ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 3 (478)

УДК 512.532

В.У. ФЕРНАНДЕШ

НОВЫЙ КЛАСС ДЕЛИТЕЛЕЙ ПОЛУГРУПП ИЗОТОННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ КОНЕЧНЫХ ЦЕПЕЙ

Введение

В 1987 г. на международном коллоквиуме по теории полугрупп в Сегеде Ж.-Э. Пэн поставил проблему *эффективного* описания псевдомногообразия полугрупп $\boldsymbol{O}$, порожденного всеми полугруппами изотонных всюду определенных преобразований конечных цепей, т. е. нахождения алгоритма, который определял бы, принадлежит ли данная конечная полугруппа этому псевдомногообразию. Сколько-нибудь заметные продвижения по этой проблеме начались только с 1995 г. Сначала П.М. Хиггинс [1] доказал, что псевдомногообразие $\boldsymbol{O}$ самодуально и содержит не все $\mathcal{R}$-тривиальные полугруппы (таким образом, $\boldsymbol{O}$ строго меньше, чем $\boldsymbol{A}$, псевдомногообразие всех конечных апериодических полугрупп), хотя каждая конечная связка принадлежит $\boldsymbol{O}$. Последний результат Хиггинса был обобщен в [2], где было показано, что каждая конечная полугруппа, идемпотенты которой образуют идеал, лежит в $\boldsymbol{O}$. В [3] доказано, что псевдомногообразие $\boldsymbol{POI}$, порожденное всеми полугруппами инъективных изотонных частичных преобразований конечных цепей, является (собственным) подпсевдомногообразием в $\boldsymbol{O}$. С другой стороны, в [4] показано, что интервал $[\boldsymbol{O}, \boldsymbol{A}]$ решетки всех псевдомногообразий полугрупп имеет мощность континуума, а недавно в [5] было установлено, что $\boldsymbol{O}$ не конечно базируемо и, более того, всякое псевдомногообразие полугрупп $\boldsymbol{V}$ такое, что $\boldsymbol{POI} \subseteq \boldsymbol{V} \subseteq \boldsymbol{O} \vee \boldsymbol{R} \vee \boldsymbol{L}$, где $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{L}$ суть соответственно псевдомногообразия всех конечных $\mathcal{R}$-тривиальных полугрупп и всех конечных $\mathcal{L}$-тривиальных полугрупп, не конечно базируемо. Тем не менее, исходная проблема Пэна все еще остается нерешенной.

Цель данной работы — еще одно продвижение в направлении к решению проблемы Пэна. А именно, будет доказано, что $\boldsymbol{O}$ содержит все полупрямые произведения цепей (рассматриваемых как полурешетки) на полугруппы всех инъективных изотонных частичных преобразований конечных цепей.

1. Предварительные сведения

Используются стандартные понятия и обозначения теории полугрупп из [6]. Однако в данной работе будет удобно обозначать через S^0 *полугруппу, полученную из данной полугруппы* S *присоединением дополнительного нуля*, а не *полугруппу, полученную из* S *присоединением нуля, если в* S *нуля не было* (как определено в [6]), т. е. в предположении, что 0 — символ, не принадлежащий S, S^0 — полугруппа с носителем $S \cup \{0\}$ и умножением, продолжающим умножение в S по правилу $0s = s0 = 00 = 0$ для всех $s \in S$.

Пусть X — множество. Обозначим через $\mathcal{PT}(X)$ моноид всех частичных преобразований X (относительно композиции), через $\mathcal{T}(X)$ — подмоноид в $\mathcal{PT}(X)$, состоящий из всех всюду определенных преобразований X, и через $\mathcal{I}(X)$ — симметрическую инверсную полугруппу на

Работа выполнялась в рамках проекта PRAXIS/2/2.1/MAT/73/94 Центра Алгебры Лиссабонского университета. Частично она была поддержана грантом INVOTAN 9/A/96/PO.

X, т. е. подмоноид в $\mathcal{PT}(X)$, состоящий из всех инъективных частичных преобразований X. Рассмотрим n-элементную цепь X_n, например, $X_n = \{1 < 2 < \cdots < n\}$. Преобразование $s \in \mathcal{PT}(X_n)$ называется *изотонным*, если для любых $x, y \in \mathrm{Dom}(s)$ из $x \leq y$ следует $xs \leq ys$. Обозначим через $\mathcal{PO}_n$ подмоноид в $\mathcal{PT}(X_n)$, состоящий из всех изотонных частичных преобразований, через $\mathcal{O}_n$ — подмоноид в $\mathcal{T}(X_n)$, состоящий из всех изотонных (всюду определенных) преобразований, и через $\mathcal{POI}_n$ — инверсный подмоноид всех изотонных преобразований из $\mathcal{I}(X_n)$.

Нам понадобится следующее описание идеалов и конгруэнций моноида $\mathcal{POI}_n$ (см. [7], предложения 2.3 и 2.6).

Лемма 1.1. *Моноид $\mathcal{POI}_n$ имеет $n+1$ идеал, каждый из которых является главным. Более точно, идеалы в $\mathcal{POI}_n$ суть*

$$\{0\} = I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_n = \mathcal{POI}_n,$$

где $I_k = \{s \in \mathcal{POI}_n \mid 0 \leq |\mathrm{Im}(s)| \leq k\}$ для каждого $k \in \{0, \dots, n\}$. Конгруэнции на $\mathcal{POI}_n$ исчерпываются рисовскими конгруэнциями, соответствующими перечисленным идеалам.

Напомним, что *псевдомногообразие полугрупп* — это класс конечных полугрупп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов подполугрупп и конечных прямых произведений. В данной работе встретятся следующие псевдомногообразия полугрупп:

1. $\boldsymbol{O}$ — псевдомногообразие, порожденное моноидами $\{\mathcal{O}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
2. $\boldsymbol{POI}$ — псевдомногообразие, порожденное моноидами $\{\mathcal{POI}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
3. $\boldsymbol{Sl}$ — псевдомногообразие всех конечных полурешеток;
4. $\boldsymbol{Ecom}$ — псевдомногообразие всех конечных полугрупп с коммутирующими идемпотентами;
5. $\boldsymbol{J}$ — псевдомногообразие всех конечных $\mathcal{J}$-тривиальных полугрупп.

Назовем *n-арным псевдословом* отображение π, сопоставляющее каждой конечной полугруппе S n-арную функцию $\pi_S : S^n \to S$ на S, перестановочную с произвольным гомоморфизмом $f : S \to T$ между конечными полугруппами в том смысле, что $f(\pi_S(s_1, \dots, s_n)) = \pi_T(f(s_1), \dots, f(s_n))$ для всех $s_1, \dots, s_n \in S$. Псевдослова называют еще *неявными операциями*. Хорошо известный и простой, но весьма важный пример псевдослова доставляет унарная функция $x \mapsto x^\omega$, которая на произвольной конечной полугруппе S сопоставляет каждому элементу $s \in S$ идемпотент циклической подполугруппы, порожденной s. *Псевдотождеством* от n переменных называется формальное равенство между n-арными псевдословами, скажем, $\pi = \rho$. Говорят, что конечная полугруппа S *удовлетворяет* такому псевдотождеству, если $\pi_S = \rho_S$. Класс конечных полугрупп $\boldsymbol{C}$ *удовлетворяет* $\pi = \rho$, если этому псевдотождеству удовлетворяет каждая полугруппа из $\boldsymbol{C}$. Дальнейшие детали читатель сможет найти в [8].

Напомним теперь одну классическую конструкцию и докажем три леммы, которые понадобятся в следующем параграфе.

Пусть S и T — две полугруппы и

$$\begin{array}{rcllcl} \varphi: & T^1 & \to & \mathrm{End}^r(S) & & \\ & t & \mapsto & t\varphi: & S & \to & S \\ & & & & s & \mapsto & (s)t\varphi \end{array}$$

— гомоморфизм моноида T^1 в моноид $\mathrm{End}^r(S)$, антиизоморфный моноиду $\mathrm{End}(S)$ всех эндоморфизмов полугруппы S. Скажем, что гомоморфизм φ определяет (левое) *действие* T на S. Свяжем с этим гомоморфизмом полугруппу $S *_\varphi T$ (именуемую *полупрямым произведением S и T, ассоциированным с φ*), определенную на множестве $S \times T$ с умножением

$$(s_1, t_1)(s_2, t_2) = (s_1((s_2)t_1\varphi), t_1 t_2)$$

для всех $s_1, s_2 \in S$ и $t_1, t_2 \in T$. Обычно элемент $(s)t\varphi$, где $s \in S$ и $t \in T^1$, обозначают просто через $t.s$. В таких обозначениях тот факт, что отображение $\varphi : T^1 \to \mathrm{End}^r(S)$ — гомоморфизм моноидов, означает, что для всех $s_1, s_2 \in S$ и $t_1, t_2 \in T^1$ выполняются следующие условия:

1. $t.(s_1s_2) = (t.s_1)(t.s_2)$;
2. $(t_1t_2).s = t_1.(t_2.s)$;
3. $1.s = s$.

Умножение в $S{*_\varphi}T$ тогда записывается в виде

$$(s_1, t_1)(s_2, t_2) = (s_1(t_1.s_2), t_1t_2)$$

для всех $s_1, s_2 \in S$ и $t_1, t_2 \in T$.

Хотя полугруппа $S{*_\varphi}T$ зависит от специфики гомоморфизма φ, обычно явное указание на φ опускают и обозначают эту полугруппу просто через $S{*}T$.

Пример 1.1. Пусть S и T — две полугруппы. Обозначим через S^{T^1} полугруппу всех отображений из T^1 в S, в которой произведение двух отображений $f, g \in S^{T^1}$ определено на каждом $x \in T^1$ правилом

$$(x)(fg) = (x)f(x)g.$$

Для $t \in T^1$ и $f \in S^{T^1}$ определим отображение $t.f \in S^{T^1}$, полагая

$$(x)(t.f) = (xt)f$$

для каждого $x \in T^1$. Тогда отображение $\varphi : T^1 \to \mathrm{End}^r(S^{T^1})$ такое, что $(f)t\varphi = t.f$ для всех $t \in T^1$ и $f \in S^{T^1}$, будет гомоморфизмом моноидов. Поэтому можно рассмотреть полупрямое произведение $S^{T^1}{*}T$, ассоциированное с φ; оно называется *сплетением* S и T.

Лемма 1.2. *Пусть T — моноид с нулем, в котором $T \setminus \{1\}$ есть подполугруппа, U_1 — подмоноид $\{0, 1\}$ в T и S — полугруппа. Пусть $S{*}T$ — такое полупрямое произведение, что $t.s = 0.s$ для всех $t \in T \setminus \{1\}$ и $s \in S$, и $S{*}U_1$ — полупрямое произведение, ассоциированное с ограничением на U_1 действия T на S. Тогда полугруппа $S{*}T$ вкладывается в $(S{*}U_1) \times T$.*

Доказательство. Пусть отображение $\psi : S{*}T \to (S{*}U_1) \times T$ определено правилом

$$(s, t)\psi = \begin{cases} ((s, 1), 1), & \text{если } t = 1; \\ ((s, 0), t), & \text{если } t \neq 1. \end{cases}$$

Ясно, что ψ инъективно. Покажем, что ψ — гомоморфизм. Возьмем произвольные $(s, t), (r, q) \in S{*}T$. Если $t = 1$, то

$$((s, 1)(r, q))\psi = (s(1.r), q)\psi = (sr, q)\psi = \begin{cases} ((sr, 1), 1), & \text{если } q = 1; \\ ((sr, 0), q), & \text{если } q \neq 1, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} ((s(1.r), 1), 1), & \text{если } q = 1; \\ ((s(1.r), 0), q), & \text{если } q \neq 1, \end{cases} = \begin{cases} ((s, 1), 1)((r, 1), 1), & \text{если } q = 1; \\ ((s, 1), 1)((r, 0), q), & \text{если } q \neq 1, \end{cases} = (s, 1)\psi(r, q)\psi.$$

Если $t \neq 1$, то $tq \neq 1$, откуда

$$((s, t)(r, q))\psi = (s(t.r), tq)\psi = (s(0.r), tq)\psi = ((s(0.r), 0), tq) =$$

$$= \begin{cases} ((s, 0), t)((r, 1), 1), & \text{если } q = 1; \\ ((s, 0), t)((r, 0), q), & \text{если } q \neq 1, \end{cases} = (s, t)\psi(r, q)\psi. \quad \square$$

Ниже будем рассматривать цепи не только как упорядоченные множества, но и как полурешетки (где, как обычно, произведение элементов равно меньшему из них). Отметим, что эндоморфизмы цепи C как полурешетки — это в точности изотонные отображения, т. е. такие отображения $f : C \to C$, что $x \leq y$ влечет $xf \leq yf$ для любых $x, y \in C$. Действительно, если $f \in \mathrm{End}(C)$, то для любых $x, y \in C$ таких, что $x \leq y$, имеем $xy = x$, откуда $xfyf = (xy)f = xf$ и $xf \leq yf$. Обратно, допустим, что отображение $f : C \to C$ изотонно. Тогда, взяв $x, y \in C$, можем без ограничения общности предположить, что $x \le y$, откуда $xf \le yf$ и $(xy)f = xf = xfyf$. Следовательно, $f \in \mathrm{End}(C)$. Поэтому произвольное действие полугруппы T на цепи C сохраняет порядок $\le$ на C, т.е. если $t \in T$ и $x, y \in C$ таковы, что $x \le y$, то $t.x \le t.y$. Разумеется, для конечной цепи C из m элементов моноид $\mathrm{End}(C)$ изоморфен моноиду $\mathcal{O}_m$.

Лемма 1.3. *Пусть C — конечная цепь, T — моноид с нулем, $\varphi : T \to \mathrm{End}^r(C)$ — гомоморфизм моноидов и $C{*}T$ — полупрямое произведение, ассоциированное с φ. Если $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{0, 1\}$ и 0φ отображает по крайней мере два различных элемента C в единицу, то существуют две такие подцепи C_1 и C_2 в C, что $1 < |C_1|, |C_2| < |C|$ и $C{*}T$ вкладывается в $(C_1{*}T) \times (C_2{*}T)^0$ для подходящих полупрямых произведений $C_1{*}T$ и $C_2{*}T$.*

Доказательство. Заметим, прежде всего, что цепь C должна содержать по крайней мере два различных элемента, откуда $0 \ne 1$. Пусть

$$C' = \{x \in C \mid 0.x = 0\} \quad \text{и} \quad C_2 = \{x \in C \mid 0.x = 1\}.$$

Ясно, что C' и C_2 — два непересекающихся интервала цепи C (действительно, если для $x \in C'$ и $y \in C_2$ имеем $y \le x$, то $0.y \le 0.x$, откуда $1 \le 0$, что невозможно; поэтому $x < y$), объединение которых равняется C.

Возьмем $t \in T$ и $x \in C_2$. Если $t.x \in C'$, то $0 = 0.(t.x) = (0t).x = 0.x = 1$, что невозможно; отсюда $t.x \in C_2$. Поэтому гомоморфизм φ индуцирует гомоморфизм моноида T в $\mathrm{End}^r(C_2)$. С другой стороны, возьмем $t \in T$ и $x \in C'$. Если $t.x \in C_2$, то $1 = 0.(t.x) = (0t).x = 0.x = 0$, что опять-таки невозможно; отсюда $t.x \in C'$. Положим $C_1 = C' \cup \{1\}$. Так как $1 \in \mathrm{Im}(0\varphi)$ и отображение 0φ сохраняет порядок, имеем $0.1 = 1$. Тогда и для любого $t \in T$ имеем $t.1 = t.(0.1) = (t0).1 = 0.1 = 1$. Поэтому гомоморфизм φ индуцирует также гомоморфизм моноида T в $\mathrm{End}^r(C_1)$. Рассмотрим полупрямые произведения $C_1{*}T$ и $C_2{*}T$, ассоциированные с этими гомоморфизмами.

Теперь определим отображение $\psi_1 : C{*}T \to C_1{*}T$ правилом

$$(x, t)\psi_1 = \begin{cases} (1, t), & \text{если } x \in C_2; \\ (x, t), & \text{если } x \in C', \end{cases}$$

и отображение $\psi_2 : C{*}T \to (C_2{*}T)^0$ — правилом

$$(x, t)\psi_2 = \begin{cases} (x, t), & \text{если } x \in C_2; \\ 0, & \text{если } x \in C'. \end{cases}$$

Так как элементы подцепи C' предшествуют элементам подцепи C_2 и для всех $x, y \in C$ и $t \in T$ $x(t.y) \in C_2$ тогда и только тогда, когда $x, y \in C_2$ (действительно, $0.(x(t.y)) = (0.x)(0.(t.y)) = (0.x)((0t).y) = (0.x)(0.y)$, откуда $0.(x(t.y)) = 1$ тогда и только тогда, когда $0.x = 1$ и $0.y = 1$), ψ_1 и ψ_2 — гомоморфизмы. Далее, гомоморфизм ψ_1 инъективен на $C' \times T$, а гомоморфизм ψ_2 инъективен на $C_2{*}T$. Поэтому отображение $\psi : C{*}T \to (C_1{*}T) \times (C_2{*}T)^0$, определенное для всех $(x, t) \in C{*}T$ правилом $(x, t)\psi = ((x, t)\psi_1, (x, t)\psi_2)$, является инъективным гомоморфизмом.

Наконец, поскольку C — дизъюнктное объединение C' и C_2, $|C_2| \ge 2$ (по предположению), $|C_1| \ge 2$ (по построению), имеем $|C_i| < |C|$ для $i = 1, 2$. $\square$

Лемма 1.4. *Пусть C — конечная цепь, T — моноид с нулем и $C{*}T$ — полупрямое произведение. Если $0.e = e$ для некоторого $e \in C \setminus \{0, 1\}$, то найдутся две такие подцепи C_1 и C_2 в C, что $1 < |C_1|, |C_2| < |C|$ и $C{*}T$ вкладывается в $(C_1{*}T) \times (C_2{*}T)$ для подходящих полупрямых произведений $C_1{*}T$ и $C_2{*}T$.*

Доказательство. Рассмотрим интервалы

$$C_1 = \{x \in C \mid x \le e\} \quad \text{и} \quad C_2 = \{x \in C \mid e \le x\}$$

в C. Заметим, что в C должно быть по крайней мере три различных элемента, откуда $0 \neq 1$. Более того, поскольку $0, e \in C_1$, $1 \notin C_1$, $e, 1 \in C_2$, $0 \notin C_2$, имеем $1 < |C_i| < |C|$ для $i = 1, 2$. С другой стороны, для любых $t \in T$ и $x \in C_1$ имеем $t.e = t.(0.e) = (t0).e = 0.e = e$, но тогда $t.x \leq t.e = e$, откуда $t.x \in C_1$. Аналогично, $t.x \in C_2$ для всех $t \in T$ и $x \in C_2$. Поэтому имеется естественное действие T на C_1 и на C_2. Пусть $C_1{*}T$ и $C_2{*}T$ — полупрямые произведения, ассоциированные с этими действиями.

Определим отображение ψ_1 из $C{*}T$ в $C_1{*}T$, полагая $(x,t)\psi_1 = (xe, t)$ для всех $(x,t) \in C{*}T$. Пусть $(x,t), (y,q) \in C{*}T$. Тогда

$$\begin{aligned}((x,t)(y,q))\psi_1 = (x(t.y), tq)\psi_1 = (x(t.y)e, tq) = (xe(t.y)e, tq) = (xe(t.y)(t.e), tq) = \\ = (xe(t.(ye)), tq) = (xe,t)(ye,q) = (x,t)\psi_1(y,q)\psi_1.\end{aligned}$$

Следовательно, ψ_1 — гомоморфизм. С другой стороны, определим отображение ψ_2 из $C{*}T$ в $C_2{*}T$, полагая

$$(x,t)\psi_2 = \begin{cases} (e,t), & \text{если } x \in C_1; \\ (x,t), & \text{если } x \in C_2, \end{cases}$$

для всех $(x,t) \in C{*}T$. Поскольку $x(t.y) \in C_2$ тогда и только тогда, когда $x, y \in C_2$, видим, что и ψ_2 — гомоморфизм. Так как ограничения ψ_1 на $C_1{\times}T$ и ψ_2 на $C_2{\times}T$ — тождественные отображения, отображение $\psi : C{*}T \to (C_1{*}T) \times (C_2{*}T)$, определенное правилом $(x,t)\psi = ((x,t)\psi_1, (x,t)\psi_2)$ для всех $(x,t) \in C{*}T$, инъективно и также является гомоморфизмом. Это и влечет требуемый результат. $\square$

2. Основной результат

Сформулируем наш основной результат.

Теорема 2.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, C — цепь, $\varphi : \mathcal{POI}_n \to \mathrm{End}^r(C)$ — гомоморфизм моноидов и $C{*}\mathcal{POI}_n$ — полупрямое произведение, ассоциированное с φ. Тогда $C * \mathcal{POI}_n \in \boldsymbol{O}$.*

Отметим, что этот результат обобщает основную теорему из [3], которая утверждает, что $\boldsymbol{POI} \subset \boldsymbol{O}$.

Следующий пример, контрастирующий с теоремой 2.1, показывает, что $\boldsymbol{Sl} * \boldsymbol{POI}$ не содержится в $\boldsymbol{O}$.

Пример 2.1. Пусть $U_1 = \{0, 1\}$ — двухэлементная полурешетка и S — сплетение U_1 с $\mathcal{POI}_2$. Тогда S не удовлетворяет псевдотождеству $x^\omega y (xy^2)^\omega = x^\omega (xy^2)^\omega$. Действительно,

$$\mathcal{POI}_2 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 0,\ aba = a,\ bab = b \rangle = \{0, a, b, ab, ba, 1\}$$

(см. [7], пример 3.1), и полагая

$$s = \begin{pmatrix} 0 & a & b & ab & ba & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad t = \begin{pmatrix} 0 & a & b & ab & ba & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

можно прямым вычислением убедиться, что $x = (s, ba)$ и $y = (t, b)$ — такие элементы S, что $x^\omega y (xy^2)^\omega \neq x^\omega (xy^2)^\omega$. С другой стороны, рассматриваемое псевдотождество выполнено в $\boldsymbol{O}$ (см. [4], предложение 2.3). Следовательно, $S \in \boldsymbol{Sl} * \boldsymbol{POI}$ и $S \notin \boldsymbol{O}$.

Приступим к доказательству теоремы 2.1, для чего сначала докажем некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 2.1. *Пусть C — цепь и $\varphi : \mathcal{POI}_n \to \mathrm{End}^r(C)$ — гомоморфизм моноидов. Если $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{0, 1\}$, причем $(x)0\varphi = 0$ для всех $x \in C \setminus \{1\}$, или $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{0\}$, или $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{1\}$, то $t\varphi = 0\varphi$ для всех $t \in \mathcal{POI}_n \setminus \{1\}$.*

Доказательство. Если $|C| = 1$ или $n = 1$, то лемма, очевидно, верна. Пусть $|C| \geq 2$ и $n \geq 2$. Заметим, прежде всего, что для любых идемпотентов e и f в $\mathcal{POI}_n$ таких, что $e \leq f$, $e\varphi$ и $f\varphi$ — идемпотенты в $\mathrm{End}^r(C)$ и $\mathrm{Im}(e\varphi) \subseteq \mathrm{Im}(f\varphi)$. Далее, по лемме 1.1 ядро φ есть рисовская конгруэнция, соответствующая идеалу I_k всех элементов из $\mathcal{POI}_n$ ранга, меньшего либо равного k, для некоторого $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Предположим, что $k < n - 1$. Тогда гомоморфизм φ инъективен на множестве J_{k+1} всех элементов ранга $k+1$, которое образует $\mathcal{J}$-класс в $\mathcal{POI}_n$ (см. [3] или [7]), и в J_{k+1} есть по крайней мере два различных идемпотента e и f. Следовательно, $e\varphi \neq f\varphi$, $e\varphi, f\varphi \neq 0\varphi$ и $(ef)\varphi = 0\varphi$, поскольку ранг ef меньше либо равен k.

Теперь рассмотрим по отдельности три случая, указанные в формулировке леммы.

Допустим сначала, что $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{0, 1\}$, причем $(x)0\varphi = 0$ для всех $x \in C \setminus \{1\}$. Заметим, что в этом случае $(1)0\varphi = 1$. Следовательно, $(x)t\varphi \neq 1$ для любых $t \in \mathcal{POI}_n$ и $x \in C \setminus \{1\}$ (в противном случае получаем противоречие $0 = (x)0\varphi = (x)(0t)\varphi = (x)(t\varphi 0\varphi) = ((x)t\varphi)0\varphi = (1)0\varphi = 1$). Отсюда для всех $t \in \mathcal{POI}_n$ таких, что $\mathrm{Im}(t\varphi) = \{0, 1\}$, имеем $t\varphi = 0\varphi$. Поэтому $\{0, 1\} \subset \mathrm{Im}(e\varphi)$ и $\{0, 1\} \subset \mathrm{Im}(f\varphi)$, в силу чего найдутся такие $x, y \in C \setminus \{0, 1\}$, что $(x)e\varphi = x$ и $(y)f\varphi = y$. Без ограничения общности можно предположить, что $x \leq y$. При таком предположении

$$x = (x)e\varphi \leq (y)e\varphi = ((y)f\varphi)e\varphi = (y)(f\varphi e\varphi) = (y)(ef)\varphi = (y)0\varphi = 0,$$

что приводит к противоречию.

Теперь допустим, что $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{0\}$. Поскольку $e\varphi, f\varphi \neq 0\varphi$, имеем $\{0\} \subset \mathrm{Im}(e\varphi)$ и $\{0\} \subset \mathrm{Im}(f\varphi)$, в силу чего снова найдутся такие $x, y \in C \setminus \{0\}$, что $(x)e\varphi = x$ и $(y)f\varphi = y$. Как и в предыдущем случае, предполагая, что $x \leq y$, получаем, что $x = 0$, т. е. снова приходим к противоречию.

Допустим, наконец, что $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{1\}$. Тогда $\{1\} \subset \mathrm{Im}(e\varphi)$ и $\{1\} \subset \mathrm{Im}(f\varphi)$, в силу чего найдутся такие $x, y \in C \setminus \{1\}$, что $(x)e\varphi = x$ и $(y)f\varphi = y$. Снова без ограничения общности можно считать, что $x \leq y$. Но тогда

$$1 = (x)0\varphi = (x)(fe)\varphi = (x)(e\varphi f\varphi) = ((x)e\varphi)f\varphi = (x)f\varphi \leq (y)f\varphi = y,$$

и опять-таки приходим к противоречию.

Итак, $k \geq n - 1$ и потому, взяв произвольное преобразование $t \in \mathcal{POI}_n \setminus \{1\}$ и заметив, что его ранг меньше или равен $n - 1$, заключаем, что $t \in \ker(\varphi)$, т.е. $t\varphi = 0\varphi$. □

Лемма 2.2. *Пусть C — цепь и $\varphi : \mathcal{POI}_n \to \mathrm{End}^r(C)$ — гомоморфизм моноидов, для которого $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{0\}$. Тогда найдется такая полугруппа $W \in \boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{Ecom}$, что полупрямое произведение $C * \mathcal{POI}_n$, ассоциированное с φ, вкладывается в $W \times \mathcal{POI}_n$. В частности, $C * \mathcal{POI}_n \in \boldsymbol{POI}$.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что по лемме 2.1 отображение φ должно быть постоянным на $\mathcal{POI}_n \setminus \{1\}$. Следовательно, по лемме 1.2 полупрямое произведение $C * \mathcal{POI}_n$ вкладывается в $(C * U_1) \times \mathcal{POI}_n$, где U_1 — подмоноид $\{0, 1\}$ в $\mathcal{POI}_n$, а $C * U_1$ — полупрямое произведение, ассоциированное с ограничением φ на U_1. Поскольку $\boldsymbol{J} \cap \boldsymbol{Ecom} \subset \boldsymbol{POI}$ [9], остается показать, что $C * U_1$ — $\mathcal{J}$-тривиальная полугруппа с коммутирующими идемпотентами. Заметим, что легко убедиться, что каждая конечная $\mathcal{R}$-тривиальная полугруппа с коммутирующими идемпотентами будет и $\mathcal{L}$-тривиальной, в силу чего можно ограничиться проверкой того, что $C * U_1$ — $\mathcal{R}$-тривиальная полугруппа с коммутирующими идемпотентами.

Так как и C, и U_1 являются $\mathcal{R}$-тривиальными полугруппами и псевдомногообразие всех конечных $\mathcal{R}$-тривиальных полугрупп замкнуто относительно полупрямых произведений (см. [10], пример V.8.4), полугруппа $C * U_1$ будет $\mathcal{R}$-тривиальной.

Теперь покажем, что $C * U_1 \in \boldsymbol{Ecom}$. Прежде всего заметим, что идемпотентами в $C * U_1$ будут все элементы вида $(x, 1)$, где $x \in C$ и $(0, 0)$. Тогда для любых $x, y \in C$ имеем

$$(x, 1)(y, 1) = (x(1.y), 1) = (xy, 1) = (yx, 1) = (y(1.x), 1) = (y, 1)(x, 1).$$

Далее, для всех $x \in C$

$$(x,1)(0,0) = (x(1.0),0) = (x0,0) = (0,0) = (00,0) = (0(0.x),0) = (0,0)(x,1),$$

откуда $C{*}U_1 \in \boldsymbol{Ecom}$. $\square$

Лемма 2.3. *Пусть C — цепь и $\varphi : \mathcal{POI}_n \to \mathrm{End}^r(C)$ — гомоморфизм моноидов, для которого $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{1\}$. Тогда полупрямое произведение $C{*}\mathcal{POI}_n$, ассоциированное с φ, вкладывается в $\mathrm{End}^r(C) \times \mathcal{POI}_{n+1}$. В частности, $C{*}\mathcal{POI}_n \in \boldsymbol{O}$.*

Доказательство. Как и выше, начнем с наблюдения, что отображение φ постоянно на $\mathcal{POI}_n \setminus \{1\}$ по лемме 2.1. Тогда по лемме 1.2 полупрямое произведение $C{*}\mathcal{POI}_n$ вкладывается в $(C{*}U_1) \times \mathcal{POI}_n$, где U_1 — подмоноид $\{0,1\}$ в $\mathcal{POI}_n$, а $C{*}U_1$ — полупрямое произведение, ассоциированное с ограничением φ на U_1. Так как моноид U_1 изоморфен $\mathcal{POI}_1$ и произведение $\mathcal{POI}_1 \times \mathcal{POI}_n$ вкладывается в $\mathcal{POI}_{n+1}$ (см. [3], предложение 2.4), для доказательства первого утверждения леммы остается убедиться, что полупрямое произведение $C{*}U_1$ вкладывается в $\mathrm{End}^r(C) \times U_1$. Определим отображение $\psi : C{*}U_1 \to \mathrm{End}^r(C) \times U_1$, полагая для всех $(x,t) \in C{*}U_1$

$$(x,t)\psi = ((x,t)\psi_1, t),$$

где отображение $\psi_1 : C{*}U_1 \to \mathrm{End}^r(C)$ определено правилом

$$(y)(x,0)\psi_1 = x \quad \text{и} \quad (y)(x,1)\psi_1 = xy$$

для всех $y \in C$. Ясно, что $(x,t)\psi_1$ — эндоморфизм цепи C. Пусть $(x,t),(y,q) \in C{*}U_1$ таковы, что $(x,t)\psi = (y,q)\psi$. Тогда $t = q$ и $(x,t)\psi_1 = (y,q)\psi_1$. Следовательно, $x = (x)(x,t)\psi_1 = (x)(y,q)\psi_1 \leq y = (y)(y,t)\psi_1 = (y)(x,q)\psi_1 \leq x$ и, стало быть, $x = y$, откуда ψ — инъекция. Теперь покажем, что ψ_1 — гомоморфизм. Пусть $(x,t),(y,q) \in C{*}U_1$. Тогда, поскольку $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{1\}$,

$$(x,t)(y,q) = (x(t.y),tq) = \begin{cases} (xy,q), & \text{если } t = 1; \\ (x,0), & \text{если } t = 0, \end{cases}$$

откуда

1. если $t = 0$, то $(z)((x,t)(y,q))\psi_1 = (z)(x,0)\psi_1 = x =$
   $= ((z)(y,q)\psi_1)(x,0)\psi_1 = (z)(y,q)\psi_1(x,t)\psi_1$ для всех $z \in C$;
2. если $t = 1$ и $q = 0$, то $(z)((x,t)(y,q))\psi_1 = (z)(xy,0)\psi_1 = xy =$
   $= (y)(x,1)\psi_1 = ((z)(y,0)\psi_1)(x,1)\psi_1 = (z)(y,q)\psi_1(x,t)\psi_1$ для всех $z \in C$;
3. если $t = 1$ и $q = 1$, то $(z)((x,t)(y,q))\psi_1 = (z)(xy,1)\psi_1 = xyz =$
   $= (yz)(x,1)\psi_1 = ((z)(y,1)\psi_1)(x,1)\psi_1 = (z)(y,q)\psi_1(x,t)\psi_1$ для всех $z \in C$.

Итак, ψ_1 — гомоморфизм из $C{*}U_1$ в $\mathrm{End}^r(C)$. Отсюда ψ — инъективный гомоморфизм, и первое утверждение леммы доказано.

Теперь докажем второе утверждение леммы. Как уже отмечалось, если m — число элементов C, то моноид $\mathrm{End}(C)$ изоморфен $\mathcal{O}_m$, откуда $\mathrm{End}^r(C)$ вкладывается в $\mathcal{O}_{m+1}$ (см. [1], теорема 2.4). Итак, $C{*}\mathcal{POI}_n \in \boldsymbol{O}$. $\square$

Лемма 2.4. *Пусть C — цепь и $\varphi : \mathcal{POI}_n \to \mathrm{End}^r(C)$ — гомоморфизм моноидов, для которого $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{0,1\}$, причем $(x)0\varphi = 0$ для всех $x \in C \setminus \{1\}$. Тогда найдется такая полугруппа $W \in \boldsymbol{J}$, что полупрямое произведение $C{*}\mathcal{POI}_n$, ассоциированное с φ, вкладывается в $W \times \mathcal{POI}_n$. В частности, $C{*}\mathcal{POI}_n \in \boldsymbol{O}$.*

Доказательство. Снова используя леммы 2.1 и 1.2, можем заключить, что $C{*}\mathcal{POI}_n$ вкладывается в $(C{*}U_1) \times \mathcal{POI}_n$, где U_1 — подмоноид $\{0,1\}$ в $\mathcal{POI}_n$, а $C{*}U_1$ — полупрямое произведение, ассоциированное с ограничением φ на U_1. Поскольку $\boldsymbol{J} \subset \boldsymbol{O}$ [9], остается показать, что полугруппа $C{*}U_1$ будет $\mathcal{J}$-тривиальной.

Как в доказательстве леммы 2.2, полугруппа $C{*}U_1$ будет $\mathcal{R}$-тривиальной, в силу чего остается доказать, что $C{*}U_1$ — $\mathcal{L}$-тривиальная полугруппа.

Возьмем $x \in C$. Допустим, что $(x,0)\,\mathcal{L}\,(y,u)$ для некоторой пары $(y,u) \in C{*}U_1$. Тогда существуют такие $(a,t),(b,q) \in C{*}U_1$, что $(y,u) = (a,t)(x,0)$ и $(x,0) = (b,q)(y,u)$. Следовательно, $(y,u) = (a(t.x),0)$ и, таким образом, $u = 0$. Далее, $y = a(t.x)$ и $x = b(q.y)$. Если $x = 1$, то $q.y = 1$ и $y = 1$, откуда $x = y$. Аналогично, если $y = 1$, то $x = y$. Допустим, что $x \neq 1$ и $y \neq 1$. Если $t \neq 1$, то $y = a(0.x) = a0 = 0$ и $x = b(q.0) = b0 = 0$, откуда $x = y$. Аналогично, если $q \neq 1$, то $x = y$. Наконец, если $t = q = 1$, то $x = by \leq y = ax \leq x$ и снова $x = y$. Поэтому $\mathcal{L}$-класс пары вида $(x,0)$ в $C{*}U_1$ одноэлементен.

Теперь рассмотрим $(x,1) \in C{*}U_1$ и допустим, что $(x,1)\,\mathcal{L}\,(y,u)$ для некоторой пары $(y,u) \in C{*}U_1$. Тогда найдутся такие $(a,t),(b,q) \in C{*}U_1$, что $(y,u) = (a,t)(x,1)$ и $(x,1) = (b,q)(y,u)$. Из последнего равенства следует, что $u = 1 = q$, откуда $t = 1$. Тогда $x = by \leq y = ax \leq x$ и, стало быть, $(y,u) = (x,1)$. Поэтому и $\mathcal{L}$-класс пары вида $(x,1)$ в $C{*}U_1$ одноэлементен. Итак, $C{*}U_1$ — $\mathcal{L}$-тривиальная полугруппа. $\square$

Лемма 2.5. *Если $S \in \boldsymbol{O}$, то и полугруппа S^0 принадлежит $\boldsymbol{O}$.*

Доказательство. Пусть $S \in \boldsymbol{O}$. Так как $\boldsymbol{O}$ есть класс всех делителей полугрупп $\mathcal{O}_k$, $k \in \mathbb{N}$ (напр., [9] или [2]), найдутся $m \in \mathbb{N}$, подполугруппа T в $\mathcal{O}_m$ и сюръективный гомоморфизм φ из T на S. Ясно, что φ индуцирует сюръективный гомоморфизм из T^0 на S^0. Следовательно, для доказательства леммы достаточно проверить, что T^0 вкладывается в $\mathcal{O}_{m+1}$. Определим отображение $\psi : T^0 \to \mathcal{O}_{m+1}$, полагая для каждого $t \in T$

$$(x)t\psi = \begin{cases} xt, & \text{если } 1 \leq x \leq m; \\ m+1, & \text{если } x = m+1, \end{cases}$$

и $(x)0\psi = m+1$ для всех $x \in \{1,\dots,m+1\}$. Тогда ψ — инъективный гомоморфизм. $\square$

Теперь можем доказать основной результат.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, C — цепь, $\varphi : \mathcal{POI}_n \to \mathrm{End}^r(C)$ — гомоморфизм моноидов и $C{*}\mathcal{POI}_n$ — полупрямое произведение, ассоциированное с φ. Докажем, что $C{*}\mathcal{POI}_n \in \boldsymbol{O}$, индукцией по числу элементов в C. Если цепь C тривиальна, то произведение $C{*}\mathcal{POI}_n$ изоморфно $\mathcal{POI}_n$, откуда $C{*}\mathcal{POI}_n \in \boldsymbol{O}$.

Возьмем теперь нетривиальную цепь C и предположим, что все полупрямые произведения $C'{*}\mathcal{POI}_n$, где C' — такая цепь, что $|C'| < |C|$, принадлежат $\boldsymbol{O}$. Если $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{0\}$ или $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{1\}$, то по леммам 2.2 и 2.3 получаем $C{*}\mathcal{POI}_n \in \boldsymbol{O}$. Если $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{0,1\}$ и $(x)0\varphi = 0$ для всех $x \in C \setminus \{1\}$, то $C{*}\mathcal{POI}_n \in \boldsymbol{O}$ по лемме 2.4. Если $\mathrm{Im}(0\varphi) = \{0,1\}$ и $(x)0\varphi = 1$ для некоторого $x \in C \setminus \{1\}$, то 0φ отображает по крайней мере два различных элемента C в единицу. Следовательно, по лемме 1.3 существуют две такие подцепи C_1 и C_2 в C, что $1 < |C_i| < |C|$ для $i = 1,2$ и что $C{*}\mathcal{POI}_n$ вкладывается в $(C_1{*}\mathcal{POI}_n) \times (C_2{*}\mathcal{POI}_n)^0$ для некоторых полупрямых произведений $C_1{*}\mathcal{POI}_n$ и $C_2{*}\mathcal{POI}_n$. По предположению индукции $C_1{*}\mathcal{POI}_n, C_2{*}\mathcal{POI}_n \in \boldsymbol{O}$ и по лемме 2.5 $(C_2{*}\mathcal{POI}_n)^0 \in \boldsymbol{O}$, откуда $C{*}\mathcal{POI}_n \in \boldsymbol{O}$ и в этом случае. Наконец, допустим, что для $\mathrm{Im}(0\varphi)$ не выполняется ни один из предыдущих случаев. Тогда найдется такой элемент $e \in C \setminus \{0,1\}$, что $e \in \mathrm{Im}(0\varphi)$. Так как 0φ — идемпотент в $\mathrm{End}^r(C)$, имеем $e = (e)0\varphi$. Следовательно, по лемме 1.4 существуют две такие подцепи C_1 и C_2 в C, что $1 < |C_i| < |C|$ для $i = 1,2$ и что $C{*}\mathcal{POI}_n$ вкладывается в $(C_1{*}\mathcal{POI}_n) \times (C_2{*}\mathcal{POI}_n)$ для некоторых полупрямых произведений $C_1{*}\mathcal{POI}_n$ и $C_2{*}\mathcal{POI}_n$. Снова используя предположение индукции, заключаем, что $C_1{*}\mathcal{POI}_n, C_2{*}\mathcal{POI}_n \in \boldsymbol{O}$, откуда $C{*}\mathcal{POI}_n \in \boldsymbol{O}$. $\square$

Литература

1. Higgins P.M. *Divisors of semigroups of order-preserving mappings on a finite chain* // Int. J. Algebra Comput. – 1995. – V. 5. – P. 725–742.
2. Верницкий А.С., Волков М.В. *Доказательство и обобщение теоремы Хиггинса о делителях полугрупп изотонных преобразований* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 1. – С. 38–44.

3. Fernandes V.H. *Semigroups of order-preserving mappings on a finite chain: a new class of divisors* // Semigroup Forum. – 1997. – V. 54. – P. 230–236.
4. Almeida J., Volkov M.V. *The gap between partial and full* // Int. J. Algebra Comput. – 1998. – V. 8. – P. 399–430.
5. Repnitskiĭ V.B., Volkov M.V. *The finite basis problem for the pseudovariety $\mathcal{O}$* // Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math. – 1998. – V. 128. – P. 661–669.
6. Howie J.M. *Fundamentals of Semigroup Theory.* – Oxford: University Press, 1995. – 352 p.
7. Fernandes V.H. *The monoid of all injective order preserving partial transformations on a finite chain* // Semigroup Forum. – 2001. – V. 62. – P. 178–204.
8. Almeida J. *Finite Semigroups and Universal Algebra.* – Singapore: World Scientific, 1995. – 512 p.
9. Higgins P.M. *Pseudovarieties generated by transformations semigroups* / S. Kublanovsky, A. Mikhalev, J. Ponizovskii, P. Higgins. – Semigroups and Their Applications, Including Semigroup Rings. – Санкт-Петербург: Изд-во СПГТУ, 1999. – С. 85–94.
10. Eilenberg S. *Automata, Languages, and Machines.* V. B. – New York: Academic Press, 1976. – 388 p.

Новый Лиссабонский университет
(*Португалия*)

Поступила
10.07.2000