta} a_{n,m}\chi_{n,m}(x,y)dx\,dy. \tag{3}$$

Из результатов [8] следует, что сумма в правой части формулы (3) содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых, функция $\Psi(\Delta)$ является аддитивной функцией двоичного интервала и

$$\Psi(\Delta) = |\Delta| S_{2^k,2^l}(x,y), \tag{4}$$

где (x,y) — любая внутренняя точка двоичного интервала Δ, а (k,l) — ранг этого интервала.

В терминах функции $\Psi(\Delta)$, которая для ряда (1) строится по формуле (3), сформулируем условия, необходимые для того, чтобы этот ряд сходился к конечной сумме в некоторой точке. Подобные утверждения формулировались в ([5], утверждения 1–3), однако они не подходят для случая $\rho > 1/2$. Для этого потребуются более тонкие утверждения. В утверждениях 1–8 сумму $S(x,y)$ будем считать конечной.

Утверждение 1. *Пусть* $x,y \in I_d$. *Если* $S_{N,M}(x,y) \xrightarrow{\rho} S(x,y)$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}(\Psi(\Delta_{n,n})/|\Delta_{n,n}|) = S(x,y)$.

Доказательство легко следует из формулы (4).

Будем обозначать в дальнейшем через $\varphi_{n,m}(x,y)$ выражение $a_{n,m}\chi_{n,m}(x,y)$ — общий член ряда (1).

Утверждение 2. *Пусть для координат точки* (x,y) *выполнено условие*

$$\rho < \frac{1+x}{1+y} < \frac{1}{\rho}. \tag{5}$$

Если $x \in Q_d$, $y \in I_d$ ($x \in I_d$, $y \in Q_d$) и $S_{N,M}(x,y) \xrightarrow{\rho} S(x,y)$, то для любой последовательности $\{\Delta_{k,l}\}$, основной для точки (x,y), выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Psi(\Delta_{n,n}) - \frac{1}{2}\Psi(\Delta_{n-1,n})}{|\Delta_{n,n}|} = 0 \tag{6}$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\Psi(\Delta_{n,n}) - \frac{1}{2}\Psi(\Delta_{n,n-1})}{|\Delta_{n,n}|} = 0 \text{ соответственно}\right). \tag{7}$$

Доказательство. Будем доказывать формулу (6) (формула (7) доказывается аналогично), причем для "правой" основной последовательности (для "левой" — аналогично).

Пусть $[a]$ означает целую часть числа a. Рассмотрим частичные суммы

$$S_{2^k+[2^k x]+1,\ 2^k+[2^k y]+1}(x,y), \quad S_{2^k+[2^k x],\ 2^k+[2^k y]+1}(x,y). \tag{8}$$

В силу (5) обе частичные суммы ρ-регулярны при больших k. Покажем это на примере второй частичной суммы. Действительно, с одной стороны, при достаточно больших k

$$\frac{2^k + [2^k x]}{2^k + [2^k y] + 1} > \frac{2^k(1+x) - 1}{2^k(1+y) + 1} > \rho,$$

а с другой стороны,

$$\frac{2^k + [2^k x]}{2^k + [2^k y] + 1} < \frac{2^k(1+x)}{2^k(1+y)} < \frac{1}{\rho}$$

(поскольку x и y удовлетворяют условию (5)).

Так как ряд Хаара сходится ρ-регулярно к конечной сумме в точке (x,y), то обе частичные суммы в (8) стремятся при $k \to \infty$ к одному и тому же числу, а их разность стремится к нулю. Но эта разность равна (при достаточно малом $\varepsilon > 0$)

$$\sum_{i=1}^{2^k+[2^k y]+1} \varphi_{2^k+[2^k x]+1,\, i}(x,y) = C \sum_{i=1}^{2^k+[2^k y]+1} \varphi_{2^k+[2^k x]+1,\, i}(x+\varepsilon,y) =$$
$$= C(S_{2^{k+1},\, 2^k+[2^k y]+1}(x+\varepsilon,y) - S_{2^k,\, 2^k+[2^k y]+1}(x+\varepsilon,y)) =$$
$$= C(S_{2^{k+1},\, 2^{k+1}}(x+\varepsilon,y) - S_{2^k,\, 2^{k+1}}(x+\varepsilon,y)) = C\left(\frac{\Psi(\Delta_{k+1,k+1})}{|\Delta_{k+1,k+1}|} - \frac{\Psi(\Delta_{k,k+1})}{|\Delta_{k,k+1}|}\right) =$$
$$= \frac{C}{2|\Delta_{k+1,k+1}|}\left(\Psi(\Delta_{k+1,k+1}) - \frac{1}{2}\Psi(\Delta_{k,k+1})\right),$$

где C равно 1 или 1/2. Отсюда следует формула (6). В последней выкладке использована формула (4). □

Утверждение 3. *Пусть для координат точки (x,y) выполнено условие (5). Если $x,y \in Q_d$ и $S_{N,M}(x,y) \xrightarrow{\rho} S(x,y)$, то для любой последовательности $\{\Delta_{k,l}\}$, основной для точки (x,y), выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Psi(\Delta_{n,n}) - \frac{1}{2}\Psi(\Delta_{n-1,n}) - \frac{1}{2}\Psi(\Delta_{n,n-1}) + \frac{1}{4}\Psi(\Delta_{n-1,n-1})}{|\Delta_{n,n}|} = 0. \tag{9}$$

Доказательство проведем для "правой верхней" основной последовательности (для всех остальных — аналогично). Так как ряд Хаара сходится ρ-регулярно к конечной сумме в точке (x,y), то к одному и тому же пределу при $k \to \infty$ стремятся выражения $S_{2^k+[2^k x]+i,\ 2^k+[2^k y]+j}(x,y)$ $(i,j = 0,1)$ (как и в утверждении 2, можно показать, что указанные частичные суммы являются

ρ-регулярными). Значит, к нулю стремится выражение $\sum\limits_{i,j=0}^{1}(-1)^{i+j}S_{2^k+[2^kx]+i,\ 2^k+[2^ky]+j}(x,y)$. Но при достаточно малых $\varepsilon>0$ это выражение равно

$$\varphi_{2^k+[2^kx]+1,\ 2^k+[2^ky]+1}(x,y)=C\varphi_{2^k+[2^kx]+1,\ 2^k+[2^ky]+1}(x+\varepsilon,y+\varepsilon)=$$
$$=C\sum_{i,j=0}^{1}(-1)^{i+j}S_{2^{k+1-i},\ 2^{k+1-j}}(x+\varepsilon,y+\varepsilon)=C\sum_{i,j=0}^{1}(-1)^{i+j}\frac{\Psi(\Delta_{k+1-i,k+1-j})}{|\Delta_{k+1-i,k+1-j}|}=$$
$$=\frac{C}{|\Delta_{k+1,k+1}|}\sum_{i,j=0}^{1}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{i+j}\Psi(\Delta_{k+1-i,k+1-j}),$$

где C равно 1, 1/2 или 1/4. Отсюда следует формула (9). В последней выкладке использована формула (4). $\square$

Был изучен случай, когда координаты точки (x,y) удовлетворяют условию (5). Рассмотрим другие случаи и получим формулы, подобные формулам (6), (7) и (9).

Пусть для координат точки (x,y) выполняется условие

$$\frac{1+x}{1+y}<\frac{1}{2\rho}. \tag{10}$$

Найдем условия, необходимые для сходимости ряда (1) в точках, удовлетворяющих условию (10).

Утверждение 4. *Если $x,y\in I_d$ и для точки (x,y) выполнено условие* (10)*, то для ρ-регулярной сходимости ряда* (1) *к сумме $S(x,y)$ в точке (x,y) необходимо выполнение условия*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Psi(\Delta_{n+1,n})}{|\Delta_{n+1,n}|}=S(x,y). \tag{11}$$

Доказательство очевидно, если заметить, что при достаточно больших k последовательность $S_{2^k+[2^kx]+1,\ 2^{k-1}+[2^{k-1}y]+1}(x,y)$ является ρ-регулярной, т. к. при $k\to\infty$

$$1>\frac{2^{k-1}+[2^{k-1}y]+1}{2^k+[2^kx]+1}\to\frac{2^{k-1}(1+y)}{2^k(1+x)}=\frac{1+y}{2(1+x)}>\rho.$$

Тогда

$$S(x,y)=\lim_{k\to\infty}S_{2^k+[2^kx]+1,\ 2^{k-1}+[2^{k-1}y]+1}(x,y)=\lim_{k\to\infty}S_{2^{k+1},\ 2^k}(x,y)=\lim_{k\to\infty}\frac{\Psi(\Delta_{k+1,k})}{|\Delta_{k+1,k}|},$$

что и доказывает формулу (11). $\square$

Утверждение 5. *Пусть для координат точки (x,y) выполнено условие* (10)*. Если $x\in Q_d$, $y\in I_d$ ($x\in I_d$, $y\in Q_d$) и $S_{N,M}(x,y)\xrightarrow{\rho}S(x,y)$, то для любой последовательности $\{\Delta_{k,l}\}$, основной для точки (x,y), выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Psi(\Delta_{n+1,n})-\frac{1}{2}\Psi(\Delta_{n,n})}{|\Delta_{n+1,n}|}=0 \tag{12}$$

$$\Bigg(\lim_{n\to\infty}\frac{\Psi(\Delta_{n+1,n})-\frac{1}{2}\Psi(\Delta_{n+1,n-1})}{|\Delta_{n+1,n}|}=0\ \textit{соответственно}\Bigg). \tag{13}$$

Доказательство проведем для "правой" основной последовательности (12).

Рассмотрим частичные суммы

$$S_{2^{k+1}+[2^{k+1}x]+1,\,2^k+[2^ky]+1}(x,y),\qquad S_{2^{k+1}+[2^{k+1}x],\,2^k+[2^ky]+1}(x,y). \tag{14}$$

Так же, как в предыдущем утверждении, показывается, что при больших k частичные суммы в формуле (14) являются ρ-регулярными, а т. к. ряд Хаара сходится ρ-регулярно к конечной сумме в точке (x,y), то обе частичные суммы в формуле (14) стремятся при $k\to\infty$ к одному и тому же числу, а их разность стремится к нулю. Подобно тому, как это делалось в утверждении 2, показывается, что эта разность равна

$$\frac{C}{2|\Delta_{k+2,k+1}|}\left(\Psi(\Delta_{k+2,k+1})-\frac{1}{2}\Psi(\Delta_{k+1,k+1})\right)$$

(где C равно 1 или 1/2), откуда следует формула (12). Формула (13) доказывается аналогично. $\square$

Утверждение 6. *Пусть для координат точки (x,y) выполнено условие* (10). *Если $x,y\in Q_d$ и $S_{N,M}(x,y)\xrightarrow{\rho}S(x,y)$, то для любой последовательности $\{\Delta_{k,l}\}$, основной для точки (x,y), выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Psi(\Delta_{n+1,n})-\frac{1}{2}\Psi(\Delta_{n,n})-\frac{1}{2}\Psi(\Delta_{n+1,n-1})+\frac{1}{4}\Psi(\Delta_{n,n-1})}{|\Delta_{n+1,n}|}=0. \tag{15}$$

Доказательство равенства (15) проведем для “правой верхней” основной последовательности (для всех остальных – аналогично). Заметим, что для любых $i,j=0,1$ и $k\to\infty$ имеет место цепочка сооотношений

$$1>\frac{2^k+[2^ky]+j}{2^{k+1}+[2^{k+1}x]+i}\to\frac{1+y}{2(1+x)}>\rho.$$

Следовательно, частичные суммы $S_{2^{k+1}+[2^{k+1}x]+i,\ 2^k+[2^ky]+j}(x,y)$ являются ρ-регулярными при больших k, а выражение $\sum\limits_{i,j=0}^{1}(-1)^{i+j}S_{2^{k+1}+[2^{k+1}x]+i,\ 2^k+[2^ky]+j}(x,y)$ стремится к нулю при $k\to\infty$. Можно показать, подобно тому, как делалось в доказательстве утверждения 3, что последнее выражение равно

$$\frac{C}{|\Delta_{k+2,k+1}|}\sum_{i,j=0}^{1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{i+j}\Psi(\Delta_{k+2-i,k+1-j}),$$

где C равно 1, 1/2 или 1/4, откуда следует формула (15). $\square$

Следующие три утверждения представляют собой необходимые условия ρ-регулярной сходимости ряда (1) в точке (x,y), для координат которой выполнено условие

$$\frac{1+x}{1+y}>2\rho. \tag{16}$$

Доказательство этих утверждений аналогично доказательству утверждений 4–6 (фактически координаты точки (x,y) при переходе от утверждений 4–6 к утверждениям 7–9 просто поменяются ролями).

Утверждение 7. *Если $x,y\in I_d$ и для точки (x,y) выполнено условие* (16), *то для ρ-регулярной сходимости ряда* (1) *к сумме $S(x,y)$ в точке (x,y) необходимо выполнение условия $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\Psi(\Delta_{n,n+1})}{|\Delta_{n,n+1}|}=S(x,y)$.*

Утверждение 8. *Пусть для координат точки (x,y) выполнено условие* (16). *Если $x\in Q_d$, $y\in I_d$ (соответственно $x\in I_d$, $y\in Q_d$ или $x,y\in Q_d$) и $S_{N,M}(x,y)\xrightarrow{\rho}S(x,y)$, то для любой последовательности $\{\Delta_{k,l}\}$, основной для точки (x,y), выполняется одно из условий*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Psi(\Delta_{n,n+1})-\frac{1}{2}\Psi(\Delta_{n-1,n+1})}{|\Delta_{n,n+1}|}=0, \tag{17}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Psi(\Delta_{n,n+1})-\frac{1}{2}\Psi(\Delta_{n,n})}{|\Delta_{n,n+1}|}=0 \tag{18}$$

или

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Psi(\Delta_{n,n+1})-\frac{1}{2}\Psi(\Delta_{n-1,n+1})-\frac{1}{2}\Psi(\Delta_{n,n})+\frac{1}{4}\Psi(\Delta_{n-1,n})}{|\Delta_{n,n+1}|}=0 \tag{19}$$

соответственно.

Перейдем к доказательству основных результатов работы.

Теорема 1. *Пусть число ρ выбрано так, что $\rho \in (0, \sqrt{2}/2)$, аддитивная функция двоичного интервала $\Phi(\Delta)$ удовлетворяет следующим условиям (здесь $\{\Delta_{n,m}\}$ — любая из основных для соответствующей точки последовательностей двоичных интервалов):*

1) *если $x, y \in I_d$ и для точки (x, y) при заданном ρ выполняется условие (5), то* $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{\Phi(\Delta_{n,n})}{|\Delta_{n,n}|} \geq 0$;
2) *если $x, y \in I_d$ и для точки (x, y) при заданном ρ выполняется условие (10), то* $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{\Phi(\Delta_{n+1,n})}{|\Delta_{n+1,n}|} \geq 0$;
3) *если $x, y \in I_d$ и для точки (x, y) при заданном ρ выполняется условие (16), то* $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{\Phi(\Delta_{n,n+1})}{|\Delta_{n,n+1}|} \geq 0$;
4) *если $x \in Q_d$, $y \in I_d$ и для точки (x, y) при заданном ρ выполняется условие (5) (соответственно условия (10) или (16)), то для функции $\Phi(\Delta)$ имеет место равенство (6) ((12) или (17) соответственно);*
5) *если $x \in I_d$, $y \in Q_d$ и для точки (x, y) при заданном ρ выполняется условие (5) (соответственно условия (10) или (16)), то для функции $\Phi(\Delta)$ имеет место равенство (7) ((13) или (18) соответственно);*
6) *если $x, y \in Q_d$ и для точки (x, y) при заданном ρ выполняется условие (5) (соответственно условия (10) или (16)), то для функции $\Phi(\Delta)$ имеет место равенство (9) ((15) или (19) соответственно).*

Тогда $\Phi(\Delta) \geq 0$ для любого двоичного интервала Δ.

Доказательство. Пусть U_1 — множество точек квадрата $[0,1]^2$, удовлетворяющих условию (5), а U_2 и U_3 — аналогичные множества точек, удовлетворяющих условиям (10) и (16) соответственно. Так как $\rho < \sqrt{2}/2$, то множество U_1 имеет непустое пересечение как с U_2, так и с U_3. Более того, несложно показать, что множества U_i $(i = 1, 2, 3)$ образуют открытое (в топологии $[0,1]^2$) покрытие единичного квадрата. Из этого свойства с помощью элементарных геометрических соображений легко доказывается, что двоичный интервал Δ можно разбить на конечное число неперекрывающихся двоичных квадратов, каждый из которых полностью лежит по крайней мере в одном из множеств U_i.

Предположим тогда, что утверждение теоремы не является верным и найдется двоичный интервал Δ_0, для которого $\Phi(\Delta_0) < 0$. Разбив Δ_0 на конечное число двоичных квадратов, каждый из которых полностью лежит в некотором U_i, получим с учетом аддитивности, что по крайней мере на одном из них функция Φ принимает отрицательное значение. Поэтому с самого начала можно считать Δ_0 двоичным квадратом.

Если $\Delta_0 \subset U_1$, то, дословно повторяя рассуждения теоремы 1 из работы [5], найдем такую точку $(x, y) \in \Delta_0$, что для некоторой последовательности, основной для этой точки, не выполняется одно из условий 1, 4, 5 или 6 нашей теоремы.

Пусть $\Delta_0 \subset U_2$. Если ранг Δ_0 равен (n_0, n_0), то Δ_0 можно разбить на два неперекрывающихся двоичных интервала ранга $(n_0 + 1, n_0)$, на одном из которых (назовем его Δ_0') функция Φ в силу своей аддитивности принимает отрицательное значение. Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, что $\Phi_1(\Delta_0') < 0$, где по определению $\Phi_1(\Delta) = \Phi(\Delta) + \varepsilon|\Delta|$.

Дальнейшее доказательство снова практически дословно повторяет доказательство теоремы 1 из [5]. Повторяя процесс в указанном доказательстве, индукционно можно построить вложенную последовательность двоичных интервалов $\{I_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ ранга $(n+1, n)$ (а не квадратов, как в упомянутой теореме 1 из [4], и это единственное различие) таких, что $\Phi_1(I_n) < 0$. При этом $I_n \to (x, y)$, где либо $x, y \in Q_d$, причем для функции $\Phi_1(\Delta)$, а значит, и для функции $\Phi(\Delta)$, в точке (x, y) не выполняется равенство (15); либо $x \in I_d$, $y \in Q_d$, причем для функции $\Phi_1(\Delta)$, а значит, и для функции $\Phi(\Delta)$, в точке (x, y) не выполняется равенство (13); либо $x \in Q_d$,

$y \in I_d$, причем для функции $\Phi_1(\Delta)$, а значит, и для функции $\Phi(\Delta)$, в точке (x, y) не выполняется равенство (12); либо, наконец, $x, y \in I_d$ и для функции $\Phi_1(\Delta)$ имеет место неравенство $\underline{\lim}_{n\to\infty} \Phi_1(\Delta_{n+1,n})/|\Delta_{n+1,n}| \leq 0$. Тогда

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\Phi(\Delta_{n+1,n})}{|\Delta_{n+1,n}|} = \underline{\lim}_{n\to\infty} (\Phi_1(\Delta_{n+1,n}) - \varepsilon|\Delta_{n+1,n}|)/|\Delta_{n+1,n}| \leq 0 - \varepsilon = -\varepsilon < 0,$$

и не выполняется условие 2 теоремы.

Аналогично предыдущему разбирается случай, когда $\Delta_0 \subset U_3$. В любом случае приходим к противоречию, доказывающему теорему. $\square$

Теоремы, подобные доказанной, в теории обобщенных интегралов обычно называются "теоремами о монотонности" (примеры таких теорем см., напр., в [6], с. 20; [9], с. 453). Они позволяют строить достаточно общие интегралы. Один такой интеграл сейчас построим.

Определение. Пусть заданы функция $f(x, y) : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ и число $\rho \in (0, \sqrt{2}/2)$. Назовем функцию $f(x, y)$ (P_d^ρ)-интегрируемой на $[0, 1]^2$, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют аддитивные функции двоичного интервала $F_1(\Delta)$ и $F_2(\Delta)$ (называемые часто мажорантой и минорантой, соответственно) со следующими свойствами:

1. если $x, y \in I_d$ и для точки (x, y) выполняется условие (5), то $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{F_1(\Delta_{n,n})}{|\Delta_{n,n}|} \geq f(x, y) \geq \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{F_2(\Delta_{n,n})}{|\Delta_{n,n}|}$;
2. если $x, y \in I_d$ и для точки (x, y) выполняется условие (10), то $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{F_1(\Delta_{n+1,n})}{|\Delta_{n+1,n}|} \geq f(x, y) \geq \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{F_2(\Delta_{n+1,n})}{|\Delta_{n+1,n}|}$;
3. если $x, y \in I_d$ и для точки (x, y) выполняется условие (16), то $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{F_1(\Delta_{n,n+1})}{|\Delta_{n,n+1}|} \geq f(x, y) \geq \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{F_2(\Delta_{n,n+1})}{|\Delta_{n,n+1}|}$;
4. если $x \in Q_d$, $y \in I_d$ и для точки (x, y) выполняется условие (5), (10) или (16), то для функций $F_i(\Delta)$, $i = 1, 2$, и для любой последовательности $\{\Delta_{n,m}\}$, основной для точки (x, y), выполняется равенство (6) (равенства (12) и (17) соответственно);
5. если $x \in I_d$, $y \in Q_d$ и для точки (x, y) выполняется условие (5), (10) или (16), то для функций $F_i(\Delta)$, $i = 1, 2$, и для любой последовательности $\{\Delta_{n,m}\}$, основной для точки (x, y), выполняется равенство (7) (равенства (13) и (18) соответственно);
6. если $x, y \in Q_d$ и для точки (x, y) выполняется условие (5), (10) или (16), то для функций $F_i(\Delta)$, $i = 1, 2$, и для любой последовательности $\{\Delta_{n,m}\}$, основной для точки (x, y), выполняется равенство (9) (равенства (15) и (19) соответственно);
7. $F_1([0, 1]^2) - F_2([0, 1]^2) < \varepsilon$,

где (P_d^ρ)-интеграл (ρ-регулярный двоичный интеграл перроновского типа) по любому двоичному интервалу Δ от функции $f(x, y)$ определен как $(P_d^\rho) \int_\Delta f(x, y) dx\, dy = \inf_{F_1} F_1(\Delta) = \sup_{F_2} F_2(\Delta)$.

При этом теорема 1, примененная к функции $\Phi(\Delta) = F_1(\Delta) - F_2(\Delta)$, гарантирует, что при выполнении условия (7) данного определения имеет место равенство $\inf_{F_1} F_1(\Delta) = \sup_{F_2} F_2(\Delta)$.

Построенный интеграл позволяет сформулировать следующую теорему единственности для двумерных рядов Хаара.

Теорема 2. *Пусть число ρ такое, что $0 < \rho < \sqrt{2}/2$ и пусть ряд (1) сходится ρ-регулярно всюду на единичном квадрате к конечной функции $S(x, y)$. Тогда функция $S(x, y)$ является (P_d^ρ)-интегрируемой и ряд (1) является рядом Фурье своей суммы относительно (P_d^ρ)-интеграла, т. е. коэффициенты этого ряда восстанавливаются по формулам Фурье*

$$a_{n,m} = (P_d^\rho) \int_{[0,1]^2} S(x, y) \chi_{n,m}(x, y) dx\, dy. \tag{20}$$

Доказательство. Пусть $\Psi(\Delta)$ — функция двоичного интервала, построенная для данного ряда (1) по формуле (3). Для доказательства (P_d^ρ)-интегрируемости функции $S(x,y)$ положим для любого $\varepsilon > 0$ в определении (P_d^ρ)-интеграла $F_1(\Delta) = F_2(\Delta) \equiv \Psi(\Delta)$.

По условию ряд (1) сходится в любой точке $(x,y) \in [0,1]^2$ к конечной сумме. Поэтому, если $x, y \in I_d$, то в силу утверждений 1, 4 и 7 для функций F_1 и F_2 выполнены первые три условия из определения (P_d^ρ)-интеграла. Если $x, y \in Q_d$, то в силу утверждений 3, 6 и 8 для функций F_1 и F_2 выполнено условие 6 из определения (P_d^ρ)-интеграла. Если же $x \in Q_d$, $y \in I_d$ ($x \in I_d$, $y \in Q_d$ соответственно), то в силу утверждений 2, 5 и 8 для функций F_1 и F_2 выполнено условие 4 (условие 5) из определения (P_d^ρ)-интеграла. Последнее условие данного определения очевидно выполняется, т.к. $F_1(\Delta) \equiv F_2(\Delta)$. Таким образом, доказана (P_d^ρ)-интегрируемость функции $S(x,y)$.

Имеют место следующие неравенства: $(P_d^\rho)\int\limits_\Delta S(x,y)dx\,dy = \sup\limits_{F_2} F_2(\Delta) \geq \Psi(\Delta) \geq \inf\limits_{F_1} F_1(\Delta) = (P_d^\rho)\int\limits_\Delta S(x,y)dx\,dy$. Следовательно, $(P_d^\rho)\int\limits_\Delta S(x,y)dx\,dy = \Psi(\Delta)$.

Доказательство второй части теоремы (т.е. формулы (20)) дословно повторяет доказательство второго утверждения теоремы 2 работы [5] (эта часть доказательства никак не зависит от ρ). $\square$

Таким образом, из теоремы 2 и результатов работы [7] следует, что единственность рядов (1) при ρ-регулярной сходимости имеет место при $\rho < \sqrt{2}/2$ и не имеет места при $\rho \in (\sqrt{2}/2, 1]$. Здесь не рассматривался вопрос, имеет ли место единственность для рядов (1), если $\rho = \sqrt{2}/2$.

Литература

1. Алексич Г. *Проблемы сходимости ортогональных рядов.* – М.: Ин. лит., 1963. – 360 с.
2. Ульянов П.Л. *О рядах по системе Хаара* // Матем. сб. – 1964. – Т. 63. – Вып. 3. – С. 356–391.
3. Мовсисян Х.О. *О единственности двойных рядов по системам Хаара и Уолша* // Изв. АН АрмССР, сер. матем. – 1974. – Т. 9. – № 1. – С. 40–61.
4. Скворцов В.А. *О множествах единственности для многомерных рядов Хаара* // Матем. заметки. – 1973. – Т. 14. – № 6. – С. 789–798.
5. Плотников М.Г. *О единственности всюду сходящихся кратных рядов Хаара* // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. – 2001. – № 1. – С. 23–28.
6. Ostaszewski K.M. *Henstock integration in the plane* // Mem. Amer. Math. Soc. – 1986. – V. 63. – № 353. – P. 1–106.
7. Плотников М.Г. *О нарушении единственности для двумерных рядов Хаара* // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. – 2003. – № 4. – С. 20–24.
8. Скворцов В.А., Талалян А.А. *Некоторые вопросы единственности кратных рядов по системе Хаара и тригонометрической системе* // Матем. заметки. – 1973. – Т. 13. – № 3. – С. 104–113.
9. Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной.* – СПб.: Лань, 1999. – 560 с.

Вологодская государственная молочнохозяйственная академия

Поступила 29.10.2004