ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 3 (454)

УДК 517.518

Г.А. АКИШЕВ, С.Т. МАХАШЕВ

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЕ ХААРА

Обозначим через L_q пространство всех измеримых по Лебегу на $[0,1]$ функций $f(x)$, для которых

$$\|f\|_q = \left\{ \int_0^1 |f(x)|^q dx \right\}^{1/q} < +\infty \quad 1 \le q < \infty.$$

Пусть дана последовательность $\{p_n\}$ натуральных чисел таких, что $p_n \ge 2$, $n = 1, 2, \dots$ Обобщенную систему Хаара $\chi\{p_k\} = \{\chi_n(t)\}$ на отрезке $[0,1]$ определим следующим образом ([1], [2]). Положим $\chi_1(t) \equiv 1$ на $[0,1]$, если $n \ge 2$, то $n = m_k + r(p_{k+1} - 1) + s$, где $m_k = p_1 p_2 \dots p_k$; $k = 0, 1, \dots$; $r = 0, 1, \dots, m_k - 1$; $s = 1, 2, \dots, p_{k+1} - 1$. Через A обозначим множество точек вида $\frac{l}{m_k}$ на отрезке $[0,1]$. Тогда, если $t \in B$, где $B \equiv [0,1] \setminus A$, разложение

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(t)}{m_k}, \quad \alpha_k(t) = 0, 1, \dots, p_k - 1,$$

единственно. Теперь определим функцию

$$\chi_n(t) = \chi^s_{k,r}(t) = \begin{cases} \sqrt{m_k}\, \exp \dfrac{2\pi i s \alpha_{k+1}(t)}{p_{k+1}}, & t \in \left(\dfrac{r}{m_k}, \dfrac{r+1}{m_k}\right) \cap B, \\ 0, & t \notin \left[\dfrac{r}{m_k}, \dfrac{r+1}{m_k}\right]. \end{cases}$$

Пользуясь тем, что множество B всюду плотно на $[0,1]$, функцию $\chi_n(t)$ по непрерывности продолжим на интервал $\left(\frac{r}{m_k}, \frac{r+1}{m_k}\right)$. После этого в точках разрыва функцию $\chi_n(t)$ положим равной полусумме ее предельных значений справа и слева, а на концах отрезка $[0,1]$ — ее предельным значениям изнутри отрезка.

Так определенная система $\chi\{p_n\}$ ортонормирована и полна в пространстве L_1 [1]. Если $p_n = 2$ для всех $n \ge 1$, то $\chi\{p_n\}$ будет классической системой Хаара.

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями: $S_n(f,t) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(f)\chi_k(t)$ — частичная сумма ряда Фурье, а $a_k(f)$ — коэффициенты Фурье функций $f \in L_1$ по обобщенной системе Хаара; $E_n(f)_q = \inf\limits_{\{b_k\}} \left\| f - \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \chi_k \right\|_q$ — наилучшее приближение функций $f \in L_q$, $1 \le q < +\infty$ полиномами по системе $\chi\{p_n\}$.

Положим $\triangle_{k,r} = \left(\frac{r-1}{m_k}, \frac{r}{m_k}\right) : r = 1, 2, \dots, m_k$; $k = 0, 1, \dots$ Величина $\omega(f,\delta)_q = \sup\limits_{0 \le h \le \delta} \left\{ \int\limits_0^{1-h} |f(x+h) - f(x)|^q dx \right\}^{1/q}$ называется модулем непрерывности функций $f \in L_q$.

Рассмотрим функциональные классы $H^\omega_q = \{f \in L_q : \omega(f,\delta)_q \le \omega(\delta),\ 0 \le \delta \le 1\}$, где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности, и $E_q(\lambda) = \{f \in L_q[0,1] : E_n(f)_q \le \lambda_n\}$, где $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — последовательность положительных чисел такая, что $\lambda_n \downarrow 0$, $n \to \infty$. Через $C(p,q,\dots)$ будем обозначать положительные постоянные, зависящие от указанных параметров.

Условие абсолютной и равномерной сходимости ряда Фурье–Хаара в терминах модуля непрерывности и наилучшего приближения исследованы в [3], [4], для обобшенной системы Хаара изучены в [5] (см. также [6]).

В данной статье установлены условия абсолютной и равномерной сходимости ряда Фурье по обобщенной системе Хаара $\chi\{p_n\}$ функции из классов H_q^{ω}, $E_q(\lambda)$.

Из определения функций χ_n ([1], с. 300) следует

Лемма 1. *Пусть обобщенная система Хаара $\chi\{p_n\}$ определена последовательностью $\{p_n\}$ натуральных чисел $p_n \geq 2$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{x\in[0,1]} \left\| \sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} \chi_n(x)\chi_n(\cdot) \right\|_q = m_k^{1-1/q}.$$

В дальнейшем будем рассматривать обобщенную систему Хаара $\chi\{p_n\}$, определенную ограниченной последовательностью $\{p_n\}$.

Теорема 1. *Если $f \in L_q$, $1 < q < +\infty$, и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/q-1} E_n(f)_q < +\infty, \tag{1}$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)\chi_n(t)| \tag{2}$$

равномерно сходится на $[0, 1]$.

Доказательство. Пусть M, N — произвольные натуральные числа. Выберем натуральные числа l и v такие, что $m_{l-1} < M \leq m_l$; $m_{v-1} < N \leq m_v$. В силу ортогональности обобщенной системы Хаара и неравенства Гёльдера получим

$$\sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} |a_n(f)\chi_n(x)| \leq \left\| \sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} a_n(f)\chi_n \right\|_q \left\| \sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} \varepsilon_n(x)\chi_n(x)\chi_n(\cdot) \right\|_{q'}, \tag{3}$$

где $\varepsilon_n(x) = \exp\{-i \arg(a_n(f)\chi_n(x))\}$ и $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, при каждом $x \in [0, 1]$.

При условии $\sup\limits_n p_n < +\infty$ обобщенная система Хаара является безусловным базисом ([7]) в пространстве L_q, $1 < q < \infty$. Поэтому, учитывая лемму 1, будем иметь

$$\left\| \sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} \varepsilon_n(x)\chi_n(x)\chi_n(\cdot) \right\|_{q'} \leq C_q \left\| \sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} \chi_n(x)\chi_n(\cdot) \right\|_{q'} \leq C_q m_k^{1/q}$$

для любого $x \in [0, 1]$. Следовательно, пользуясь неравенством (3), получим

$$\sum_{n=M+1}^{N} |a_n(f)\chi_n(x)| \leq C_q \sum_{k=l-1}^{v-1} m_k^{1/q} \left\| \sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} a_n(f)\chi_n(\cdot) \right\|_q \tag{4}$$

при каждом фиксированном $x \in [0, 1]$. В силу оценки [1]

$$\left\| \sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} a_n(f)\chi_n(\cdot) \right\|_q \leq C_q E_{m_k}(f)_q$$

и монотонности наилучшего приближения из (4) получим

$$\sum_{n=M+1}^{N} |a_n(f)\chi_n(x)| \leq C_q \sum_{n=m_{l-1}+1}^{m_{v-1}} n^{1/q-1} E_n(f)_q$$

для любого $x \in [0,1]$, $m_{l-1} < M \le m_l$, $m_{v-1} < N \le m_v$. На основании условия (1) отсюда следует равномерная сходимость ряда (2) на $[0,1]$. $\square$

Теорема 2. *Пусть* $1 < q < \infty$ *и* $\lambda_n \downarrow 0$, $n \to \infty$. *Для того чтобы для любой функции* $f \in E_q(\lambda)$ *ряд* (2) *равномерно сходился на* $[0,1]$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/q-1}\lambda_n < +\infty. \tag{5}$$

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 1. Докажем необходимость. Пусть для любой функции $f \in E_q(\lambda)$ ряд (2) равномерно сходится на $[0,1]$. Допустим, что условие (5) не выполняется, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/q-1}\lambda_n = +\infty. \tag{6}$$

Положим $n_1 = 1$ и $n_{k+1} = \min\{n : \lambda_n \le \frac{1}{2}\lambda_{n_k}\}$, $k \ge 1$. Тогда

$$\lambda_{n_{k+1}} \le 2^{-1}\lambda_{n_k}; \quad \lambda_{n_{k+1}-1} > 2^{-1}\lambda_{n_k}. \tag{7}$$

Далее положим $\nu(k) = \max\{j : m_j < n_{k+1}\}$. Ясно, что $m_{\nu(k)} < n_{k+1} \le m_{\nu(k)+1}$. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m_{\nu(k)}^{1/q-1/2}\lambda_{n_k}\chi_{m_{\nu(k)}+1}(t)$, $t \in [0,1]$. В силу равенства

$$\|\chi_{m_{\nu(k)}+1}\|_q = m_{\nu(k)}^{1/q-1/2} \tag{8}$$

и первого неравенства в (7) получим, что этот ряд по норме пространства L_q, $1 < q < \infty$, сходится к некоторой функции $f_0 \in L_q$ и будет рядом Фурье этой функции по системе $\chi\{p_n\}$. Пусть $n_j \le n < n_{j+1}$. Тогда $m_{\nu(j-1)} < n_j$. Пользуясь соотношениями (7) и (8), получим

$$E_n(f_0)_q \le E_{m_{\nu(j-1)}+1}(f_0)_q \le \sum_{k=j}^{\infty} \lambda_{n_k} \le \frac{1}{2}\lambda_{n_j} \le 4\lambda_n.$$

Таким образом, $4^{-1}f_0 \in E_q(\lambda)$. По определению функции системы $\chi\{p_n\}$ при любом l будем иметь

$$\sum_{n=1}^{m_{\nu(l)}+1} |a_n(f_0)\chi_n(0)| \ge \sum_{k=1}^{l} |a_{m_{\nu(k)}}(f_0)| m_{\nu(k)}^{1/q} = \sum_{k=1}^{l} m_{\nu(k)}^{1/q}\lambda_{n_k}. \tag{9}$$

Так как $\lambda_n \downarrow 0$ при $n \to +\infty$ и $\{p_n\}$ ограничена, то

$$\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} n^{1/q-1}\lambda_n \le \lambda_{n_k} \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} n^{1/q-1} \le 2^{1-1/q} q C_0 m_{\nu(k)}^{1/q}\lambda_{n_k}, \quad k \ge 1.$$

Поэтому, учитывая (6), из (9) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f_0)\chi_n(0)| = +\infty.$$

Это противоречит предположению о равномерной сходимости ряда (2) для любой функции $f(x) \in E_q(\lambda)$. $\square$

Теорема 3. *Пусть $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности, $0 \le \delta \le 1$. Для того чтобы для любой функции $f \in H_q^\omega$, $1 < q < +\infty$, ряд (2) равномерно сходился на $[0,1]$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/q-1}\omega(n^{-1}) < +\infty. \tag{10}$$

Доказательство. Достаточность следует из оценки [1]

$$E_n(f)_q \le 12\omega(f, n^{-1})_q, \quad f \in L_q, \ \ 1 \le q < \infty,$$

и теоремы 1.

Необходимость. Пусть для любой функции $f \in H_q^\omega$ ряд (2) равномерно сходится на $[0,1]$. Допустим, что условие (10) не выполняется, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/q-1}\omega(n^{-1}) = +\infty.$$

Тогда по теореме С.Б. Стечкина [8] существует последовательность $\{B(n)\}$ такая, что

$$B(n) \downarrow 0, \ \ n \to +\infty, \quad B(n) \le \omega(n^{-1}), \ \ n = 1, 2, \dots, \tag{11}$$

$$\sum_{n=1}^{N} B(n) \le N\omega(N^{-1}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{1/q-1}B(n) = +\infty. \tag{12}$$

В силу теоремы Коши и ограниченности последовательности $\{p_n\}$ из (12) следует

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k^{1/q}B(m_k) = +\infty. \tag{13}$$

Построим возрастающую последовательность номеров $\{n_j\}$ такую, что

$$\sum_{j=k}^{\infty} B^q(m_{n_j}) = O(B^q(m_{n_k})), \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_{n_j}^{1/q}B(m_{n_j}) = +\infty. \tag{15}$$

Для этого положим $k_{i+1} = \min\{k : B(m_k) \le \frac{1}{2}B(m_{k_i})\}$. Тогда

$$B(m_{k_{i+1}}) \le 2^{-1}B(m_{k_i}), \tag{16}$$

$$B(m_k) > 2^{-1}B(m_{k_i}), \quad k = k_i, \dots, k_{i+1} - 1. \tag{17}$$

Такой номер k_{i+1} существует, т. к. $B(m_k) \downarrow 0$, $k \to +\infty$. В силу монотонности последовательности $\{B(n)\}$ и неравенства (17) получим

$$\sum_{k=k_{i-1}}^{k_i=1} m_k^{1/q}B(m_k) \le C_q m_{k_i-1}^{1/q}B(m_{k_i-1}). \tag{18}$$

Поэтому (см. (13)) $\sum\limits_{i=2}^{\infty} m_{k_i-1}^{1/q}B(m_{k_i-1}) = +\infty$. Отсюда следует, что по крайней мере один из рядов $\sum\limits_{j=1}^{\infty} m_{k_{2j+1}-1}^{1/q}B(m_{k_{2j+1}-1})$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} m_{k_{2j}-1}^{1/q}B(m_{k_{2j}-1})$ расходится.

Если расходится первый из этих рядов, то положим $n_j = k_{2j+1} - 1$, в противном случае $n_j = k_{2j} - 1$. Тогда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} m_{n_j}^{1/q} B(m_{n_j}) = +\infty$. Соотношение (15) доказано. Докажем (14). Из неравенств (16) следует

$$B(m_{n_{j+1}}) \le 2^{-1} B(m_{n_j}) \quad \forall j \ge 1. \tag{19}$$

Пользуясь этим неравенством, легко убедиться в справедливости соотношения (14). Далее, положим $A_k = \sum\limits_{j=1}^{k} m_{n_j}^{1/q} B(m_{n_j})$, $D_k = \sum\limits_{j=1}^{k} m_{n_j}^{1/q} B(m_{n_j})/A_j$, $F_j = m_{n_j}^{1/q} B(m_{n_j})/A_j D_j$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} F_j = +\infty. \tag{20}$$

Определим функцию

$$f_0(t) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{j+1} 2p_{n_j+1}}{p_{n_j+1}} F_j, \quad \text{при} \;\; t = \dfrac{p_{n_j+1}+1}{2m_{n_j+1}}, \;\; j = 1, 2, \ldots, \\ 0, \quad \text{при} \;\; t = 0, \;\; t \in \Big[\dfrac{1}{p_1}, 1\Big], \;\; t \in \Big[\dfrac{1}{m_{k+1}}, \dfrac{1}{m_k}\Big], \;\; k \ne n_j, \\ \text{линейна на каждом из отрезков} \;\; \Big[\dfrac{1}{m_{n_j+1}}, \dfrac{p_{n_j+1}+1}{2m_{n_j+1}}\Big], \; \Big[\dfrac{p_{n_j+1}+1}{2m_{n_j+1}}, \dfrac{1}{m_{n_j}}\Big]. \end{cases}$$

Учитывая определение функции $f_0(t)$, $t \in [0,1]$, и неравенство (19), нетрудно убедиться, что $f_0 \in L_q$, $1 \le q < \infty$. Докажем, что $f_0 \in H_q^{\omega}$. Выберем натуральное число N так, что $m_{N+1}^{-1} < h < m_N^{-1}$. Тогда

$$\int_0^{1-h} |f_0(t+h) - f_0(t)|^q \, dt = \int_0^{m_{N-1}^{-1}} |f_0(t+h) - f_0(t)|^q \, dt + \int_{m_{N-1}^{-1}}^{1-h} |f_0(t+h) - f_0(t)|^q \, dt = I_1 + I_2. \tag{21}$$

Оценим интеграл I_1. Пусть $v(N)$ — наименьшее из чисел j со свойством $(p_{n_j+1}+1)(2m_{n_j+1}^{-1}) \in [0; m_{N+1}^{-1}]$. По свойству модуля числа и в силу неравенства $(a+b)^{\theta} \le 2^{\theta-1}(a^{\theta} + b^{\theta})$, $1 \le \theta < \infty$, получим

$$I_1 \le 2^{q-1} \Big[\int_0^{m_{N-1}^{-1}} |f_0(t+h)|^q \, dt + \int_0^{m_{N-1}^{-1}} |f_0(t)|^q \, dt \Big]. \tag{22}$$

В первом интеграле в правой части оценки (22), делая замену переменных $t + h = x$, будем иметь

$$\int_0^{m_{N-1}^{-1}} |f_0(t+h)|^q \, dt \le \int_{m_{N+1}^{-1}}^{(p_N+1)m_N^{-1}} |f_0(x)|^q \, dx. \tag{23}$$

Учитывая определение функции f_0, получим

$$\int_0^{m_{N-1}^{-1}} |f_0(t)|^q \, dt = \sum_{k=v(N)}^{\infty} \int_{m_{n_k+1}^{-1}}^{m_{n_k}^{-1}} |f_0(t)|^q \, dt + \int_{m_{N+1}^{-1}}^{m_{N-1}^{-1}} |f_0(t)|^q \, dt. \tag{24}$$

Из неравенств (22)–(24) следует, что

$$I_1 \le 2^{q-1}\left[2\int\limits_{m_{N+1}^{-1}}^{m_{N-1}^{-1}} |f_0(t)|^q\,dt + \int\limits_{m_{N-1}^{-1}}^{(p_N+1)m_N^{-1}} |f_0(t)|^q\,dt + \sum_{k=v(N)}^{\infty}\int\limits_{m_{n_k+1}^{-1}}^{m_{n_k}^{-1}} |f_0(t)|^q\,dt\right]. \tag{25}$$

Из определения функции f_0 видно, что

$$|f_0(t)| \le 2p_{n_j+1}(p_{n_j+1}-1)^{-1}F_j \quad \forall\, t\in[0,1].$$

Поэтому, учитывая, что $p_n \le C_0\ \forall\, n\ge 1$, получим

$$\int\limits_{m_{n_k+1}^{-1}}^{m_{n_k}^{-1}} |f_0(t)|^q\,dt \le (4F_k)^q m_{n_k}^{-1} \le (4B(m_{n_k}))^q, \quad k\ge v(N). \tag{26}$$

Аналогично доказываются неравенства

$$\int\limits_{m_{N-1}^{-1}}^{(p_N+1)m_N^{-1}} |f_0(t)|^q\,dt \le C_q\omega^q(h), \tag{27}$$

$$\int\limits_{m_{N+1}^{-1}}^{m_{N-1}^{-1}} |f_0(t)|^q\,dt \le (4\omega(m_N^{-1}))^q \le C_q\omega^q(h). \tag{28}$$

С помощью неравенств (26)–(28) и (19), (12) из (25) получим

$$I_1 \le C_q\left[\omega^q(h) + \sum_{k=v(N)}^{\infty} B^q(m_{n_k})\right] \le C_q\omega^q(h). \tag{29}$$

Оценим I_2. По определению функции f_0 будем иметь

$$I_2 = \int\limits_{m_{N-1}^{-1}}^{1/p_1} |f_0(t+h)-f_0(t)|^q\,dt = \sum_{j=1}^{v(N)-1}\int\limits_{m_{n_j+1}^{-1}-h}^{m_{n_j}^{-1}} |f_0(x+h)-f_0(x)|^q\,dx. \tag{30}$$

Непосредственным вычислением получим

$$\int\limits_{m_{n_j+1}^{-1}-h}^{m_{n_j}^{-1}} |f_0(x+h)-f_0(x)|^q\,dx \le (h4p_{n_j+1}(p_{n_j+1}-1)^{-2}F_j m_{n_j+1})^q(p_{n_j+1}-1)m_{n_j+1}^{-1},\ \ j=1,2,\dots,v(N)-1.$$

Подставляя в равенство (30), имеем

$$I_2 \le (4h)^q \sum_{j=1}^{v(N)-1}[p_{n_j+1}(p_{n_j+1}-1)^{-2}F_j m_{n_j+1}]^q\,\frac{p_{n_j+1}-1}{m_{n_j+1}} \le (16h)^q \sum_{j=1}^{v(N)-1} m_{n_j}^q B^q(m_{n_j}). \tag{31}$$

В силу $B(n)\downarrow 0$, $n\to+\infty$, и $2\le p_n\le C_0$, $n=1,2,3,\dots$, нетрудно убедиться, что

$$\sum_{j=1}^{v(N)-1} m_{n_j}^q B^q(m_{n_j}) \le C_q \sum_{j=1}^{v(N)-1}\sum_{l=n_j-1}^{n_j-1} m_l^q B^q(m_l) \le C_q \sum_{s=1}^{m_{\tau(N)-1}} s^{q-1}B^q(s), \tag{32}$$

где $\tau(N) = n_{v(N)-1}$. Пользуясь свойством $n\omega(\frac{1}{n}) \uparrow$ при $n \to +\infty$ и первым соотношением в (12), получим

$$\sum_{s=1}^{m_{\tau(N)-1}} s^{q-1} B^q(s) \le C_q \Big(m_{\tau(N)-1} \omega\Big(\frac{1}{m_{\tau(N)-1}}\Big)\Big)^q.$$

Поэтому из (31) и (32) следует

$$I_2 \le C_q h^q \Big(m_{\tau(N)-1} \omega\Big(\frac{1}{m_{\tau(N)-1}}\Big)\Big)^q. \tag{33}$$

Учитывая выбор номера $\nu(N)$, легко убедиться, что $m_{N+1}^{-1} \le m_{\tau(N)}^{-1}$. Следовательно, $\tau(N) < N+1$, т.е. $\tau(N) - 1 < N$. Тогда по выбору номера N имеет место неравенство $h < m_{\tau(N)-1}^{-1}$. Поэтому учитывая, что $\delta^{-1}\omega(\delta)$ убывает на $[0,1]$, из (33) будем иметь

$$I_2 \le C_q \omega^q(h). \tag{34}$$

Из неравенств (21), (29) и (34) следует $\omega(f_0 \delta)_q \le C_q \omega(\delta)$, $0 < \delta \le 1$. Значит, функция $g_0(t) = \frac{1}{C_q} f_0(t) \in H_q^\omega$. Теперь докажем, что ряд (2) расходится в точке $x = 0$. По определению функций системы $\chi\{p_n\}$ и модуля комплексного числа получим

$$|a_{m_{n_j}+1}(g_0)\chi_{m_{n_j}+1}(0)| = \frac{m_{n_j}}{c_q} \Bigg[\Big(b_0 + \sum_{l=1}^{p_{n_j+1}-1} b_l \cos \frac{2\pi l}{p_{n_j}+1} \Big)^2 + \Big(\sum_{l=1}^{p_{n_j+1}-1} \sin \frac{2\pi l}{p_{n_j}+1} \Big)^2 \Bigg]^{1/2}, \tag{35}$$

где

$$b_l = \int_{l m_{n_j+1}^{-1}}^{(l+1) m_{n_j+1}^{-1}} f_0(t)\,dt, \quad l = 0, 1, \dots, p_{n_j+1} - 1, \quad \forall j \ge 1.$$

Так как $[\frac{l}{m_{n_j+1}}, \frac{1+l}{m_{n_j+1}}] \subset [\frac{1}{m_{n_j+1}}, \frac{1}{m_{n_j}}]$ при $l = 1, 2, \dots, p_{n_j+1} - 1$, то, пользуясь определением функции $f_0(t)$, непосредственным вычислением можно убедиться, что $b_l = \frac{(-1)^{j+1} 2F_j}{(p_{n_j+1}-1)^2 m_{n_j}} \gamma_l$, $l = 1, 2, \dots, p_{n_j+1} - 1$, где $\gamma_l = 2l - 1$, если $l = 1, 2, \dots, [\frac{p_{n_j+1}+1}{2}] - 1$; $\gamma_l = 2(p_{n_j+1} - l) - 1$, если $l = [\frac{p_{n_j+1}+1}{2}] + 1, \dots, p_{n_j+1} - 1$. Если $l = [\frac{p_{n_j+1}+1}{2}]$, то $\gamma_l = (p_{n_j+1} - 2)$ при нечетном p_{n_j+1} и $\gamma_l = (p_{n_j+1} - \frac{3}{2})$ при четном p_{n_j+1}. Запись $[y]$ означает целую часть числа y. Пользуясь этими значениями b_l и учитывая, что $2 \le p_n \le C_0$, $n = 1, 2, \dots$, из равенства (35) получим $|a_{m_{n_j}+1}(g_0)\chi_{m_{n_j}+1}(0)| \ge c_q F_j \ \forall j$. Следовательно, в силу соотношения (20) будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(g_0)\chi_n(0)| = +\infty$$

для функции $g_0 \in H_q^\omega$. Это противоречит предположению о том, что для любой функции $f \in H_q^\omega$ ряд (2) равномерно сходится на $[0,1]$. $\square$

Замечание 1. В случае $p_n = 2$, $n = 1, 2, \dots$ (система Хаара) из теоремы 3 следуют результаты П.Л. Ульянова [3] и С.Г. Прибегина [9]. Теоремы 1 и 2, 3 ранее были анонсированы в [10].

Замечание 2. При $\sup_n p_n < +\infty$ условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/q-1} E_n(f)_q < +\infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} m_k^{1/q} E_{m_k+1}(f)_q < +\infty$$

эквивалентны.

Поэтому условие
$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k^{1/q} E_{m_k+1}(f)_q < +\infty \tag{36}$$
достаточно для равномерной сходимости ряда (2) на отрезке $[0,1]$.

Теперь докажем, что при неограниченности последовательности $\{p_n\}$ условие (36) недостаточно для справедливости утверждения теоремы 1.

Теорема 4. *Пусть* $\sup\limits_n p_n = +\infty$. *Тогда существует функция* $f_0 \in L_q[0,1]$ *такая, что условие* (36) *выполняется, но ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n(f_0)\chi_n(t)|$ *не будет сходиться равномерно на* $[0,1]$.

Доказательство. Так как последовательность $\{p_n\}$ неограничена, можно выбрать такую последовательность номеров $n(k)$, что $m_{n(k)} < p_{n(k+1)}$. Построим функцию
$$f_0(t) = \sum_{j=1}^{\infty} m_{n(j)}^{-1/2} \chi_{m_{n(j)}+1}(t).$$
Легко убедиться, что $f_0 \in L_q[0,1]$. Пусть $n(j) \le k < n(j+1)$. Тогда, учитывая монотонность наилучшего приближения, получим
$$E_{m_k+1}(f_0)_q \le E_{m_{n(j)}+1}(f_0)_q \le \sum_{l=j+1}^{\infty} m_{n(l)}^{-1/2} \le C_q m_{n(j+1)}^{-1/q}.$$
Поэтому, учитывая, что $p_n \ge 2$, $n \ge 1$, и $m_{n(k)} < p_{n(k+1)}$, $k \ge 1$, получим
$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k^{1/q} E_{m_k+1}(f_0)_q \le C(q) \sum_{j=0}^{\infty} m_{n(j+1)}^{-1/q} \sum_{k=n(j)}^{n(j+1)-1} m_k^{1/q} \le$$
$$\le C(q) \sum_{j=0}^{\infty} m_{n(j+1)}^{-1/q} m_{n(j+1)-1}^{1/q} \le C(q) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m_{n(j)}}\right)^{1/q} < +\infty.$$
Таким образом, функция $f_0 \in L_q$ удовлетворяет условию (36). По определению системы $\{\chi_n(t)\}$ получим
$$\sum_{n=1}^{m_{n(l)}} |a_n(f_0)\chi_n(0)| = \sum_{j=1}^{l-1} |a_{m_{n(j)}+1}(f_0)\chi_{m_{n(j)}+1}(0)| = \sum_{j=1}^{l-1} m_{n(j)}^{-1/2} m_{n(j)}^{1/2} = l-1.$$
Переходя к пределу при $l \to +\infty$, имеем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n(f_0)\chi_n(0)| = +\infty$. $\square$

В заключение авторы благодарят рецензента за полезное замечание.

Литература

1. Голубов Б.И. *Об одном классе полных ортогональных систем* // Сиб. матем. журн. – 1968. – Т. 9. – С. 297–314.
2. Виленкин Н.Я. *Об одном классе полных ортонормальных систем* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1947. – Т. 11. – С. 363–400.
3. Ульянов П.Л. *Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье* // Матем. сб. – 1967. – Т. 72. – С. 193–225.
4. Ciesielski Z., Musielak I. *On absolute convergence of Haar series* // Colloq. Math. – 1959. – V. 7. – P. 61–65.
5. Голубов Б.И, Рубинштейн А.И. *Об одном классе систем сходимости* // Матем. сб. – 1966. – Т. 71. – С. 93–112.

6. Жижиашвили Л.В. *Некоторые вопросы многомерного гармонического анализа.* – Тбилиси: Изд-во Тбилиск. ун-та, 1983. – 114 с.
7. Vlasova E.A. *Convergence of series with respect to generalized Haar systems* // Anal. Math. – 1987. – V. 13. – № 4. – P. 339–360
8. Стечкин С.Б. *Об абсолютной сходимости рядов Фурье* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1953. – Т. 17. – № 2. – С. 87–98.
9. Прибегин С.Г. *Об абсолютной сходимости рядов Фурье–Хаара* // Изв. вузов. Математика. – 1981. – № 8. – С. 77–82.
10. Акишев Г.А., Махашев С.Т. *Об абсолютной сходимости рядов Фурье по обобщенной системе Хаара* // Материалы междунар. конф. “Матем. модел. в естественных науках”. – Алматы, 1997. – С. 51.

Карагандинский государственный университет

Поступила
27.04.1998