ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 12 (511)

УДК 517.977

А.Ф. ТАРАКАНОВ, Е.Д. БАРАТОВА

МЕТОД ШТРАФОВ И НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ КООПЕРАТИВНОЙ ИГРЕ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Введение

Исследования в области дифференциальных игр ведутся достаточно интенсивно в течение уже многих лет. Начало изучению задач в игровой постановке положили работы Р. Айзекса, Г. Оуэна, Н.Н. Красовского, Л.С. Понтрягина, Н.Н. Воробьева. Более поздние исследования в этой области представлены в [1]–[7].

Изучение дифференциальных игр при неопределенности началось относительно недавно. Природа неопределенных факторов, влияющих на процесс принятия решений, может быть самой разнообразной: погрешности измерений, помехи при передаче информации, неопределенность последующих действий оппонента и т. п. Учет такого рода факторов позволяет более достоверно описывать работу сложных систем.

Среди направлений теории игр следует выделить кооперативные игры. Исследования в области кооперативных игр практически полностью посвящены позиционным играм [4], [6], в которых учитывается обратная связь, что позволяет более гибко строить процесс управления. Так, в [3] проведено довольно подробное исследование позиционной кооперативной линейно-квадратичной игры при неопределенности. Определение решения в этой игре строится на основании различных принципов оптимальности (принципы угроз и контругроз, оптимальность по Слейтеру и др.). Тем не менее, в том случае, когда вследствие каких-либо причин, например, при сильных помехах, дополнительная информация не может быть эффективно использована в ходе игры, единственно возможным становится программное управление.

В данной статье рассматривается дифференциальная игра N участников при неопределенности в программных стратегиях. Взаимоотношения между всеми игроками предполагаются доброжелательными, что позволяет использовать концепцию оптимальности по Парето, а также свертку критериев по Карлину для математического формулирования игры в виде максиминной задачи с дифференциальными ограничениями. Для решения задачи используется метод штрафных функционалов [8]–[10], позволяющий освободиться от дифференциальных связей и перейти к обычной задаче на максимум. Формулируются теоремы, обосновывающие использование сверток Карлина в данной кооперативной игре. На каждом этапе применения метода штрафов формулируются теоремы о существовании решения новой задачи и его совпадении с решением исходной задачи. Получены необходимые условия оптимальности.

1. Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальную кооперативную игру N лиц при неопределенности:

$$\Gamma = \langle \{1,\dots,N\}, \Sigma, \{U_i\}_{i=\overline{1,N}}, Z, \{J_i(u^{(1)},\dots,u^{(N)},z)\}_{i=\overline{1,N}} \rangle.$$

В этой игре функционирование динамической управляемой системы Σ описывается обыкновенным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(u^{(1)}, \dots, u^{(N)}, z, x, t), \quad x(t_*) = x_*, \quad t \in [t_*, v], \tag{1.1}$$

дающим изменение фазового вектора $x(t)$ по времени t под действием управляющих воздействий игроков $(u^{(1)}, \dots, u^{(N)})$ и неопределенного фактора z, причем $x \in R^n$, $u^{(1)}, \dots, u^{(N)} \in R^r$, $z \in R^m$, где R^k $(k = n, r, m)$ – евклидово векторное пространство с нормой $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{k} x_j^2}$, t_*, v — заданные моменты времени соответственно начала и окончания игры.

В дальнейшем решение игры будем строить в программных управлениях. Поэтому стратегию i-го игрока будем отождествлять с его функцией управления $u^{(i)}(\cdot)$, причем $u^{(i)}(t) \in U_i$, $i = \overline{1, N}$. Ситуацию игры будем отождествлять с набором $(u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot))$. Неопределенный фактор z в каждый момент времени t принимает значение $z \in Z$.

Множества D_i допустимых управляющих воздействий i-го игрока определим как множества ограниченных измеримых функций $u^{(i)}(\cdot)$ со значениями из заданных множеств U_i.

Функции выигрыша игроков определим как

$$J_i(u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot), z) = \Phi_i(x(v)) + \int_{t_*}^{v} F_i(u^{(1)}(t), \dots, u^{(N)}(t), z, x(t), t)dt, \quad i = \overline{1, N}. \tag{1.2}$$

Партия игры разворачивается следующим образом. Каждый i-й игрок выбирает на весь период времени $[t_*, v]$ свою конкретную допустимую стратегию $u^{(i)}(\cdot)$. В результате складывается ситуация $u(\cdot) = (u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot))$. Независимо от такого выбора на управляемую систему Σ в каждый момент времени действует некоторая неопределенность $z \in Z$. При $u^{(i)} = u^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, N}$, $t \in [t_*, v]$, и любых $z \in Z$ строится решение $x(t)$, $t \in [t_*, v]$, системы (1.1). Затем совокупность $(u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot), x(\cdot))$ подставляется игроками в (1.2), и они вычисляют свои выигрыши при реализации любой неопределенности $z \in Z$.

Задача состоит в нахождении такого набора программных стратегий $u^* = u^*(t) = (u^{(1)*}(t), \dots, u^{(N)*}(t))$, $t \in [t_*, v]$, чтобы функции выигрыша принимали по возможности наибольшие значения J_i^*, $i = \overline{1, N}$, при реализации любой неопределенности $z \in Z$.

Везде далее предполагаются выполненными следующие условия:

1) функции управления непрерывны справа:
$$\lim_{\tau \to t+0} u^{(i)}(\tau) = u^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, N};$$
2) вектор-функция f линейна по каждому управлению $u^{(i)}$ и измерима по t, функции F_i строго вогнуты по каждому управлению $u^{(i)}$, удовлетворяют условию Липшица по совокупности управлений $u^{(i)}$, $i = \overline{1, N}$, и измеримы по t;
3) вектор-функция f и функции Φ_i, F_i непрерывно дифференцируемы по x, ограничены вместе со своими производными $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}$, $\frac{\partial F_i}{\partial x}$, $i = \overline{1, N}$, при любых ограниченных $(u^{(i)}, \dots, u^{(N)}, x)$;
4) вектор-функция f и функции F_i измеримы и ограничены по z;
5) множества U_i, $i = \overline{1, N}$, — выпуклые, замкнутые и ограниченные множества (выпуклые компакты), множество Z замкнуто и ограничено;
6) уравнение (1.1) имеет единственное решение.

2. Определение решения

Определение 2.1. Ситуация $(u^{(1)*}, \dots, u^{(N)*}) \in D_1 \times \dots \times D_N$ называется максимальной по Парето в игре Γ, если при любых $(u^{(1)}, \dots, u^{(N)}) \in D_1 \times \dots \times D_N$ и любой неопределенности $z \in Z$ несовместна система неравенств

$$J_i(u^{(1)}, \dots, u^{(N)}, z) \geq J_i(u^{(1)*}, \dots, u^{(N)*}, z), \quad i = \overline{1, N},$$

в которой хотя бы одно из неравенств строгое.

Обозначим через P множество всех оптимальных по Парето ситуаций в игре Г.

3. Сведение к задаче с одним критерием

Образуем векторный критерий

$$\widetilde{J}(u^{(1)},\ldots,u^{(N)},z)=(J_1(u^{(1)},\ldots,u^{(N)},z),\ldots,J_N(u^{(1)},\ldots,u^{(N)},z)).$$

Множеством парето-оптимальных векторных оценок L^* называется множество, состоящее из "северо-восточных" частей множеств векторных оценок

$$L_z=\{\widetilde{J}(u^{(1)},\ldots,u^{(N)},z)\mid(u^{(1)},\ldots,u^{(N)})\in D_1\times\cdots\times D_N\},$$

т. е. множество $L^*=\bigcup\limits_Z L_z^*$, где $L_z^*=\{\widetilde{J}(u^{(1)*},\ldots,u^{(N)*},z)\mid(u^{(1)*},\ldots,u^{(N)*})\in P\}$.

Так как множество парето-оптимальных векторных оценок состоит лишь из граничных точек, а игра (1.1), (1.2) кооперативная, то используем линейную свертку Карлина для введения единого критерия

$$\begin{aligned}J(u^{(1)}(\cdot),\ldots,u^{(N)}(\cdot),z)&=\sum_{i=1}^N\alpha_i(z)J_i(u^{(1)}(\cdot),\ldots,u^{(N)}(\cdot),z)=\\&=\sum_{i=1}^N\alpha_i(z)\Phi_i(x(v))+\int_{t_*}^{v}\left(\sum_{i=1}^N\alpha_i(z)F_i(u^{(1)}(t),\ldots,u^{(N)}(t),z,x(t),t)\right)dt,\end{aligned}\tag{3.1}$$

где $\alpha_i(z)>0$, $\sum\limits_{i=1}^N\alpha_i(z)=1$, для любого $z\in Z$. Если обозначить $\alpha(z)=(\alpha_1(z),\ldots,\alpha_N(z))$, то (3.1) примет вид

$$J(u^{(1)},\ldots,u^{(N)},z)=\langle\alpha(z)\widetilde{J}(u^{(1)},\ldots,u^{(N)},z)\rangle,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — символ скалярного произведения.

Для нахождения парето-оптимальной ситуации критерий (3.1) необходимо переписать в виде

$$\begin{aligned}\overline{J}(u^{(1)},\ldots,u^{(N)})&=\int_Z J(u^{(1)},\ldots,u^{(N)},z)\mu(dz)=\\&=\int_Z\sum_{i=1}^N\alpha_i(z)J_i(u^{(1)},\ldots,u^{(N)},z)\mu(dz)=\int_Z\langle\alpha(z),\widetilde{J}(u^{(1)},\ldots,u^{(N)},z)\rangle\mu(dz),\end{aligned}$$

где $\mu(dz)$ — мера, определенная на множестве Z. Таким образом, вместо первоначальной задачи для полученной свертки критериев можно сформулировать следующую.

При ограничениях (1.1) найти такую ситуацию $(u^{(1)*},\ldots,u^{(N)*})\in D_1\times\cdots\times D_N$, чтобы

$$\overline{J}(u^{(1)*},\ldots,u^{(N)*})=\sup_{(u^{(1)},\ldots,u^{(N)})\in D_1\times\cdots\times D_N}\int_Z J(u^{(1)},\ldots,u^{(N)},z)\mu(dz)=\overline{J}^*.\tag{3.2}$$

Применение свертки Карлина к игре (1.1), (1.2) обосновывает

Теорема 3.1. *Для того чтобы ситуация $(u^{(1)*},\ldots,u^{(N)*})\in D_1\times\cdots\times D_N$ была парето-оптимальной в игре* (1.1), (1.2), *необходимо и достаточно, чтобы существовали функции $\alpha_i(z)>0$, $\sum\limits_{i=1}^N\alpha_i(z)=1$, для любого $z\in Z$, такие, что $(u^{(1)*},\ldots,u^{(N)*})$ реализует равенства* (3.2) *при ограничениях* (1.1).

Доказательство проводится аналогично [11].

4. Гарантированное решение

Множество парето-оптимальных ситуаций — достаточно широкое множество, определяемое для каждого значения неопределенного фактора. Введем другое определение решения игры Γ (гарантированное решение), которое будет представлять собой некоторое подмножество всех парето-оптимальных ситуаций. При этом будем учитывать наименее благоприятное значение неопределенного фактора, для чего используем принцип гарантированного результата.

Определение 4.1. Ситуация $(u^{(1)*}(\cdot),\dots,u^{(N)*}(\cdot)) \in D_1\times\dots\times D_N$ называется σ-максимальной в задаче (1.1), (1.2) при произвольной фиксированной неопределенности $z\in Z$, если при любых $(u^{(1)}(\cdot),\dots,u^{(N)}(\cdot)) \in D_1\times\dots\times D_N$ существуют $\alpha_i(z)>0$ такие, что

$$\inf_{z\in Z}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(z)J_i(u^{(1)}(\cdot),\dots,u^{(N)}(\cdot),z) \le \inf_{z\in Z}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(z)J_i(u^{(1)*}(\cdot),\dots,u^{(N)*}(\cdot),z).$$

Тогда вместо задачи (1.1), (1.2) получаем новую задачу: при ограничениях (1.1) найти такую ситуацию $(u^{(1)*}(\cdot),\dots,u^{(N)*}(\cdot)) \in D_1\times\dots\times D_N$, чтобы

$$\omega^* = \inf_{z\in Z} J(u^{(1)*}(\cdot),\dots,u^{(N)*}(\cdot),z) = \sup_{(u^{(1)}(\cdot),\dots,u^{(N)}(\cdot))\in D_1\times\dots\times D_N}\ \inf_{z\in Z} J(u^{(1)}(\cdot),\dots,u^{(N)}(\cdot),z) = J^*. \tag{4.1}$$

Теорема 4.1. *Для того чтобы ситуация* $(u^{(1)*}(\cdot),\dots,u^{(N)*}(\cdot)) \in D_1\times\dots\times D_N$ *была* σ*-максимальной, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие функции* $\alpha_i(z)>0$, $\sum\limits_{i=1}^{N}\alpha_i(z)=1$, *для любого* $z\in Z$, *что выполняется* (4.1).

Доказательство проводится аналогично ([12], с. 179).

5. Освобождение от дифференциальных связей и сведение к задаче на максимум

Введем новый целевой функционал со штрафом за нарушение дифференциальных связей (1.1):

$$\begin{aligned} V(u^{(1)}(\cdot),\dots,u^{(N)}(\cdot),x(\cdot),C) = \inf_{z\in Z} J(u^{(1)}(\cdot),\dots,u^{(N)}(\cdot),z) -{}&\\ - C\int_Z\int_{t_*}^{v}|\dot x(t) - f(u^{(1)}(t),\dots,u^{(N)}(t),z,x(t),t)|^2\,dt\,\mu(dz),& \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $C>0$ — параметр штрафа, $\mu(dz)$ — мера, определенная на множестве Z.

Рассмотрим семейство задач, зависящих от параметра C,

$$\widetilde V(C) = \sup_{u^{(1)}(\cdot),\dots,u^{(N)}(\cdot),x(\cdot)} V(u^{(1)}(\cdot),\dots,u^{(N)}(\cdot),x(\cdot),C), \tag{5.2}$$

где sup ищется по всем $u^{(1)}(\cdot),\dots,u^{(N)}(\cdot)$ из $L_2[t_*,v]$ — пространства функций с интегрируемым на $[t_*,v]$ квадратом; $x(\cdot)$ из $W_2^{(1)}[t_*,v]$ — пространства абсолютно непрерывных на $[t_*,v]$ функций с производными из $L_2[t_*,v]$. Решением задачи (5.1), (5.2) назовем ситуацию $(u^{(1)*}(\cdot),\dots,u^{(N)*}(\cdot))$ и соответствующий фазовый вектор $x^*(\cdot)$, обеспечивающие (5.2).

Введение функционала

$$W(u^{(1)}(\cdot),\dots,u^{(N)}(\cdot),x(\cdot),\omega,C)=\omega-C\int_Z\Big\{\min\Big[0,\sum_{i=1}^N\alpha_i(z)\Phi_i(x(v))+$$
$$+\int_{t_*}^v\Big(\sum_{i=1}^N\alpha_i(z)F_i(u^{(1)}(t),\dots,u^{(N)}(t),z,x(t),t)\Big)dt-\omega\Big]\Big\}^2\mu(dz)-$$
$$-C\int_Z\int_{t_*}^v|\dot x(t)-f(u^{(1)}(t),\dots,u^{(N)}(t),z,x(t),t)|^2dt\,\mu(dz)\qquad(5.3)$$

приводит к обычной задаче на максимум

$$\widetilde W(C)=\sup_{\substack{(u^{(1)}(\cdot),\dots,u^{(N)}(\cdot),x(\cdot))\in L_2\times W_2^{(1)}\\ -\infty<\omega<+\infty}}W(u^{(1)}(\cdot),\dots,u^{(N)}(\cdot),x(\cdot),\omega,C).\qquad(5.4)$$

Теорема 5.1. 1) *Решения задач* (5.1), (5.2) *и* (5.3), (5.4) *существуют, причем соответственно*

$$\lim_{C\to\infty}\widetilde V(C)=\lim_{C\to\infty}\inf_{z\in Z}\Big[\sum_{i=1}^N\alpha_i(z)\Phi_i(\widetilde x(v,C))+$$
$$+\int_{t_*}^v\Big(\sum_{i=1}^N\alpha_i(z)F_i(\widetilde u^{(1)}(t,C),\dots,\widetilde u^{(N)}(t,C),z,\widetilde x(t,C),t)\Big)dt\Big]=J^*,$$

где $(\widetilde u^{(1)}(t,C),\dots,\widetilde u^{(N)}(t,C),\widetilde x(t,C))$ *— решение задачи* (5.1), (5.2) *при фиксированном* C,

$$\lim_{C\to\infty}\widetilde W(C)=J^*.$$

2) *Для достаточно больших* C *имеет место оценка*

$$0\le E(C)=\widetilde V(C)-J^*\le\frac{K^2N^2}{4C\mu(Z)},$$

где $K>0$ *— константа,* N *— число игроков,* $\mu(Z)$ *— мера множества* Z.

Доказательство теоремы проводится аналогично [8], [9].

6. Необходимые условия оптимальности

Теорема 6.1. *Пусть* $(u^{(1)*}(\cdot),\dots,u^{(N)*}(\cdot))\in D_1\times\dots\times D_N$ *— оптимальная ситуация в задаче* (1.1), (3.1), *определенная на отрезке* $[t_*,v]$, $x^*(\cdot)$ *— соответствующая траектория системы* (1.1). *Тогда существует такая неотрицательная измеримая функция* $p(z)$, *что*

$$\int_Z p(z)\mu(dz)=1,$$

причем $p(z)=0$ *при* $z\notin\operatorname{Arg}\inf\limits_{z\in Z}J(u^{(1)*},\dots,u^{(N)*},z)$, *а также существуют не равные одновременно нулю число* $\lambda_0\ge0$ *и вектор-функция ограниченной вариации* $\psi(z,\cdot)$ *такие, что*

1) *вектор-функция* $\psi(z,\cdot)$ *на* $[t_*,v]$ *при любом фиксированном* $z\in Z$ *удовлетворяет уравнению*

$$\dot\psi(z,t)=-\Big(\frac{\partial}{\partial x}f(u^{(1)*}(t),\dots,u^{(N)*}(t),z,x^*(t),t)\Big)^\top\psi(z,t)-$$
$$-\lambda_0p(z)\sum_{i=1}^N\alpha_i(z)\frac{\partial}{\partial z}F_i(u^{(1)*}(t),\dots,u^{(N)*}(t),z,x^*(t),t)$$

с условием трансверсальности

$$\psi(z,v)=p(z)\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(z)\frac{\partial}{\partial x}\Phi_i(x^*(v));$$

2) *для почти всех* $t\in[t_*,v]$ *на наборе* $(u^{(1)*}(\cdot),\dots,u^{(N)*}(\cdot))$ *выполняются неравенства*

$$\int_Z\int_{t_*}^{v}\Big\langle\Big(\frac{\partial}{\partial u^{(j)}}f(u^{(1)*}(t),\dots,u^{(N)*}(t),z,x^*(t),t)\Big)^{\top}\psi(z,t)+$$

$$+\lambda_0 p(z)\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(z)\frac{\partial}{\partial u^{(j)}}F_i(u^{(1)*}(t),\dots,u^{(N)*}(t),z,x^*(t),t),u^{(j)}(t)-u^{(j)*}(t)\Big\rangle dt\,\mu(dz)\le 0$$

для любых $u^{(j)}\in U_j$, $j=\overline{1,N}$.

Доказательство. Пусть $(u^{(1)}(\cdot,C),\dots,u^{(N)}(\cdot,C),x(\cdot,C),\omega(C))$ — решение задачи (5.3), (5.4) при фиксированном $C>0$.

1) Используем необходимое условие экстремума функции W по x. Пусть $\widetilde{x}(\cdot)$ — произвольная бесконечно дифференцируемая функция, которая обращается в нуль вне некоторого интервала, содержащегося в $[t_*,v]$. Найдем первую вариацию функционала W на траектории $x(\cdot,C)+\widetilde{x}(\cdot)$ при фиксированных $(u^{(1)}(\cdot,C),\dots,u^{(N)}(\cdot,C),x(\cdot,C),\omega(C))$ и приравняем ее нулю:

$$\delta W(u^{(1)}(\cdot,C),\dots,u^{(N)}(\cdot,C),x(\cdot,C),\omega(C),C;\widetilde{x}(\cdot))=p(z,C)\Big(\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(z)\frac{\partial}{\partial x}\Phi_i(x(v,C))\Big)\widetilde{x}(v)+$$

$$+p(z,C)\int_{t_*}^{v}\Big(\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(z)\frac{\partial}{\partial x}F_i(u^{(1)}(t,C),\dots,u^{(N)}(t,C),z,x(t,C),t)\Big)\widetilde{x}(t)dt-$$

$$-\int_{t_*}^{v}\psi(z,t,C)\Big[\dot{\widetilde{x}}(t)-\Big(\frac{\partial}{\partial x}f(u^{(1)}(t,C),\dots,u^{(N)}(t,C),z,x(t,C),t)\Big)\widetilde{x}(t)\Big]dt=0,$$

где

$$p(z,C)=-2C\min\Big[0,\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(z)\Phi_i(x(v,C))+$$

$$+\int_{t_*}^{v}\Big(\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(z)F_i(u^{(1)}(t,C),\dots,u^{(N)}(t,C),z,x(t,C),t)\Big)dt-\omega(C)\Big],$$

$$\psi(z,t,C)=2C(\dot{x}(t,C)-f(u^{(1)}(t,C),\dots,u^{(N)}(t,C),z,x(t,C),t)).$$

Тогда, используя интегрирование по частям

$$\int_{t_*}^{v}\psi(z,t,C)\dot{\widetilde{x}}(t)dt=\psi(z,v,C)\widetilde{x}(v)-\int_{t_*}^{v}\dot{\psi}(z,t,C)\widetilde{x}(t)dt,$$

получим

$$\psi(z,t,C)\widetilde{x}(v)-\int_{t_*}^{v}\dot{\psi}(z,t,C)\widetilde{x}(t)dt-$$

$$-\int_{t_*}^{v}\Big(\frac{\partial}{\partial x}f(u^{(1)}(t,C),\dots,u^{(N)}(t,C),z,x(t,C),t)\Big)^{\top}\psi(z,t,C)\widetilde{x}(t)dt-$$

$$-p(z,C)\Big(\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(z)\frac{\partial}{\partial x}\Phi_i(x(v,C))\Big)\widetilde{x}(v)-$$

$$-p(z,C)\int_{t_*}^{v}\Big(\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(z)\frac{\partial}{\partial x}F_i(u^{(1)}(t,C),\dots,u^{(N)}(t,C),z,x(t,C),t)\Big)\widetilde{x}(t)dt=0.$$

Равенство нулю выполнится, если

$$\dot\psi(z,t,C) = -\Big(\frac{\partial}{\partial x} f(u^{(1)}(t,C),\ldots,u^{(N)}(t,C),z,x(t,C),t)\Big)^{\top}\psi(z,t,C) -$$

$$-p(z,C)\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(z)\frac{\partial}{\partial x}F_i(u^{(1)}(t,C),\ldots,u^{(N)}(t,C),z,x(t,C),t), \tag{6.1}$$

$$\psi(z,v,C) = p(z,C)\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(z)\frac{\partial}{\partial x}\Phi_i(x(v,C)). \tag{6.2}$$

2) Используем необходимое условие экстремума по ω. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial\omega}W(u^{(1)}(\cdot,C),\ldots,u^{(N)}(\cdot,C),x(\cdot,C),\omega(C),C) = 1 + \int_z p(z,C)(-1)\mu(dz) = 0.$$

Таким образом,

$$\int_Z p(z,C)\mu(dz) = 1. \tag{6.3}$$

3) Используем необходимое условие максимума функционала W и $u^{(i)}(\cdot)$, $i=\overline{1,N}$. Пусть $u^{(i)}(\cdot)$, $i=\overline{1,N}$, — произвольные измеримые на $[t_*,v]$ функции со значениями $u^{(i)}(t)\in U_i$. Тогда необходимое условие максимума функционала W по $u^{(j)}(\cdot)$ при фиксированных $u^{(i)}(\cdot,C)$, $j\neq i$, $x(\cdot,C)$, $\omega(C)$ с учетом выпуклости множеств U_j дает

$$\Big\langle p(z,C)\int_{t_*}^{v}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(z)\frac{\partial}{\partial u^{(j)}}F_i(u^{(1)}(t,C),\ldots,u^{(N)}(t,C),z,x(t,C),t)dt\,\mu(dz) -$$

$$-2C\int_Z\int_{t_*}^{v}[\dot x(t,C) - f(u^{(1)}(t,C),\ldots,u^{(N)}(t,C),z,x(t,C),t)]\times$$

$$\times\Big(-\frac{\partial}{\partial u^{(j)}}f(u^{(1)}(t,C),\ldots,u^{(N)}(t,C),z,x(t,C),t)\Big)dt\,\mu(dz),\ u^{(j)}(t)-u^{(j)}(t,C)\Big\rangle \le 0.$$

Так как $u^{(j)}(\cdot)$ выбирались произвольно, то отсюда вытекает, что при почти всех $t\in[t_*,v]$ управления $u^{(j)}(\cdot,C)$ должны удовлетворять неравенству

$$\Big\langle \int_Z\int_{t_*}^{v}\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial u^{(j)}}f(u^{(1)}(t,C),\ldots,u^{(N)}(t,C),z,x(t,C),t)\Big)^{\top}\psi(z,t,C) +$$

$$+p(z,C)\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(z)\frac{\partial}{\partial u^{(j)}}F_i(u^{(1)}(t,C),\ldots,u^{(N)}(t,C),z,x(t,C),t)\Big]dt\,\mu(dz),\ u^{(j)}(t)-u^{(j)}(t,C)\Big\rangle \le 0 \tag{6.4}$$

для всех $u^{(j)}\in U_j$, $j=\overline{1,N}$.

Пусть последовательности $u_n^{(i)}(\cdot,C)$, $i=\overline{1,N}$, $x_n(\cdot,C)$, $\omega_n(C)$ таковы, что при фиксированном C

$$\lim_{n\to\infty}W(u_n^{(1)}(\cdot,C),\ldots,u_n^{(N)}(\cdot,C),x_n(\cdot,C),\omega_n(C),C) =$$

$$= \sup_{x(\cdot,C),u_n^{(1)}(\cdot,C),\ldots,u_n^{(N)}(\cdot,C)} W(u_n^{(1)}(\cdot,C),\ldots,u_n^{(N)}(\cdot,C),x(\cdot,C),\omega(C),C) = \widetilde W(C).$$

Так как $\widetilde W(C)$ — величина конечная, то нормы $\|\psi_n(z,\cdot,C)\|$ в пространстве $L_2[t_*,v]$, где

$$\psi_n(t,z,C) = 2C(\dot x_n(t,C) - f(u_n^{(1)}(t,C),\ldots,u_n^{(N)}(t,C),x_n(t,C),t,z)),$$

ограничены при всех $z \in Z$. В силу непрерывности и ограниченности функции f и компактности множества Z существует такой непустой шар $X \subset R^n$, что $x(t_*) \in X$ и $x_n(\cdot, C)$ равномерно по n, C, $t \in [t_*, v]$ ограничены на X.

Следовательно, с учетом неравенства

$$|\dot{x}_n(t,C)| \leq \frac{1}{2C}|\psi_n(t,z,C)| + |f(u_n^{(1)}(t,C),\dots,u_n^{(N)}(t,C),x_n(t,C),t,z)|$$

можно выбрать подпоследовательность $x_k(\cdot, C)$, сходящуюся равномерно к абсолютно непрерывной функции $x^*(\cdot, C)$, $x^*(t,C) \in X$ при всех $t \in [t_*, v]$. При этом $\dot{x}_k(\cdot, C) \to \dot{x}^*(\cdot, C)$ слабо в $L_2[t_*, v]$.

В силу слабой компактности множества D можно выбрать последовательность $C_k \to \infty$ так, чтобы $\omega(C_k) \to \omega^*$, $x(\cdot, C_k) \to x^*(\cdot)$ равномерно, $(u^{(1)}(\cdot, C_k), \dots, u^{(N)}(\cdot, C_k)) \to (u^{(1)*}(\cdot), \dots, u^{(N)*}(\cdot))$ почти всюду на $[t_*, v]$, т. е.

$$\begin{aligned}\lim_{C\to\infty}\omega(C) = \lim_{C\to\infty}\widetilde{W}(C) = \lim_{C\to\infty} \sup_{(u^{(1)}(\cdot,C),\dots,u^{(N)}(\cdot,C))\in D_1\times\dots\times D_N} \inf_{z\in Z}\Bigg[\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(z)\Phi_i(x(v,C)) + \\ + \int_{t_*}^{v}\left(\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(z)F_i(u^{(1)}(t,C),\dots,u^{(N)}(t,C),z,x(t,C),t)\right)dt\Bigg] = \\ = \sup_{(u^{(1)}(\cdot),\dots,u^{(N)}(\cdot))\in D_1\times\dots\times D_N}\inf_{z\in Z} J(u^{(1)}(\cdot),\dots,u^{(N)}(\cdot),z) = J^*. \quad (6.5)\end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\lambda_k = \left(\int_Z |\psi(z,t,C_k)|\mu(dz) + 1\right)^{-1}, \quad \psi_k(z,t) = \lambda_k\psi(z,t,C_k).$$

Так как

$$\lambda_k + \int_Z |\psi_k(z,t)|\mu(dz) = \lambda_k\left(1 + \int_Z |\psi(z,t,C_k)|\mu(dz)\right) = 1,$$

то λ_k, $\psi_k(z,t)$ не равны одновременно нулю и ограничены в совокупности единицей при всех k. Поэтому можно выделить подпоследовательность $C_{k_n} \to \infty$ при $n \to \infty$, чтобы $\lambda_{k_n} \to \lambda_0$, $p(z, C_k) = p_k(z) \to p(z)$. Из (6.3) имеем $\int\limits_Z p(z)\mu(dz) = 1$, а из (6.5) — $p(z) = 0$ при $z \notin \operatorname{Arg}\inf\limits_{z\in Z} J(u^{(1)*}(\cdot),\dots,u^{(N)*}(\cdot),z)$. Умножая соотношения (6.1), (6.2), (6.4) на λ_{k_n} и переходя к пределу при $C_{k_n} \to \infty$, получаем $\psi_{k_n}(z,t) \to \psi(z,t)$ при $t \in [t_*, v]$ и все утверждения теоремы. □

Литература

1. Бардин А.Е., Кирсанов Е.В. *Абсолютно кооперативное решение* // Динамические системы: Сб. научн. тр.– Псков: Псковский пед. ин-т, 1994. – С. 70–73.
2. Данилов Н.Н., Зенкевич Н.А. *Неантагонистические игры двух лиц.* – Кемерово: Изд-во Кемеровск. ун-та, 1990. – 99 с.
3. Жуковский В.И. *Кооперативные игры при неопределенности и их приложения.* – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 336 с.
4. Жуковский В.И., Чикрий А.А. *Линейно-квадратичные дифференциальные игры.* – Киев: Наук. думка, 1994. – 320 с.
5. Зенкевич Н.А., Ширяев В.Д. *Игры со многими участниками.* – Саранск: Изд-во Мордовск. ун-та, 1989. – 218 с.
6. Клейменов А.Ф. *Неантагонистические позиционные дифференциальные игры.* – Екатеринбург: Наука, 1993.– 184 с.
7. *Многокритериальные и игровые задачи при неопределнности* / Тез. докл. IV международного семинара (8–14 сентября 1996). – М., 1996.

8. Горелик В.А. *Максиминные задачи на связанных множествах в банаховых пространствах* // Кибернетика. – 1983. – № 1. – С. 64–67.
9. Горелик В.А., Тараканов А.Ф. *Метод штрафов и принцип максимума для минимаксных задач управления с переменной структурой* // Кибернетика. – 1992. – № 3. – С. 125–130.
10. Федоров В.В. *Численные методы максимина.* – М.: Наука, 1979. – 280 с.
11. Карлин С. *Математические методы в теории игр, программировании и экономике.* – М.: Мир, 1964. – 838 с.
12. Тараканов А.Ф. *Оптимальное управление динамическими системами в условиях неопределенности*: Дисс. … докт. физ.-матем. наук. – Балашов, 1995. – 265 с.

Балашовский филиал
Саратовского государственного
университета

Поступили
первый вариант 10.07.2002
окончательный вариант 16.06.2003