ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 7 (458)

УДК 517.5

С.К. ГОРЛОВ, И.Я. НОВИКОВ, В.А. РОДИН

КОРРЕКЦИЯ ПОЛИНОМОВ ХААРА, ПРИМЕНЯЕМЫХ ДЛЯ СЖАТИЯ ГРАФИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Работа посвящена теоретическому обоснованию возможности корректировать полином по двумерной системе Хаара, представляющий изображение после нелинейной аппроксимации. Данная аппроксимация состоит в обнулении малых по абсолютной величине коэффициентов Фурье–Хаара вне зависимости от их расположения в исходном полиноме, представляющем изображение до сжатия информации. При этом целью является сжатие графической информации без существенного искажения изображения (см. [1], с. 103).

В работе двумерная система Хаара представлена в двух видах: как одномасштабными всплесками, так и простым произведением одномерных систем Хаара. Задача вызвана сопоставлением со следующим известным для проекторов Рисса фактом (см. [2], с. 38): если для исходной функции $f(x)$ справедливы неравенства $m \le f(x) \le M$, то любая частная сумма $S_N(f,x)$ ряда Фурье–Хаара удовлетворяет тем же неравенствам, т. е. $m \le S_N(f,x) \le M\ \forall N$. Выбрасывание малых коэффициентов приводит к полиному, в общем случае не совпадающему с частной суммой $S_N(f,x)$. На множестве, где для получающегося лакунарного полинома аналогичные неравенства нарушаются, приходится применять коррекцию, связанную со срезкой по заданным уровням m и M. Ниже оценим меру этого множества.

1. В этом пункте рассмотрим двумерную систему Хаара как одномасштабную систему всплесков. Обозначим через

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1]; \\ 0, & t \notin [0,1], \end{cases}$$

масштабирующую функцию Хаара, а через

$$\psi(t) = \begin{cases} +1, & t \in [0,1/2); \\ -1, & t \in [1/2,1]; \\ \ \ 0, & t \notin [0,1], \end{cases}$$

— всплеск Хаара. Положим

$$\Phi^{(-1)}(x_1,x_2) = \varphi(x_1)\psi(x_2),$$
$$\Phi^{(1)}(x_1,x_2) = \psi(x_1)\varphi(x_2),$$
$$\Phi^{(0)}(x_1,x_2) = \psi(x_1)\psi(x_2).$$

Пусть $k = 0,1,2,\dots$; $m_1 = 0,1,2,\dots,2^k-1$; $m_2 = 0,1,2,\dots,2^k-1$; $\alpha = -1,0,1$. Тогда система функций

$$\begin{gathered} \Phi(x) = \varphi(x_1)\varphi(x_2), \\ \Phi^{(\alpha)}_{k,m_1,m_2}(x) = 2^k\Phi^{(\alpha)}(2^kx_1 - m_1,\ 2^kx_2 - m_2) \end{gathered} \tag{1}$$

представляет собой двумерные одномасштабные всплески на базе функций Хаара. Здесь $x = (x_1,x_2) \in [0,1]^2$, а носителем функции является двоичный квадрат $\Delta_{k,m_1,m_2} = \left[\frac{m_1}{2^k}, \frac{m_1+1}{2^k}\right] \times$

$\left[\frac{m_2}{2^k}, \frac{m_2+1}{2^k}\right]$. Известно, что данная система является безусловным базисом в пространствах L_p $(1 < p < \infty)$. Для функции, представляемой рядом

$$f(x) = c\Phi(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{2^k-1} \sum_{m_2=0}^{2^k-1} \sum_{\alpha=-1}^{1} c_{k,m_1,m_2}^{(\alpha)} \Phi_{k,m_1,m_2}^{(\alpha)}(x), \tag{2}$$

определим для любой расстановки знаков $\varepsilon = \{\varepsilon_{k,m_1,m_2}^{(\alpha)}\} = \{\pm 1\}$ оператор

$$(T_\varepsilon f)(x) = c\Phi(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{2^k-1} \sum_{m_2=0}^{2^k-1} \sum_{\alpha=-1}^{1} \varepsilon_{k,m_1,m_2}^{(\alpha)} c_{k,m_1,m_2}^{(\alpha)} \Phi_{k,m_1,m_2}^{(\alpha)}(x), \tag{3}$$

связанный с безусловной сходимостью ряда (2). С помощью оператора T_ε можно выразить лакунарные полиномы, возникающие при нелинейной аппроксимации ряда (2). Пусть $R_\Lambda(x)$ — лакунарный полином. Найдется расстановка знаков ε такая, что $R_\Lambda = \frac{1}{2}(f + T_\varepsilon f)$. Для пространства L_2 имеем $\|R_\Lambda\|_{L_2} \le \|f\|_{L_2}$, тогда $\operatorname{mes}\{x \in [0,1]^2 : |R_\Lambda(x)| > y\} \le \left(\frac{\|f\|_{L_2}}{y}\right)^2$, и из этой оценки видно, что мера множества, для которого $y \gg \|f\|_{L_2}$, мала. В работе доказано, что для интегрируемой функции f эта мера также мала, т. е. оператор T_ε имеет слабый тип $(1,1)$.

Теорема 1. *Для любой последовательности $\varepsilon = \{\varepsilon_{k,m_1,m_2}^{(\alpha)}\} = \{\pm 1\}$ оператор T_ε имеет слабый тип $(1,1)$, т. е. для любого $y > 0$ и любой функции $f \in L_1([0,1]^2)$ справедливо неравенство*

$$\operatorname{mes}\{x \in [0,1]^2 : |(T_\varepsilon f)(x)| > y\} \le \frac{A}{y}\|f\|_{L_1}, \tag{4}$$

где A — абсолютная константа, $1 < A \le 5$.

Доказательство проводится по схеме из ([3], с. 87), но при этом применяется разложение квадрата $[0,1]^2$, связанное с интегрируемой функцией ([4], с. 27). Неравенство (4) достаточно доказать для полиномов. Предположим, что

$$\operatorname{mes}\left\{x \in [0,1]^2 : \left|\sum_{k=M}^{M+N} \sum_{m_1=0}^{2^k-1} \sum_{m_2=0}^{2^k-1} \sum_{\alpha=-1}^{1} \varepsilon_{k,m_1,m_2}^{(\alpha)} c_{k,m_1,m_2}^{(\alpha)} \Phi_{k,m_1,m_2}^{(\alpha)}(x)\right| > y\right\} \le$$
$$\le \frac{A}{y}\left\|\sum_{k=M}^{M+N} \sum_{m_1=0}^{2^k-1} \sum_{m_2=0}^{2^k-1} \sum_{\alpha=-1}^{1} c_{k,m_1,m_2}^{(\alpha)} \Phi_{k,m_1,m_2}^{(\alpha)}(x)\right\|_{L_1},$$

тогда правая часть при $M \to \infty$ стремится к нулю, т. к. система образует базис в L_1. Следовательно, частные суммы ряда (3) сходятся по мере. Если $P_N(x)$ — частные суммы ряда (3), то по предположению

$$\operatorname{mes}\{x \in [0,1]^2 : |(T_\varepsilon f)(x)| > y\} \le \varlimsup_{N\to\infty} \operatorname{mes}\{x \in [0,1]^2 : |P_N(x)| > y\} \le$$
$$\le \varlimsup_{N\to\infty} \frac{A}{y}\|S_N(f,x)\|_{L_1} = \frac{A}{y}\|f\|_{L_1}.$$

Теперь установим (4) для полиномов. Пусть

$$g(x) = c\Phi(x) + \sum_{k=0}^{N} \sum_{m_1=0}^{2^k-1} \sum_{m_2=0}^{2^k-1} \sum_{\alpha=-1}^{1} c_{k,m_1,m_2}^{(\alpha)} \Phi_{k,m_1,m_2}^{(\alpha)}(x)$$

есть произвольный полином, причем $y > \|g\|_{L_1}$ (для $y < \|g\|_{L_1}$ неравенство (4) очевидно). Рассмотрим разложение функции $g \in L_1$, $x \in [0,1]^2$, на сумму $g(x) = p(x) + h(x)$ и разложение квадрата $[0,1]^2$ на множества F и Ω (см. [4], с. 27). Функции p и h обладают свойствами, связанными со свойствами множеств F и Ω,

1) $[0,1]^2 = F \cup \Omega$, $F \cap \Omega = \emptyset$;

2) $|g(x)| \le y$ почти всюду на множестве F;

3) Ω есть объединение двоичных квадратов $\Omega = \bigcup_k Q_k$, внутренности которых не пересекаются, причем для каждого Q_k справедливо

$$y < \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} |g(x)| dx < 4y. \tag{5}$$

Разложение устроено так:

$$p(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } \ x \in F; \\ |Q_k|^{-1} \displaystyle\int_{Q_k} g(t)dt, & \text{если } \ x \in Q_k, \end{cases} \tag{6}$$

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ x \in F; \\ g(x) - |Q_k|^{-1} \displaystyle\int_{Q_k} g(t)dt, & \text{если } \ x \in Q_k. \end{cases} \tag{7}$$

Несложно заметить выполнение следующих свойств у функций p и h:

a) $\|p\|_{L_1} \le \|g\|_{L_1}$;

b) $|p(x)| \le 4y$ для почти всех $x \in [0,1]^2$;

c) $\int\limits_{Q_k} h(x)dx = 0$ $(k = 1, 2, \dots)$ и $\operatorname{supp} h \subset \Omega$;

d) $\operatorname{supp} T_\varepsilon h \subset \Omega$.

Свойства a) и c) следуют из определений (6), (7). Свойство b) следует из (5) для $x \in \Omega$ и из свойства 2) для $x \in F$. Установим d). Покажем, что для двоичных квадратов Δ_k, связанных с вычислением коэффициентов функции $T_\varepsilon h$, имеет место равенство $c_k(T_\varepsilon h) = \pm c_k(h) = 0$, если $\Delta_k \not\subset \Omega$. Имеем

$$c_k(h) = \int_{[0,1]^2} h(x)\Phi_k(x)dx = \int_{\Omega\cap\Delta_k} h(x)\Phi_k(x)dx = \sum_i \int_{Q_i\cap\Delta_k} h(x)\Phi_k(x)dx.$$

Так как $\Delta_k \not\subset \Omega = \bigcup_i Q_i$, то либо $\Delta_k \cap Q_i = \emptyset$, либо $Q_i \subset \Delta_k^+$ или $Q_i \subset \Delta_k^-$. Здесь $\Delta_k^\pm$ означает четверть квадрата Δ_k, на которой функция Φ_k принимает постоянные значения, положительные или отрицательные соответственно. В любом случае

$$\int_{Q_i\cap\Delta_k} h(x)\Phi_k(x)dx = C \int_{Q_i} h(x)dx = 0$$

согласно свойству (7).

Оператор $T_\varepsilon f$ линеен, поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{mes}\{x \in [0,1]^2 : |(T_\varepsilon g)(x)| > y\} = \operatorname{mes}\{x \in F : |(T_\varepsilon g)(x)| > y\} + \operatorname{mes}\{x \in \Omega : |(T_\varepsilon g)(x)| > y\} \le \\ \le \operatorname{mes}\{x \in F : |(T_\varepsilon p)(x)| > y\} + \operatorname{mes}\Omega. \end{aligned} \tag{8}$$

Первое слагаемое в правой части (8) оценим с помощью свойств a) и b). Для $y > 0$ имеем

$$\operatorname{mes}\{x \in [0,1]^2 : |(T_\varepsilon p)(x)| > y\} \le \frac{1}{y^2}\|T_\varepsilon p\|_{L_2}^2 = \frac{1}{y^2}\|p\|_{L_2}^2 \le \frac{4}{y}\|p\|_{L_1} \le \frac{4}{y}\|g\|_{L_1}.$$

Второе слагаемое оценивается с помощью неравенств (5), а именно,

$$\operatorname{mes}\Omega \le \sum_i \operatorname{mes} Q_i \le \sum_i \frac{1}{y}\int_{Q_i} |g(x)|dx = \frac{1}{y}\int_\Omega |g(x)|dx \le \frac{1}{y}\|g\|_{L_1}.$$

В итоге выполнено неравенство (4) с константой $A = 5$. $\square$

2. В этом пункте рассмотрим двумерную систему Хаара как прямое произведение двух одномерных систем (разномасштабные всплески). Для $N = (2^k, 2^m)$, $k = 1, 2, \dots$, $m = 1, 2, \dots$, частные суммы двойного ряда по системе Хаара имеют вид

$$(S_N f)(x) = \sum_{i=0}^{2^k-1} \sum_{j=0}^{2^m-1} c_{i,j}(f)\chi_i(x_1)\chi_j(x_2).$$

Несложно заметить, что для $x = (x_1, x_2)$ с двоично-иррациональными координатами справедливо равенство

$$\sup_N |(S_N|f|)(x)| = (M_d f)(x). \tag{9}$$

В правой части (9) обозначена максимальная функция по двоичным прямоугольникам. А именно, если $I = \left[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}\right] \times \left[\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m}\right]$, то

$$(M_d f)(x) = \sup_{x\in I} \frac{1}{|I|}\int_I |f(t)|ft. \tag{10}$$

Известно ([5], с. 459), что если размеры m и k не согласованы, то для конечности функции (10) почти всюду достаточно условие $f \in L\ln^+ L$ и не достаточно условие $f \in \varphi(L)$, где $\varphi(t) = o(t\log t)$ при $t \to +\infty$. Покажем, что в этом случае функция распределения для M_d имеет оценку слабого типа.

Теорема 2. *Оператор M_d имеет слабый тип $(1, L\ln^+ L)$, т. е. для любого $y > 0$ справедливо неравенство*

$$\operatorname{mes}\{x \in [0,1]^2 : (M_d f)(x) > y\} \le \frac{C}{y}\|f\|_{L\ln^+ L},$$

где C — абсолютная константа.

Доказательство. Рассмотрим максимальный оператор по одной переменной

$$(M_1 f)(x) = \sup_{h\ne 0}\frac{1}{h}\int_{x_1}^{x_1+h} |f(t, x_2)|dt.$$

Аналогично определяется $(M_2 f)(x)$. Известно, что эти операторы имеют слабый тип $(1,1)$, кроме того, $(M_d f)(x) \le (M_1 M_2 f)(x)$. Имеет место неравенство ([5], с. 460)

$$\|M_2 f\|_{L_1} \le A\int_0^1 f\ln^+ f\,dt + A, \tag{11}$$

где A — абсолютная константа. Функции в обеих частях неравенства (11) рассматриваются как функции одной переменной x_2. Следовательно, применяя (11), оценку слабого типа для максимального оператора одной переменной и теорему Фубини, получаем

$$\begin{aligned}
\operatorname{mes}\{x \in [0,1]^2 : (M_d f)(x) > y\} &\le \operatorname{mes}\{x \in [0,1]^2 : (M_1 M_2 f)(x) > y\} \le \\
&\le \int_0^1 \operatorname{mes}\{x_1 \in [0,1] : (M_1(M_2 f))(x_1, t) > y\}dt \le \int_0^1 \frac{C}{y}\|(M_2 f)(s,t)\|_{L_1} dt = \\
&= \frac{C}{y}\int_0^1 ds\int_0^1 (M_2 f)(s,t)dt \le \frac{C}{y}\int_0^1\left[A\int_0^1 f(s,t)\ln^+ f(s,t)ds + A\right]dt \le \frac{C_1}{y}\|f\|_{L\ln^+ L},
\end{aligned}$$

где через $L\ln^+ L$ обозначено пространство Орлича с M-функцией $|u|\ln^+(|u|+1)$. □

Согласно (9) как следствие вытекает

Теорема 3. *Оператор* $(S^*f)(x) = \sup_N |(S_N|f|)(x)|$ *имеет слабый тип* $(1, L\ln^+ L)$, *т. е. для любого* $y > 0$ *справедливо неравенство*

$$\mathrm{mes}\{x \in [0,1]^2 : (S^*f)(x) > y\} \le \frac{C}{y}\|f\|_{L\ln^+ L},$$

где C *— абсолютная константа.*

Сравнение теорем 1 и 3 показывает, что система (1) обладает лучшими свойствами, чем система, образованная прямым произведением систем Хаара разных переменных. Другими словами, одномасштабные всплески на базе системы Хаара обладают лучшими свойствами по сравнению с разномасштабными.

Литература

1. Frazier M., Jawerth B., Weiss G. *Littlewood–Paley Theory and the Study of Function Spaces.* – CBMS. – 1991. – 132 p.
2. Соболь И.М. *Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара.* – М.: Наука, 1969. – 288 с.
3. Кашин Б. С., Саакян А. А. *Ортогональные ряды.* – М.: Наука, 1984. – 496 с.
4. Стейн Илайес М. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* – М.: Мир, 1973. – 342 с.
5. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* Т. 2. – М.: Мир, 1965. – 537 с.

Воронежский государственный университет
Воронежская высшая школа МВД России

Поступила
21.09.1998