И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2006 МАТЕМАТИКА № 7 (530)

УДК 517.518

Д.В. КУРДОМОНОВ

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ–ЛЕЖАНДРА ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

1. Введение

Рассмотрим ряды по многочленам Лежандра $P_n(x)$ на отрезке $[-1,1]$, нормированным условием $P_n(1)=1$. Пусть $f(x)$ – функция ограниченной вариации на этом отрезке и $S_n(f,x)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k(f)P_k(x)$ — частная сумма ее ряда Фурье–Лежандра порядка n, т. е. коэффициенты Фурье $f(x)$ имеют вид $a_k(f)=\int\limits_{-1}^{1}(k+\frac{1}{2})f(t)P_k(t)dt$. Для частной суммы ряда Фурье–Лежандра порядка n имеет место представление

$$S_n(f,x)=\int_{-1}^{1} f(t)K_n(x,t)dt,$$

где по формуле Кристофеля–Дарбу ([1], с. 361)

$$K_n(x,t)=\sum_{j=0}^{n}\Big(j+\frac{1}{2}\Big)P_j(x)P_j(t)=\frac{n+1}{2}\Big(\frac{P_{n+1}(x)P_n(t)-P_{n+1}(t)P_n(x)}{x-t}\Big).$$

Пусть далее всюду считаем, что для функции $f(x)$ выполнено условие $f(x)=\frac{1}{2}\big(f(x+0)+f(x-0)\big)$.

Известно ([2], с. 319), что для функции $f(x)$, имеющей ограниченную вариацию на отрезке $[-1,1]$, ряд Фурье–Лежандра сходится в каждой точке $x\in(-1,1)$ к значению $f(x)$.

Обозначим через $V(f,[\alpha,\beta])$ полную вариацию функции $f(x)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$, а через C — абсолютные положительные постоянные, в разных случаях различные. Числовые множители во всех оценках с O-символами являются абсолютными постоянными.

В случае, когда $f(x)$ — 2π-периодическая функция ограниченной вариации и $s_n(f,x)$ — частная сумма ее ряда Фурье по тригонометрической системе, в [3] доказана

Теорема А. *Пусть $f(x)$ — 2π-периодическая функция ограниченной вариации и*

$$h_x(t):=f(x+t)+f(x-t)-2f(x),\quad t\in[0,\pi].$$

Тогда для последовательности частных сумм ряда Фурье $f(x)$ по тригонометрической системе $s_n(f,x)$, справедлива оценка

$$|f(x)-s_n(f,x)|\leqslant\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}V\Big(h_x,\Big[0,\frac{\pi}{k}\Big]\Big). \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00787) и программы “Ведущие научные школы” (проект НШ-1549.2003.1).

Введем обозначение

$$g_x(t)=\begin{cases} f(t)-f(x-0), & -1\leqslant t<x;\\ 0, & t=x;\\ f(t)-f(x+0), & x<t\leqslant 1.\end{cases}$$

Заметим, что функция $g_x(t)$ непрерывна в точке $t=x$.

Для рядов Фурье–Лежандра в [4] получен следующий аналог оценки (1).

Теорема B. *Пусть $f(x)$ — функция ограниченной вариации на отрезке $[-1,1]$. Тогда для $x\in(-1,1)$ и $n\geqslant 2$ имеет место оценка*

$$|f(x)-S_n(f,x)|\leqslant \frac{28(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{n}\sum_{k=1}^{n}V\left(g_x,\left[x-\frac{1+x}{k},x+\frac{1-x}{k}\right]\right)+ \\ +\frac{(1-x^2)^{-1}}{\pi n}|f(x+0)-f(x-0)|.$$

Пусть последовательность натуральных чисел $n_1=1<n_2<\ldots$ удовлетворяет условию

$$\sum_{j=m}^{\infty}\frac{1}{n_j}\leqslant\frac{A}{n_m},\quad m=1,2,\ldots,\tag{2}$$

где $A>1$ — абсолютная постоянная. Это условие равносильно возможности представить последовательность $\{n_j\}$ в виде объединения конечного числа лакунарных последовательностей ([5], с. 24).

Для тригонометрического случая в [6] получено следующее усиление теоремы A.

Теорема C. *Пусть $f(x)$ — 2π-периодическая функция ограниченной вариации, а последовательность $\{n_j\}$ удовлетворяет условию (2). Тогда для всех n и x справедлива оценка*

$$|f(x)-s_n(f,x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\sum_{k=n+1}^{n_i-1}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right|+\sum_{j=i}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right|\leqslant\frac{CA}{n}\sum_{k=1}^{n}V\left(h_x,\left[0,\frac{\pi}{k}\right]\right),$$

где $n_{i-1}\leqslant n<n_i$ и A — множитель из оценки (2).

Цель данной работы — получить аналогичное усиление теоремы B для рядов Фурье–Лежандра.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[-1,1]$, а последовательность $\{n_j\}$ удовлетворяет условию (2). Тогда для $x\in(-1,1)$ и $n\geqslant 2$ справедливо неравенство*

$$|f(x)-S_n(f,x)|\leqslant\left|\sum_{k=n+1}^{n_i-1}a_k(f)P_k(x)\right|+\sum_{j=i}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}a_k(f)P_k(x)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{CA(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{n}\sum_{k=1}^{n}V\left(g_x,\left[x-\frac{1+x}{k},x+\frac{1-x}{k}\right]\right)+\frac{CA(1-x^2)^{-1}}{n}|f(x+0)-f(x-0)|,$$

где $n_{i-1}\leqslant n<n_i$ и A — множитель из оценки (2).

2. Свойства многочленов Лежандра

В этом параграфе приведены свойства многочленов Лежандра, которые будут далее использоваться.

Лемма 1 ([4], лемма 3). *Для $x \in (-1,1)$ и $n \geqslant 2$ имеют место оценки*
1) *если $-1 \leqslant t < x$, то*

$$\left| \int_{-1}^{t} K_n(x,\tau)d\tau \right| \leqslant \frac{6}{n(x-t)}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

2) *если $-1 < x < t \leqslant 1$, то*

$$\left| \int_{t}^{1} K_n(x,\tau)d\tau \right| \leqslant \frac{6}{n(t-x)}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Теорема D. *Для многочленов Лежандра при $n \geqslant 2$ верно следующее асимптотическое представление*:

$$P_n(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}\sqrt{\sin\theta}}\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \Phi_n(\theta), \tag{3}$$

где $0 < \theta < \pi$ и остаточный член допускает оценку

$$|\Phi_n(\theta)| \leqslant \frac{C}{n^{\frac{3}{2}}(\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}. \tag{4}$$

Это утверждение представляет собой частный случай асимптотической формулы Стилтьеса для многочленов Лежандра ([7], с. 145), где в качестве множителя перед косинусом в главном члене (3) фигурирует $\frac{4(2n)!!}{\pi(2n+1)!!}\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\sin\theta}}$. Оценка (3) вытекает отсюда, т. к. $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} + O(n^{-\frac{3}{2}})$. Действительно, известно ([8], с. 406), что

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \sqrt{\pi n}e^{\frac{\alpha_n}{n}}, \quad \text{где} \quad |\alpha_n| < C.$$

Следовательно,

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{\sqrt{\pi n}}{2n+1}(1+O(n^{-1})) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} + O(n^{-\frac{3}{2}}).$$

Теорема E ([9]). *Пусть последовательность $\{n_j\}$ удовлетворяет условию* (2) *и A — константа из условия* (2). *Тогда для всех x справедлива оценка*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant CA.$$

Точно так же можно доказать следующую оценку.

Лемма 2. *Пусть последовательность $\{n_j\}$ удовлетворяет условию* (2) *и A — константа из условия* (2). *Тогда для всех x имеет место оценка*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})x}{k}\right| \leqslant CA.$$

Для ряда по косинусам справедлива

Лемма 3. *Пусть последовательность $\{n_j\}$ удовлетворяет условию* (2), *тогда для $x\in(0,2\pi)$*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\frac{\cos(k+\frac{1}{2})x}{k}\right| \leqslant \frac{CA}{x(2\pi-x)}.$$

Доказательство. Обозначим $\widehat{D}_n(x)=\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x$. Тогда

$$\widehat{D}_n(x)=\frac{\sin\frac{x}{2}-\sin x+\sin(n+1)x}{2\sin\frac{x}{2}}. \tag{5}$$

Для оценки $|\widehat{D}_n(x)|$ сверху оценим снизу функцию $\sin\frac{x}{2}$. Для $x\in[0,\pi]$ $\sin\frac{x}{2}\geqslant\frac{x}{\pi}\geqslant\frac{x(2\pi-x)}{2\pi^2}$. Так как функции $\sin\frac{x}{2}$ и $\frac{x(2\pi-x)}{2\pi^2}$ четны относительно точки π, то неравенство

$$\sin\frac{x}{2}\geqslant\frac{x(2\pi-x)}{2\pi^2} \tag{6}$$

справедливо и на $[\pi,2\pi]$. Из (5) и (6) следует $|\widehat{D}_n(x)|\leqslant\frac{3}{2\sin\frac{x}{2}}\leqslant\frac{3\pi^2}{x(2\pi-x)}$, $0<x<2\pi$. Отсюда с помощью преобразования Абеля получаем

$$\left|\sum_{k=p}^{q}\frac{\cos(k+\frac{1}{2})x}{k}\right|\leqslant\frac{C}{x(2\pi-x)p},\quad\text{где}\quad 1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty. \tag{7}$$

Поэтому из (7) и свойств последовательности $\{n_j\}$ следует

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\frac{\cos(k+\frac{1}{2})x}{k}\right|\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\frac{C}{n_jx(2\pi-x)}\leqslant\frac{CA}{x(2\pi-x)}.\quad\square$$

Теорема 2. *Пусть* $x,t\in(-1,1)$ *и* $x=\cos\theta$, $t=\cos\gamma$, *где* $\theta,\gamma\in(0,\pi)$ *и* $n\geqslant 2$. *Тогда для многочленов Лежандра* P_n *справедлива оценка*

$$P_n(x)(P_{n-1}(t)-P_{n+1}(t))=\frac{2\sqrt{\sin\gamma}}{n\pi\sqrt{\sin\theta}}\left(\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\gamma-\theta)\right)-\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\gamma+\theta)\right)\right)+ \\ +O(n^{-2}(\sin\gamma\sin\theta)^{-\frac{3}{2}}). \tag{8}$$

Доказательство. Сначала оценим разность $P_{n-1}(t)-P_{n+1}(t)$, используя теорему D. Имеем

$$P_{n-1}(t)-P_{n+1}(t)=P_{n-1}(\cos\gamma)-P_{n+1}(\cos\gamma)= \\ =\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(n-1)}\sqrt{\sin\gamma}}\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\gamma-\frac{\pi}{4}\right)+\Phi_{n-1}(\gamma)- \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(n+1)}\sqrt{\sin\gamma}}\cos\left(\left(n+\frac{3}{2}\right)\gamma-\frac{\pi}{4}\right)-\Phi_{n+1}(\gamma).$$

Тогда согласно (4)

$$P_{n-1}(t)-P_{n+1}(t)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\sin\gamma}}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\gamma-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\cos\left(\left(n+\frac{3}{2}\right)\gamma-\frac{\pi}{4}\right)\right)+ \\ +O(n^{-\frac{3}{2}}(\sin\gamma)^{-\frac{3}{2}})=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{\sin\gamma}}{\sqrt{\pi n}}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma-\frac{\pi}{4}\right)+O(n^{-\frac{3}{2}}(\sin\gamma)^{-\frac{3}{2}}). \tag{9}$$

Пользуясь оценкой (9) и теоремой D, оценим произведение

$$\begin{aligned}
P_n(x)(P_{n-1}(t)-P_{n+1}(t)) &= P_n(\cos\theta)(P_{n-1}(\cos\gamma)-P_{n+1}(\cos\gamma)) = \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}\sqrt{\sin\theta}}\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right)+O(n^{-\frac{3}{2}}(\sin\theta)^{-\frac{3}{2}})\right)\times \\
&\times\left(\frac{2\sqrt{2}\sqrt{\sin\gamma}}{\sqrt{\pi n}}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma-\frac{\pi}{4}\right)+O(n^{-\frac{3}{2}}(\sin\gamma)^{-\frac{3}{2}})\right) = \\
&= \frac{4\sqrt{\sin\gamma}}{\pi n\sqrt{\sin\theta}}\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma-\frac{\pi}{4}\right)+O(n^{-2}(\sin\gamma\sin\theta)^{-\frac{3}{2}}).
\end{aligned}$$

Для завершения доказательства надо применить формулу произведения тригонометрических функций. $\square$

Лемма 4. *Пусть $x,t\in(-1,1)$ и последовательность $\{n_j\}$ удовлетворяет условию* (2). *Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}P_k(x)(P_{k-1}(t)-P_{k+1}(t))\right|\leqslant\frac{CA}{(1-t^2)^{\frac{3}{4}}(1-x^2)^{\frac{3}{4}}},$$

где A — множитель из оценки (2).

Доказательство. Из теоремы 2 имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}P_k(x)(P_{k-1}(t)-P_{k+1}(t))\right| = \\
&\quad=\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\frac{2\sqrt{\sin\gamma}}{k\pi\sqrt{\sin\theta}}\left(\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)(\gamma-\theta)\right)-\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)(\gamma+\theta)\right)\right)+\right. \\
&\quad\left.+O(k^{-2}(\sin\gamma\sin\theta)^{-\frac{3}{2}})\right|\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\frac{2}{k\pi\sqrt{\sin\theta}}\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)(\gamma-\theta)\right)\right|+ \\
&\quad+\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\frac{2}{k\pi\sqrt{\sin\theta}}\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)(\gamma+\theta)\right)\right|+O\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\frac{1}{k^2(\sin\gamma\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}\right|\right).
\end{aligned}\tag{10}$$

Оценим каждую сумму отдельно. Пользуясь леммой 2 и свойством (2), находим

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\frac{2}{k\pi\sqrt{\sin\theta}}\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)(\gamma-\theta)\right)\right|\leqslant \\
&\qquad\leqslant\frac{C}{\sqrt{\sin\theta}}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\frac{\sin\left((k+\frac{1}{2})(\gamma-\theta)\right)}{k}\right|\leqslant\frac{CA}{\sqrt{\sin\theta}}.
\end{aligned}\tag{11}$$

Далее, по лемме 3

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\frac{2}{k\pi\sqrt{\sin\theta}}\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)(\gamma+\theta)\right)\right|\leqslant \\
&\qquad\leqslant\frac{C}{\sqrt{\sin\theta}}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\frac{\cos\left((k+\frac{1}{2})(\gamma+\theta)\right)}{k}\right|\leqslant\frac{CA}{\sqrt{\sin\theta}(\gamma+\theta)(2\pi-(\gamma+\theta))}.
\end{aligned}\tag{12}$$

И, наконец,

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\frac{1}{k^2(\sin\gamma\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}\right|\leqslant\frac{C}{(\sin\gamma\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}. \tag{13}$$

Из оценок (10)–(13) получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}P_k(x)(P_{k-1}(t)-P_{k+1}(t))\right|\leqslant\frac{CA}{(\sin\gamma\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}+\frac{CA}{(\gamma+\theta)(2\pi-(\gamma+\theta))\sqrt{\sin\theta}}. \tag{14}$$

Для оценки последнего слагаемого рассмотрим два случая:

1) $\gamma+\theta<\pi$, тогда

$$\frac{CA}{\sqrt{\sin\theta}(\gamma+\theta)(2\pi-(\gamma+\theta))}<\frac{CA}{\sqrt{\sin\theta}(\gamma+\theta)\pi}\leqslant\frac{CA}{\theta\sqrt{\sin\theta}}\leqslant\frac{CA}{(\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}; \tag{15}$$

2) $\gamma+\theta\geqslant\pi$, в этом случае

$$\frac{CA}{\sqrt{\sin\theta}(\gamma+\theta)(2\pi-(\gamma+\theta))}\leqslant\frac{CA}{\sqrt{\sin\theta}\pi(2\pi-\gamma-\theta)}\leqslant\frac{CA}{\sqrt{\sin\theta}(\pi-\theta)}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{CA}{\sqrt{\sin\theta}\sin(\pi-\theta)}=\frac{CA}{(\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}. \tag{16}$$

Следовательно, из (14)–(16) получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}P_k(x)(P_{k-1}(t)-P_{k+1}(t))\right|\leqslant\frac{CA}{(\sin\gamma\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

и, переходя к x и t, имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}P_k(x)(P_{k-1}(t)-P_{k+1}(t))\right|\leqslant\frac{CA}{(1-t^2)^{\frac{3}{4}}(1-x^2)^{\frac{3}{4}}}. \quad \square$$

Лемма 5. *Пусть $x\in(-1,1)$, тогда для $n\geqslant 2$ имеют место оценки*

1) $\left(1-\left(x+\frac{1-x}{n}\right)^2\right)^{-1}\leqslant C(1-x^2)^{-1}$,

2) $\left(1-\left(x-\frac{1+x}{n}\right)^2\right)^{-1}\leqslant C(1-x^2)^{-1}$,

3) *если $t\in[x-\frac{1+x}{n},x+\frac{1-x}{n}]$, то $(1-t^2)^{-1}\leqslant C(1-x^2)^{-1}$.*

Доказательство. 1) Имеем

$$\frac{1}{1-\left(x+\frac{1-x}{n}\right)^2}=\frac{1}{\left(1-x-\frac{1-x}{n}\right)\left(1+x+\frac{1-x}{n}\right)}=\frac{n^2}{(n-1-x(n-1))(n+1+x(n-1))}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{n^2}{(n-1)(1-x)(n-1)(1+x)}=\frac{n^2}{(n-1)^2(1-x^2)}.$$

Осталось только воспользоваться оценкой $\frac{n}{n-1}\leqslant 2$.

Доказательство оценки 2) аналогично.

3) Рассмотрим два случая:

а) если $0\leqslant x<1$, то $t^2\leqslant\left(x+\frac{1-x}{n}\right)^2$ и $\frac{1}{1-t^2}\leqslant\frac{1}{1-\left(x+\frac{1-x}{n}\right)^2}\leqslant\frac{C}{1-x^2}$ согласно 1);

б) если $-1<x<0$, то $t^2\leqslant\left(x-\frac{1+x}{n}\right)^2$ и $\frac{1}{1-t^2}\leqslant\frac{1}{1-\left(x-\frac{1+x}{n}\right)^2}\leqslant\frac{C}{1-x^2}$ согласно 2). $\square$

Лемма 6. *Пусть $x \in (-1,1)$ и $P_n(x)$ — многочлены Лежандра, тогда*

$$1)\quad |P_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}},$$

$$2)\quad \int_x^1 K_n(x,t)dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}P_n(x)P_{n+1}(x),$$

$$3)\quad \int_{-1}^x K_n(x,t)dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P_n(x)P_{n+1}(x).$$

Доказательство этих утверждений имеется в ([4], лемма 1).

3. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{j=i}^{\infty}\Big|\sum\limits_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k(f)P_k(x)\Big|$. Сначала преобразуем внутреннюю сумму

$$\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k(f)P_k(x) = \int_{-1}^1 f(t)\Big(\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\Big(k+\frac{1}{2}\Big)P_k(t)P_k(x)\Big)dt =$$
$$= \int_{-1}^1 f(t)(K_{n_{j+1}-1}(x,t) - K_{n_j-1}(x,t))dt. \quad (17)$$

Обозначим $K(x,t;n_j) := K_{n_{j+1}-1}(x,t) - K_{n_j-1}(x,t)$. Выполним в интеграле из (17) переход к функции $g_x(t)$

$$\int_{-1}^1 f(t)K(x,t;n_j)dt = \int_{-1}^x (f(t)-f(x-0))K(x,t;n_j)dt + \int_x^1 (f(t)-f(x+0))K(x,t;n_j)dt +$$
$$+ f(x-0)\int_{-1}^x K(x,t;n_j)dt + f(x+0)\int_x^1 K(x,t;n_j)dt =$$
$$= \int_{-1}^1 g_x(t)K(x,t;n_j)dt + f(x-0)\int_{-1}^x K(x,t;n_j)dt + f(x+0)\int_x^1 K(x,t;n_j)dt. \quad (18)$$

Используя утверждения 2) и 3) леммы 6 и обозначая $P(x;n_j) := P_{n_{j+1}-1}(x)P_{n_{j+1}}(x) - P_{n_j-1}(x)P_{n_j}(x)$, имеем

$$\int_{-1}^x K(x,t;n_j)dt = \frac{1}{2}P(x;n_j), \quad (19)$$

$$\int_x^1 K(x,t;n_j)dt = -\frac{1}{2}P(x;n_j). \quad (20)$$

Из (18)–(20) получаем

$$\int_{-1}^1 f(t)K(x,t;n_j)dt = \int_{-1}^1 g_x(t)K(x,t;n_j)dt + \frac{1}{2}(f(x-0)-f(x+0))P(x;n_j). \quad (21)$$

Оценим последнее слагаемое из правой части (21). Для этого сначала оценим разность, используя утверждение 1) леммы 6,

$$|P(x;n_j)| \leqslant \frac{C(1-x^2)^{-1}}{n_j}. \quad (22)$$

Из (22) и определения последовательности $\{n_j\}$ получаем

$$\frac{1}{2}\sum_{j=i}^{\infty}|(f(x+0)-f(x-0))P(x;n_j)| \leqslant$$

$$\leqslant C|f(x+0)-f(x-0)|\sum_{j=i}^{\infty}\frac{(1-x^2)^{-1}}{n_j} \leqslant \frac{AC(1-x^2)^{-1}}{n_i}|f(x+0)-f(x-0)|. \quad (23)$$

Поэтому из (17), (21) и (23) следует

$$\sum_{j=i}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}a_k(f)P_k(x)\right| \leqslant \sum_{j=i}^{\infty}\left|\int_{-1}^{1}g_x(t)K(x,t;n_j)dt\right| + \frac{CA(1-x^2)^{-1}}{n_i}|f(x+0)-f(x-0)|. \quad (24)$$

Преобразуем интеграл из (24). Для этого разобьем промежуток интегрирования на три отрезка: $[-1, x-\frac{1+x}{n_i}]$, $[x-\frac{1+x}{n_i}, x+\frac{1-x}{n_i}]$ и $[x+\frac{1-x}{n_i}, 1]$. Введем обозначения

$$L_{n_i}(x) := \sum_{j=i}^{\infty}\left|\int_{-1}^{x-\frac{1+x}{n_i}}g_x(t)K(x,t;n_j)dt\right|$$

и $M_{n_i}(x), N_{n_i}(x)$ — аналогичные величины, когда интегралы берутся по оставшимся двум отрезкам соответственно. Тогда

$$\sum_{j=i}^{\infty}\left|\int_{-1}^{1}g_x(t)K(x,t;n_j)dt\right| \leqslant L_{n_i}(x)+M_{n_i}(x)+N_{n_i}(x). \quad (25)$$

Начнем с оценки $L_{n_i}(x)$. Обозначим $y := x-\frac{1+x}{n_i}$ и положим $\lambda_n(x,t) := \int\limits_{-1}^{t}K_n(x,\tau)d\tau$. Заметим, что $\lambda_n(x,-1)=0$. Обозначив $\lambda(x,t;n_j) := \lambda_{n_{j+1}-1}(x,t)-\lambda_{n_j-1}(x,t)$, имеем

$$\int_{-1}^{y}g_x(t)K(x,t;n_j)dt = \int_{-1}^{y}g_x(t)d_t\lambda(x,t;n_j) = g_x(t)\lambda(x,t;n_j)\Big|_{t=-1}^{y} - \int_{-1}^{y}\lambda(x,t;n_j)d_tg_x(t) =$$

$$= g_x(y)\lambda(x,y;n_j) - \int_{-1}^{y}\lambda(x,t;n_j)d_tg_x(t). \quad (26)$$

Согласно лемме 1

$$|\lambda(x,t;n_j)| \leqslant \frac{6(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{(n_j-1)(x-t)} + \frac{6(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{(n_{j+1}-1)(x-t)} \leqslant \frac{C(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{n_j(x-t)}. \quad (27)$$

Поэтому

$$|\lambda(x,y;n_j)| \leqslant \frac{C(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{n_j(x-y)} = \frac{C(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{n_j(x-(x-\frac{1+x}{n_i}))} = \frac{C(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}n_i}{n_j(1+x)}.$$

Так как по определению $g_x(x)=0$, то $|g_x(y)| = |g_x(y)-g_x(x)| \leqslant V(g_x,[x,y])$. Отсюда

$$|g_x(y)\lambda(x,y;n_j)| \leqslant V\left(g_x,\left[x,x-\frac{1+x}{n_i}\right]\right)\frac{C(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}n_i}{n_j(1+x)}. \quad (28)$$

Используя (28) и свойства последовательности $\{n_j\}$, оценим ряд

$$\sum_{j=i}^{\infty}|g_x(y)\lambda(x,y;n_j)| \leqslant V\left(g_x,\left[x,x-\frac{1+x}{n_i}\right]\right)\sum_{j=i}^{\infty}\frac{C(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}n_i}{n_j(1+x)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{CA(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{1+x}V\left(g_x,\left[x,x-\frac{1+x}{n_i}\right]\right). \quad (29)$$

Следовательно, из (26) и (29) получаем

$$L_{n_i}(x) \leqslant \sum_{j=i}^{\infty} \left| \int_{-1}^{y} \lambda(x,t;n_j) d_t g_x(t) \right| + \frac{CA(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{(1+x)} V\left(g_x, \left[x, x - \frac{(1+x)}{n_i}\right]\right). \tag{30}$$

Оценим первую сумму из правой части (30)

$$\sum_{j=i}^{\infty} \left| \int_{-1}^{y} \lambda(x,t;n_j) d_t g_x(t) \right| \leqslant \sum_{j=i}^{\infty} \int_{-1}^{y} |\lambda(x,t;n_j)| d_t V(g_x, [-1,t]). \tag{31}$$

Используя аддитивность вариации функции на отрезке, находим

$$d_t V(g_x, [-1,t]) = d_t V(g_x, [-1,x]) - d_t V(g_x, [t,x]) = d_t(-V(g_x, [t,x])). \tag{32}$$

Следовательно, из (31), (27) и (32) вытекает

$$\sum_{j=i}^{\infty} \left| \int_{-1}^{y} \lambda(x,t;n_j) d_t g_x(t) \right| \leqslant \sum_{j=i}^{\infty} \int_{-1}^{y} \frac{C(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{n_j(x-t)} d_t(-V(g_x,[t,x])) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{CA(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{n_i} \int_{-1}^{y} \frac{1}{x-t} d_t(-V(g_x,[t,x])). \tag{33}$$

Последний интеграл оценим, следуя рассуждениям из [4]:

$$\int_{-1}^{x-\frac{1+x}{n_i}} \frac{1}{x-t} d_t(-V(g_x,[t,x])) = -V(g_x,[t,x]) \frac{1}{x-t}\Big|_{t=-1}^{x-\frac{1+x}{n_i}} + \int_{-1}^{x-\frac{1+x}{n_i}} V(g_x,[t,x]) \frac{dt}{(x-t)^2} =$$
$$= -V\left(g_x, \left[x - \frac{1+x}{n_i}, x\right]\right) \frac{1}{x - x + \frac{1+x}{n_i}} + V(g_x,[-1,x]) \frac{1}{1+x} + \int_{-1}^{x-\frac{1+x}{n_i}} V(g_x,[t,x]) \frac{dt}{(x-t)^2} \leqslant$$
$$\leqslant V(g_x,[-1,x]) \frac{1}{1+x} + \int_{-1}^{x-\frac{1+x}{n_i}} V(g_x,[t,x]) \frac{dt}{(x-t)^2}. \tag{34}$$

Сделаем в последнем интеграле замену $t = x - \frac{1+x}{T}$. Тогда $T = \frac{1+x}{x-t}$ и, следовательно,

$$\int_{-1}^{x-\frac{1+x}{n_i}} V(g_x,[t,x]) \frac{dt}{(x-t)^2} = \int_{1}^{n_i} V\left(g_x, \left[x - \frac{1+x}{T}, x\right]\right) \frac{d_T(x - \frac{1+x}{T})}{\frac{(1+x^2)^2}{T^2}} =$$
$$= \int_{1}^{n_i} V\left(g_x, \left[x - \frac{1+x}{T}, x\right]\right) \frac{\frac{1+x}{T^2} dT}{\frac{(1+x)^2}{T^2}} = \frac{1}{1+x} \int_{1}^{n_i} V\left(g_x, \left[x - \frac{1+x}{T}, x\right]\right) dT.$$

Поэтому

$$\int_{-1}^{x-\frac{1+x}{n_i}} V(g_x,[t,x]) \frac{dt}{(x-t)^2} \leqslant \frac{1}{1+x} \sum_{k=1}^{n_i-1} V\left(g_x, \left[x - \frac{1+x}{k}, x\right]\right). \tag{35}$$

Из (33)–(35) получаем

$$\sum_{j=i}^{\infty} \left| \int_{-1}^{y} \lambda(x,t;n_j) d_t g_x(t) \right| \leqslant \frac{CA(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{n_i(1+x)} \left(V(g_x,[-1,x]) + \sum_{k=1}^{n_i-1} V\left(g_x, \left[x - \frac{1+x}{k}, x\right]\right) \right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{CA(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{(1+x)n_i} \sum_{k=1}^{n_i-1} V\left(g_x, \left[x - \frac{1+x}{k}, x\right]\right).$$

А так как $\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{1+x} \leqslant (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(1-x) \leqslant 2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$, то

$$\sum_{j=i}^{\infty}\left|\int_{-1}^{y}\lambda(x,t;n_j)d_tg_x(t)\right| \leqslant \frac{CA(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i-1}V\left(g_x,\left[x-\frac{1+x}{k},x\right]\right). \tag{36}$$

Следовательно, из (30) и (36) вытекает оценка

$$L_{n_i}(x) \leqslant \frac{CA(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i-1}V\left(g_x,\left[x-\frac{1+x}{k},x\right]\right)+CA(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}V\left(g_x,\left[x-\frac{1+x}{n_i},x\right]\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{CA(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}V\left(g_x,\left[x-\frac{1+x}{k},x\right]\right). \tag{37}$$

Оценка для $N_{n_i}(x)$ доказывается аналогично. Рассмотрим интеграл $\int\limits_t^1 K_n(x,\tau)d\tau$ и воспользуемся утверждением 2) леммы 1. Тогда получим

$$N_{n_i}(x) \leqslant \frac{CA(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}V\left(g_x,\left[x,x+\frac{1-x}{n_i}\right]\right). \tag{38}$$

Осталось оценить величину $M_{n_i}(x)$, где

$$M_{n_i}(x)=\sum_{j=i}^{\infty}\left|\int_{x-\frac{1+x}{n_i}}^{x+\frac{1-x}{n_i}}g_x(t)K(x,t;n_j)dt\right|=\sum_{j=i}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\int_{x-\frac{1+x}{n_i}}^{x+\frac{1-x}{n_i}}\left(k+\frac{1}{2}\right)g_x(t)P_k(x)P_k(t)dt\right|.$$

Преобразуем выражение под знаком модуля, используя рекуррентное соотношение для многочленов Лежандра ([2], с. 37) $P_k(x)=\frac{1}{2k+1}(P'_{k+1}(x)-P'_{k-1}(x))$. Поэтому для $k=1,2,\ldots$ имеем

$$\int_{x-\frac{1+x}{n_i}}^{x+\frac{1-x}{n_i}}\left(k+\frac{1}{2}\right)P_k(x)P_k(t)g_x(t)dt=\frac{1}{2}P_k(x)\int_{x-\frac{1+x}{n_i}}^{x+\frac{1-x}{n_i}}g_x(t)d(P_{k+1}(t)-P_{k-1}(t))=$$
$$=\frac{1}{2}P_k(x)\left(g_x(t)(P_{k+1}(t)-P_{k-1}(t))\Big|_{t=x-\frac{1+x}{n_i}}^{x+\frac{1-x}{n_i}}-\int_{x-\frac{1+x}{n_i}}^{x+\frac{1-x}{n_i}}(P_{k+1}(t)-P_{k-1}(t))d_tg_x(t)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}P_k(x)\left[g_x\left(x+\frac{1-x}{n_i}\right)\left(P_{k+1}\left(x+\frac{1-x}{n_i}\right)-P_{k-1}\left(x+\frac{1-x}{n_i}\right)\right)+\right.$$
$$\left.+g_x\left(x-\frac{1+x}{n_i}\right)\left(P_{k-1}\left(x-\frac{1+x}{n_i}\right)-P_{k+1}\left(x-\frac{1+x}{n_i}\right)\right)+\int_{x-\frac{1+x}{n_i}}^{x+\frac{1-x}{n_i}}(P_{k-1}(t)-P_{k+1}(t))d_tg_x(t)\right].$$

Таким образом,

$$M_{n_i}(x) \leqslant \frac{1}{2}\left|g_x\left(x+\frac{1-x}{n_i}\right)\right|\sum_{j=i}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}P_k(x)\left(P_{k+1}\left(x+\frac{1-x}{n_i}\right)-P_{k-1}\left(x+\frac{1-x}{n_i}\right)\right)\right|+$$
$$+\frac{1}{2}\left|g_x\left(x-\frac{1+x}{n_i}\right)\right|\sum_{j=i}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}P_k(x)\left(P_{k-1}\left(x-\frac{1+x}{n_i}\right)-P_{k+1}\left(x-\frac{1+x}{n_i}\right)\right)\right|+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j=i}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\int_{x-\frac{1+x}{n_i}}^{x+\frac{1-x}{n_i}}P_k(x)(P_{k-1}(t)-P_{k+1}(t))d_tg_x(t)\right|=M_1^*(x)+M_2^*(x)+M_3^*(x). \tag{39}$$

В силу лемм 4 и 5 имеем

$$M_1^*(x) \leqslant \left| g_x\left(x + \frac{1-x}{n_i}\right) - g_x(x) \right| \frac{CA}{(1-(x+\frac{1-x}{n_i})^2)^{\frac{3}{4}}(1-x^2)^{\frac{3}{4}}} \leqslant$$

$$\leqslant V\left(g_x, \left[x, x + \frac{1-x}{n_i}\right]\right) CA(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}. \quad (40)$$

Аналогично, для $M_2^*(x)$ справедлива оценка

$$M_2^*(x) \leqslant V\left(g_x, \left[x - \frac{1+x}{n_i}, x\right]\right) CA(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}. \quad (41)$$

Осталось оценить $M_3^*(x)$. Имеем

$$M_3^*(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=i}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \int_{x-\frac{1+x}{n_i}}^{x+\frac{1-x}{n_i}} P_k(x)(P_{k-1}(t) - P_{k+1}(t)) d_t g_x(t) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int_{x-\frac{1+x}{n_i}}^{x+\frac{1-x}{n_i}} \sum_{j=i}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} P_k(x)(P_{k-1}(t) - P_{k+1}(t)) \right| d_t V\left(g_x, \left[x - \frac{1+x}{n_i}, t\right]\right).$$

Отсюда согласно лемме 4 получаем

$$M_3^*(x) \leqslant \int_{x-\frac{1+x}{n_i}}^{x+\frac{1-x}{n_i}} \frac{CA}{(1-t^2)^{\frac{3}{4}}(1-x^2)^{\frac{3}{4}}} d_t V\left(g_x, \left[x - \frac{1+x}{n_i}, t\right]\right).$$

Далее в силу леммы 5 имеем

$$M_3^*(x) \leqslant \int_{x-\frac{1+x}{n_i}}^{x+\frac{1-x}{n_i}} \frac{CA}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} d_t V\left(g_x, \left[x - \frac{1+x}{n_i}, t\right]\right) =$$

$$= \frac{CA}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} V\left(g_x, \left[x - \frac{1+x}{n_i}, x + \frac{1-x}{n_i}\right]\right). \quad (42)$$

В итоге из оценок (39)–(42) следует

$$M_{n_i}(x) \leqslant CA(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} V\left(g_x, \left[x, x + \frac{1-x}{n_i}\right]\right) + CA(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} V\left(g_x, \left[x - \frac{1+x}{n_i}, x\right]\right) +$$

$$+ CA(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} V\left(g_x, \left[x - \frac{1+x}{n_i}, x + \frac{1-x}{n_i}\right]\right) \leqslant$$

$$\leqslant CA(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} V\left(g_x, \left[x - \frac{1+x}{n_i}, x + \frac{1-x}{n_i}\right]\right). \quad (43)$$

Так как

$$V\left(g_x, \left[x - \frac{1+x}{n_i}, x + \frac{1-x}{n_i}\right]\right) \leqslant \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} V\left(g_x, \left[x - \frac{1+x}{k}, x + \frac{1-x}{k}\right]\right),$$

то из (24), (25), (37), (38) и (43) находим

$$\sum_{j=i}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k(f) P_k(x) \right| \leqslant \frac{CA(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} V\left(g_x, \left[x - \frac{1+x}{k}, x + \frac{1-x}{k}\right]\right) +$$

$$+ \frac{CA(1-x^2)^{-1}}{n_i} |f(x+0) - f(x-0)|. \quad (44)$$

Таким образом, если число $n+1$ входит в последовательность $\{n_j\}$, то теорема доказана. Если же $n+1$ не входит в последовательность $\{n_j\}$, то для оценки выражения

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n_i-1} a_k(f)P_k(x)\right| + \sum_{j=i}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k(f)P_k(x)\right| \tag{45}$$

добавим $n+1$ в последовательность $\{n_j\}$. Для полученной последовательности выполняется условие (2), если A заменить в нем на $2A$. Тогда в силу (44) выражение (45) оценивается суммой

$$\frac{CA(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} V\left(g_x, \left[x-\frac{1+x}{k}, x+\frac{1-x}{k}\right]\right) + \frac{CA(1-x^2)^{-1}}{n+1}|f(x+0)-f(x-0)|. \quad \square$$

Литература

1. Натансон И.П. *Конструктивная теория функций.* – М.–Л.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.
2. Гобсон Е.В. *Теория сферических и эллипсоидальных функций.* – М.: Ин. лит., 1952. – 476 с.
3. Bojanic R. *An estimate of the rate of convergence for Fourier series of functions of bounded variation* // Publications de l'institut mathématique (Beograd). – 1979. – V. 26(40). – P. 57–60.
4. Bojanic R., Vuilleumier M. *On the rate of convergence of Fourier–Legendre series of functions of bounded variation* // J. Approx. Theory. – 1981. – V. 31. – P. 67–79.
5. Бари Н.К. *Тригонометрические ряды.* – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
6. Теляковский С.А. *О скорости сходимости рядов Фурье функций ограниченной вариации* // Матем. заметки. – 2002. – Т. 72. – С. 949–953.
7. Суетин П.К. *Классические ортогональные многочлены.* – М.: Наука, 1979. – 416 с.
8. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т. II. – М.: Наука, 1970. – 800 с.
9. Теляковский С.А. *О частных суммах рядов Фурье функций ограниченной вариации* // Тр. МИАН. – 1997. – Т. 219. – С. 378—386.

Московский государственный университет

Поступила 05.11.2004