ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 1 (536)

УДК 517.983

В.М. БРУК

ОБ ОБРАТИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЯХ, ПОРОЖДЕННЫХ РАВНОМЕРНО КОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧЕЙ И НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ОПЕРАТОРНОЙ ФУНКЦИЕЙ

1. В данной работе описываются обратимые сужения максимального отношения, порожденного неотрицательной операторной функцией и дифференциальным выражением первого порядка, для которого задача Коши является равномерно корректной.

Отметим, что общее определение отношения, порожденного парой линейных операторов, приведено в [1]. В ряде работ (напр., [2]–[6]) изучались различные вопросы спектральной теории линейных отношений, порожденных неотрицательной матричной функцией и различными формально самосопряженными дифференциальными выражениями, и, в частности, в [3]–[6] описывались резольвенты и обобщенные резольвенты. В [2]–[4] и отчасти в [5] предполагалось, что основное пространство конечномерно. В бесконечномерном случае ситуация усложняется не только тем, что среди операторных коэффициентов могут быть неограниченные операторы. Одна из трудностей, которая возникает в бесконечномерном случае, заключается в том, что ядро максимального отношения содержит элементы, не являющиеся функциями со значениями в исходном пространстве. В работах [5], [6], где в бесконечномерном случае описывались обобщенные резольвенты симметрических отношений, порожденных формально самосопряженным выражением и неотрицательной операторной функцией, заранее предполагалось выполненным условие, гарантирующее отсутствие таких элементов в ядре максимального отношения.

В данной работе рассматривается дифференциальное выражение первого порядка с неограниченным операторным коэффициентом, порождающее равномерно корректную задачу Коши. Никаких условий на ядро максимального отношения не накладывается. В теореме 1 описываются такие сужения максимального отношения, обратные к которым являются ограниченными всюду определенными операторами. Устанавливается критерий голоморфности соответствующей операторной функции. В теореме 2 рассматривается ситуация, когда операторы, являющиеся обратными к сужениям максимального отношения, могут быть неограниченными.

2. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ и нормой $\|\cdot\|$; $A(t)$ — сильно измеримая на конечном интервале $[0,b]$ операторная функция, значениями которой являются ограниченные самосопряженные операторы в H такие, что $(A(t)x,x)\geq 0$ для почти всех $t\in[0,b]$ и всех $x\in H$. Предполагается, что норма $\|A(t)\|$ суммируема на $[0,b]$.

На множестве непрерывных на отрезке $[0,b]$ функций со значениями в H введем норму

$$\|y\|_p=\left(\int_0^b\|A^{1p}(t)y(t)\|^p dt\right)^{1/p},\quad 1<p<\infty.$$

Отождествляя с нулем те функции y, для которых $\|y\|_p=0$, а затем производя пополнение, получим банахово пространство, которое обозначим $\mathrm{B}=L_p(H,A(t);0,b)$. Пусть $\widetilde{y}$ — некоторый элемент из B, т. е. класс функций, отождествленных между собой по норме $\|\cdot\|_p$. Чтобы не усложнять терминологии, о функции $y(t)$ из класса $\widetilde{y}$ будем далее часто говорить, что $y(t)$ принадлежит B. Класс функций с представителем y обозначим $\widetilde{y}$.

Пусть $G(t)$ — множество элементов из H, на которых оператор $A(t)$ обращается в нуль, $H(t)$ — ортогональное дополнение в H к $G(t)$, $H = H(t) \oplus G(t)$, $A_0(t)$ — сужение $A(t)$ на $H(t)$. Через $H_\tau(t)$ $(-\infty < \tau < \infty)$ обозначим гильбертову шкалу пространств, порожденную оператором $A_0^{-1}(t)$ ([7], с. 65). При фиксированном t оператор $A_0^\alpha(t)$ $(\alpha > 0)$ отображает непрерывно и взаимно однозначно $H_\beta(t)$ на $H_{\beta+\alpha}(t)$ $(\beta \geq 0)$, и, в частности, $H(t) = H_0(t)$ на $H_\alpha(t)$. Сопряженный к нему оператор $\widehat{A}_0^\alpha(t)$ действует непрерывно и взаимно однозначно из $H_{-\beta-\alpha}(t)$ на $H_{-\beta}(t)$ и является расширением $A_0^\alpha(t)$. Положим $\widetilde{A}_0(t) = A_0^{1-\alpha}(t)\widehat{A}_0^\alpha(t)$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$. Оператор $\widetilde{A}_0(t)$ отображает непрерывно и взаимно однозначно $H_{-\alpha}(t)$ на $H_{1-\alpha}(t)$ и является расширением $A_0(t)$. Через $\widetilde{A}(t)$ обозначим оператор, определенный на $H_{-\alpha}(t) \oplus G(t)$, равный нулю на $G(t)$ и $\widetilde{A}_0(t)$ на $H_{-\alpha}(t)$. Оператор $\widetilde{A}(t)$ является расширением $A(t)$.

Так же, как в [5], где исследован случай $p = 2$, доказывается, что пространства $H_{-1/p}(t)$ измеримы по параметру t ([8], с. 28), если в качестве измеримых функций взять функции вида $\widetilde{A}_0^{-1}(t)A^{1/q}(t)h(t)$, где $h(t)$ — измеримая функция со значениями в H, $p^{-1}+q^{-1} = 1$. Пространство B состоит из элементов (т. е. классов функций) с представителями вида $\widetilde{A}_0^{-1}(t)A^{1/q}(t)h(t)$, где $h(t) \in L_p(H; 0, b)$, т. е. $\int\limits_0^b \|h(t)\|^p dt < \infty$.

Сопряженным к B является пространство $\mathrm{B}^* = L_q(H, A(t); 0, b)$, которое получается отождествлением и пополнением по норме

$$\|z\|_q = \left(\int_0^b \|A^{1/q}(t)z(t)\|^q dt\right)^{1/q}, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

Билинейная форма, определяемая двойственностью между B и B^*, обозначается $(\cdot\,,\cdot)$, а действие функционала $\widetilde{g} \in \mathrm{B}^*$ на элемент $\widetilde{f} \in \mathrm{B}$ определяется формулой

$$(\widetilde{f}, \widetilde{g}) = \int_0^b (\widetilde{A}(s)f(s), g(s))ds.$$

Это равенство не зависит от выбора представителей $f \in \widetilde{f}$, $g \in \widetilde{g}$.

Пусть A_1 — замкнутый линейный оператор в H, являющийся производящим оператором полугруппы класса C_0. Это условие равносильно тому, что задача Коши для уравнения $y' - A_1 y = 0$ равномерно корректна ([9], с. 58). На множестве $H_+ = D(A_1^*)$ определим скалярное произведение равенством $(x_1, x_2)_* = (A_1^* x_1, A_1^* x_2) + (x_1, x_2)$. Пространство H_+ можно рассматривать как пространство с позитивной нормой относительно $H_0 = H$ ([7], с. 59). Соответствующее пространство с негативной нормой обозначим H_-. Оператор A_1^* непрерывно отображает H_+ в H. Поэтому сопряженный к нему оператор $\widehat{A}_1$ непрерывно отображает H в H_- и является расширением A_1. Пусть $U(t)$ — полугруппа, порожденная оператором A_1. Из равенства $U(t)x = x + \int\limits_0^t \widehat{A}_1 U(s)x\,ds$ вытекает, что при любом $x \in H$ функция $U(t)x$ сильно дифференцируема в пространстве H_-. Отсюда и из результатов, изложенных в ([9], с. 158) о решении неоднородного уравнения $y' - A_1 y = g(t)$, следует, что для любой функции $g(t) \in L_1(H; 0, b)$ и любого элемента $x \in H$ функция $y(t) = U(t)x + \int\limits_0^t U(t-s)g(s)ds$ абсолютно непрерывна в пространстве H_- и является решением уравнения $y' - \widehat{A}_1 y = g(t)$.

Определим максимальное отношение, порожденное выражением $\widehat{l}[y] = y' - \widehat{A}_1 y$ и функцией $A(t)$. Обозначим через D' множество функций $y(t) \in \mathrm{B}$, удовлетворяющих условиям: а) при всех t функция $y(t)$ принимает значения в H и $y(t)$ абсолютно непрерывна в H_- на $[0, b]$; б) $\widehat{l}[y](t) \in H_{1/q}(t)$ при почти всех t ; в) функция $\widetilde{A}_0^{-1}(t)\widehat{l}[y] \in \mathrm{B}$. Поставим в соответствие каждому классу функций, отождествленных в B с $y \in D'$, класс функций, отождествленных в B с $\widetilde{A}_0^{-1}(t)\widehat{l}[y]$. Это соответствие, вообще говоря, не будет оператором, т. к. может случиться, что функция $y(t)$ отождествлена с нулем в B, а $\widetilde{A}_0^{-1}(t)\widehat{l}[y]$ отлична от нуля. Таким образом, получим

в пространстве B линейное отношение L', замыкание которого обозначим L и назовем максимальным отношением. Минимальное отношение L_0 определим как сужение L на множество элементов $\widetilde{y} \in \mathrm{B}$, обладающих представителями $y \in D'$ со свойством $y(0) = y(b) = 0$.

Отметим, что терминология, относящаяся к линейным отношениям, имеется, напр., в ([7], с. 155; [10], с. 260). Далее упорядоченная пара обозначается символом $\{\,\cdot,\,\cdot\,\}$. Множество элементов z таких, что $\{z, 0\} \in L$, обозначим через $\ker L$.

Пусть $U(t,\lambda)$ — операторная функция, являющаяся сильным решением интегрального уравнения

$$U(t,\lambda)x = U(t)x + \lambda \int_0^t U(t-s)\widetilde{A}(s)U(s,\lambda)x\,ds \quad (x \in H, \quad \lambda \in C) \tag{1}$$

(методом последовательных приближений легко доказывается, что (1) имеет единственное решение). Функция $U(t,\lambda)x$ $(x \in H)$ сильно дифференцируема в пространстве H_- и является решением уравнения $\widehat{l}[y] = \lambda A(t)y$ с начальным условием $y(0) = x$. Ясно, что $U(t,0) = U(t)$. Справедливо равенство

$$U(t,0)x = U(t)x = U(t,\lambda)x - \lambda \int_0^t U(t-s,\lambda)\widetilde{A}(s)U(s)x\,ds. \tag{2}$$

Пусть Q_0 — множество элементов $x \in H$, для которых функция $U(t)x$ отождествлена с нулем в пространстве B, т. е. $\int\limits_0^b \|A^{1/p}(s)U(s)x\|^p ds = 0$. Из равенств (1), (2) следует, что функция $U(t,\lambda)x$ тогда и только тогда отождествлена с нулем в B, когда $x \in Q_0$. Для конечномерного случая этот факт установлен в [11].

Обозначим через Q ортогональное дополнение в H к Q_0, $H = Q \oplus Q_0$. Введем в Q норму

$$\|x\|_- = \left(\int_0^b \|A^{1/p}(s)U(s)x\|^p ds\right)^{1/p} \le \alpha(b)\|x\|, \quad x \in Q. \tag{3}$$

Пополнение Q по этой норме обозначим Q_1. Из равенств (1), (2) следует, что замена в (3) функции $U(s)$ на $U(s,\lambda)$ приводит к тому же множеству Q_1 с эквивалентной нормой. Пусть последовательность $\{x_n\}$ из Q сходится в Q_1 к $x_0 \in Q_1$, и $\widetilde{U}(t,\lambda)x_n$ — класс функций, отождествленных в B с $U(t,\lambda)x_n$. Тогда последовательность $\{\widetilde{U}(t,\lambda)x_n\}$ фундаментальна в пространстве B и, следовательно, сходится к некоторому элементу из B. Этот элемент обозначим $\widetilde{U}(t,\lambda)x_0$. Это обозначение оправдывается тем, что если $x_0 \in Q$, то $\{\widetilde{U}(t,\lambda)x_n\}$ сходится в B к $\widetilde{U}(t,\lambda)x_0$. Обратно, если последовательность $\{\widetilde{U}(t,\lambda)x_n\}$ $(x_n \in Q)$ сходится в B к $\widetilde{y}$, то найдется единственный элемент $x_0 \in Q_1$ такой, что выполняется равенство $\widetilde{y} = \widetilde{U}(t,\lambda)x_0$. Действительно, из (3) следует, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в Q_1, и в качестве x_0 можно взять элемент, к которому сходится $\{x_n\}$. Из этих рассуждений вытекает, что $\widetilde{U}(t,\lambda)x_0$ принадлежит $\ker(L - \lambda E)$ для любого $x_0 \in Q_1$, и $\widetilde{U}(t,\lambda)x_0 \ne 0$ в пространстве B при $x_0 \in Q_1$, $x_0 \ne 0$.

Лемма 1. *Отношение L состоит из множества таких пар $\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in \mathrm{B} \oplus \mathrm{B}$, что*

$$\widetilde{y} = \widetilde{U}(t)x + \widetilde{F}, \tag{4}$$

где $x \in Q_1$, $\widetilde{F}$ — класс функций, отождествленных в B с функцией

$$F(t) = \int_0^t U(t-s)\widetilde{A}(s)f(s)ds. \tag{5}$$

Доказательство. Из рассуждений, приведенных перед леммой, следует, что пара $\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in \mathrm{B} \oplus \mathrm{B}$, для которой выполняется (4), (5), принадлежит L. Пусть теперь $\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in L$.

Тогда найдется последовательность пар $\{\widetilde{y}_n, \widetilde{f}_n\} \in L'$, сходящаяся к паре $\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\}$ в $\mathrm{B} \oplus \mathrm{B}$, причем функцию y_n можно представить в виде

$$y_n(t) = U(t)x_n + \int_0^t U(t-s)\widetilde{A}(s)f_n(s)ds, \tag{6}$$

где $x_n \in Q$. Из сходимости последовательности пар $\{\widetilde{y}_n, \widetilde{f}_n\}$ в $\mathrm{B} \oplus \mathrm{B}$ следует сходимость последовательности $\{\widetilde{U}(t)x_n\}$ в B. Переходя в (6) к пределу, получим, что $\widetilde{y}$ допускает вид (4). $\square$

Замечание 1. Отношение $L - \lambda E$ состоит из множества пар $\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\}$ вида (4), (5), где $U(t)$, $U(t-s)$ заменены соответственно на $U(t,\lambda)$, $U(t-s,\lambda)$. Отсюда следует, что отображение $x \to \widetilde{U}(t,\lambda)x$ является непрерывным и взаимно однозначным отображением Q_1 на $\ker(L - \lambda E)$.

Замечание 2. Так как при каждом t $\|U(t-s)A^{1/q}(s)\| \in L_q(0,b)$, $\|A^{1/p}(s)f(s)\| \in L_p(0,b)$, то интеграл в правой части (5) существует и непрерывен по t.

Лемма 2. *Отношение L_0 замкнуто.*

Доказательство. Пусть последовательность пар $\{\widetilde{y}_n, \widetilde{f}_n\} \in L_0$ сходится в пространстве $\mathrm{B}\oplus\mathrm{B}$ к паре $\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\}$. Согласно определению L_0 можно выбрать таких представителей y_n, f_n классов функций $\widetilde{y}_n$, $\widetilde{f}_n$, для которых выполняется равенство (6) и $y_n(0) = y_n(b) = 0$. Тогда в (6) $x_n = 0$ и $\int\limits_0^b U(b-s)\widetilde{A}(s)f_n(s)ds = 0$. Переходя к пределу здесь и в (6), получим, что в (4), (5) $x = 0$ и $\int\limits_0^b U(b-s)\widetilde{A}(s)f(s)ds = 0$. Следовательно, $y(0) = y(b) = 0$, и пара $\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\} \in L_0$. $\square$

Замечание 3. Из доказательства этой леммы следует, что область значений отношения L_0 замкнута и L_0^{-1} является ограниченным оператором на своей области определения. Аналогичные утверждения справедливы для отношения $L_0 - \lambda E$. Если $\widetilde{f}$ принадлежит области значений отношения $L_0 - \lambda E$, то $\int\limits_0^b U(b-s,\lambda)\widetilde{A}(s)f(s)ds = 0$.

Обозначим через $\widetilde{Q}_0$ множество элементов $z \in H$, для которых функция $U^*(b-t)z$ отождествлена с нулем в пространстве B^*, т. е. $\int\limits_0^b \|A^{1/q}(s)U^*(b-s)z\|^q ds = 0$. Переходя в (1) к сопряженным операторам и осуществляя замену t на $b-t$, получим равенство

$$U^*(b-t,\lambda)z = U^*(b-t)z + \overline{\lambda}\int_0^{b-t} U^*(s,\lambda)A(s)U^*(b-t-s)z\,ds, \tag{7}$$

из которого следует, что если $z \in \widetilde{Q}_0$, то функция $U^*(b-t,\lambda)z$ отождествлена с нулем в пространстве B^*. Обратное утверждение доказывается аналогично с помощью равенства (2).

Пусть $\widetilde{Q}$ — ортогональное дополнение в H к $\widetilde{Q}_0$, т. е. $H = \widetilde{Q} \oplus \widetilde{Q}_0$. Введем в $\widetilde{Q}$ норму

$$\|z\|_-^* = \left(\int_0^b \|A^{1/q}(s)U^*(b-s)z\|^q ds\right)^{1/q} \le \beta(b)\|z\|, \quad z \in \widetilde{Q}. \tag{8}$$

Пополнение $\widetilde{Q}$ по этой норме обозначим $\widetilde{Q}_1$. Из равенства (7) следует, что замена в (8) $U^*(b-s)$ на $U^*(b-s,\lambda)$ приводит к тому же множеству $\widetilde{Q}_1$ с эквивалентной нормой.

Пусть последовательность $\{z_n\}$ из $\widetilde{Q}$ сходится в $\widetilde{Q}_1$ к $z_0 \in \widetilde{Q}_1$ и $\widetilde{U}^*(b-s,\lambda)z_n$ — класс функций, отождествленных в B^* с $U^*(b-s,\lambda)z_n$. Тогда последовательность $\{\widetilde{U}^*(b-s,\lambda)z_n\}$ сходится в B^* к некоторому элементу, который обозначим $\widetilde{U}^*(b-s,\lambda)z_0$. Оператор $z \to \widetilde{U}^*(b-t,\lambda)z$ является непрерывным отображением $\widetilde{Q}_1$ в B^*. Этот оператор обозначим $V_*(\lambda)$. Его область значений замкнута в B^*, и ядро $\ker V_*(\lambda) = \{0\}$. Поэтому сопряженный оператор $V_*^*(\lambda) : \mathrm{B}^{**} = \mathrm{B} \to \widetilde{Q}_1^* \subset$

$\widetilde{Q}^* = \widetilde{Q}$ имеет область значений, совпадающую с $\widetilde{Q}_1^*$. Найдем вид $V_*^*(\lambda)$. Для любых элементов $z \in \widetilde{Q} \subset \widetilde{Q}_1$ и $\widetilde{f} \in \mathrm{B}$ имеем

$$(\widetilde{f}, V_*(\lambda)z) = \int_0^b (\widetilde{A}(s)f(s), U^*(b-s,\lambda)z)ds = \left(\int_0^b U(b-s,\lambda)\widetilde{A}(s)f(s)ds, z\right) = (V_*^*(\lambda)\widetilde{f}, z).$$

Отсюда, учитывая, что $\widetilde{Q}$ плотно вкладывается в $\widetilde{Q}_1$, и обозначая $V(\lambda) = V_*^*(\lambda)$, получим

$$V(\lambda)\widetilde{f} = \int_0^b U(b-s,\lambda)\widetilde{A}(s)f(s)ds.$$

Оператор $V(\lambda)$ непрерывно отображает B на $\widetilde{Q}_1^*$.

Пусть $\widetilde{L}(\lambda)$ — такое семейство линейных отношений, что $L_0 \subset \widetilde{L}(\lambda) \subset L$. Обозначим через $R(\lambda)$ семейство линейных отношений $R(\lambda) = (\widetilde{L}(\lambda) - \lambda E)^{-1}$. Тогда

$$(L_0 - \lambda E)^{-1} \subset R(\lambda) \subset (L - \lambda E)^{-1}. \tag{9}$$

Теорема 1. *Отношение $R(\lambda)$ тогда и только тогда является ограниченным всюду определенным оператором в* B, *когда $R(\lambda)$ имеет вид*

$$R(\lambda)\widetilde{f} = \widetilde{U}(t,\lambda)M(\lambda)\int_0^b U(b-s,\lambda)\widetilde{A}(s)f(s)ds + \int_0^t U(t-s,\lambda)\widetilde{A}(s)f(s)ds, \tag{10}$$

где $M(\lambda) : \widetilde{Q}_1^* \to Q_1$ — ограниченный всюду определенный оператор. Операторная функция $R(\lambda)$ голоморфна в некоторой окрестности точки λ_0 в том и только том случае, когда $M(\lambda)$ голоморфна в той же окрестности.

Доказательство. Формула (10) определяет семейство операторов $R(\lambda)$, удовлетворяющих (9) и обладающих свойствами, отмеченными в теореме; при этом голоморфность $M(\lambda)$ влечет голоморфность $R(\lambda)$. Предположим теперь, что $R(\lambda)$ — ограниченный всюду определенный оператор со свойством (9). Тогда $R(\lambda)\widetilde{f}$ — класс функций с представителем $y(t,f,\lambda)$ вида

$$y(t,\widetilde{f},\lambda) = \widetilde{U}(t,\lambda)c(\widetilde{f},\lambda) + \int_0^t U(t-s,\lambda)\widetilde{A}(s)f(s)ds, \tag{11}$$

где $c(\widetilde{f},\lambda) \in Q_1$. Очевидно, $c(\widetilde{f},\lambda)$ единственным образом определяется по λ и $\widetilde{f} \in \mathrm{B}$, причем $c(\widetilde{f},\lambda)$ линейно зависит от $\widetilde{f}$. Докажем, что $c(\widetilde{f},\lambda)$ непрерывно зависит от $\widetilde{f}$. Пусть последовательность $\{\widetilde{f}_n\}$ сходится к нулю в пространстве B. Тогда $R(\lambda)\widetilde{f}_n \to 0$ и, следовательно, $\widetilde{U}(t,\lambda)c(\widetilde{f}_n,\lambda) \to 0$ в B. Отсюда согласно замечанию 1 получаем $c(\widetilde{f}_n,\lambda) \to 0$ в пространстве Q_1. Таким образом, $c(\widetilde{f},\lambda) = C(\lambda)\widetilde{f}$, где $C(\lambda) : \mathrm{B} \to Q_1$ — ограниченный оператор.

Докажем, что $c(\widetilde{f},\lambda)$ единственным образом определяется элементом

$$V(\lambda)\widetilde{f} = \int_0^b U(b-s,\lambda)\widetilde{A}(s)f(s)ds \in \widetilde{Q}_1^*.$$

Для этого предположим, что $V(\lambda)\widetilde{f} = 0$. Обозначим $z(t) = \int\limits_0^t U(t-s,\lambda)\widetilde{A}(s)f(s)ds$. Тогда пара $\{\widetilde{z},\widetilde{f}\} \in L_0 - \lambda E$. Так как $L_0 - \lambda E \subset \widetilde{L}(\lambda) - \lambda E$, то $\widetilde{U}(t,\lambda)c(f,\lambda)$ принадлежит $D(\widetilde{L}(\lambda) - \lambda E)$ (D — область определения), а это в силу обратимости $\widetilde{L}(\lambda) - \lambda E$ возможно лишь при $c(\widetilde{f},\lambda) = 0$.

Таким образом, $C(\lambda)\widetilde{f} = M(\lambda)V(\lambda)\widetilde{f}$, где $M(\lambda) : \widetilde{Q}_1^* \to Q_1$ — всюду определенный оператор. Докажем, что $M(\lambda)$ ограничен. Учитывая, что область значений $R(L_0 - \lambda E)$ отношения $L_0 - \lambda E$ замкнута в B, введем фактор-пространство $\mathrm{B}_0(\lambda) = \mathrm{B}/R(L_0 - \lambda E)$ и обозначим через $\pi(\lambda)$ каноническое отображение B на $\mathrm{B}_0(\lambda)$. Так как $\ker C(\lambda) \supset \ker V(\lambda) = R(L_0 - \lambda E)$, то $V_0(\lambda) =$

$V(\lambda)\pi^{-1}(\lambda)$ и $C_0(\lambda) = C(\lambda)\pi^{-1}(\lambda)$ — ограниченные операторы, причем $V_0(\lambda)$ отображает $\mathrm{B}_0(\lambda)$ на $\widetilde{Q}_1^*$ взаимно однозначно. Теперь ограниченность $M(\lambda)$ следует из равенства

$$M(\lambda) = C_0(\lambda)V_0^{-1}(\lambda). \tag{12}$$

Предположим, что $R(\lambda)$ — голоморфная в некоторой окрестности точки λ_0 функция. Тогда из (11) следует голоморфность $\widetilde{U}(t,\lambda)C(\lambda)\widetilde{f}$. Из равенства (1), в котором элемент x заменяется на $C(\lambda)\widetilde{f}$, вытекает, что функция $\widetilde{U}(t,0)C(\lambda)\widetilde{f}$ голоморфна. Так как согласно замечанию 1 отображение $x \to \widetilde{U}(t,0)x$ является непрерывным и взаимно однозначным отображением Q_1 на $\ker L$ и ядро $\ker L$ замкнуто в B, то $C(\lambda)\widetilde{f} = M(\lambda)V(\lambda)\widetilde{f}$ — голоморфная функция при любом $\widetilde{f} \in \mathrm{B}$. Теперь голоморфность функции $M(\lambda)$ следует из свойств операторов $C(\lambda)$, $V(\lambda)$ и следующей леммы, доказанной в [12]. □

Лемма 3. *Пусть при каждом фиксированном λ из некоторой окрестности точки λ_0 ограниченные операторы $S_3(\lambda) : \mathrm{B}_1 \to \mathrm{B}_3$, $S_1(\lambda) : \mathrm{B}_1 \to \mathrm{B}_2$, $S_2(\lambda) : \mathrm{B}_2 \to \mathrm{B}_3$ связаны соотношением $S_3(\lambda) = S_2(\lambda)S_1(\lambda)$, причем область значений $R(S_1(\lambda_0))$ равна B_2, где B_1, B_2, B_3 — банаховы пространства. Тогда если функции $S_1(\lambda)$, $S_3(\lambda)$ сильно дифференцируемы в точке λ_0, то в этой точке сильно дифференцируема функция $S_2(\lambda)$.*

Рассмотрим теперь ситуацию, когда операторы $R(\lambda)$ могут быть, вообще говоря, неограниченными.

Теорема 2. *Отношение $R(\lambda)$ является оператором тогда и только тогда, когда $R(\lambda)$ имеет вид* (10), *где $M(\lambda)$ — оператор, действующий из $\widetilde{Q}_1^*$ в Q_1. При этом оператор $R(\lambda)$*: а) *замкнут,* б) *плотно определен в том и только том случае, когда этими свойствами обладает оператор $M(\lambda)$.*

Замечание 4. В равенстве (10) считаем, что $\widetilde{f} \in D(R(\lambda))$ тогда и только тогда, когда $V(\lambda)\widetilde{f} \in D(M(\lambda))$.

Доказательство. Формула (10) с оператором $M(\lambda)$ определяет оператор $R(\lambda)$ со свойством (9). Обратно, если $R(\lambda)$ — оператор, удовлетворяющий (9), то в равенстве (11) $c(\widetilde{f},\lambda)$ единственным образом определяется по $\widetilde{f}$ и λ, т. е. $c(\widetilde{f},\lambda) = C(\lambda)\widetilde{f}$, где $C(\lambda)$ — оператор из B в $\widetilde{Q}_1^*$. Так же, как и выше, устанавливается, что $C(\lambda)\widetilde{f} = M(\lambda)V(\lambda)\widetilde{f}$.

Пусть оператор $M(\lambda)$ замкнут и последовательность пар $\{R(\lambda)\widetilde{f}_n, \widetilde{f}_n\}$ сходится в пространстве $\mathrm{B} \oplus \mathrm{B}$ к паре $\{\widetilde{y}, \widetilde{f}\}$. Из равенства

$$R(\lambda)\widetilde{f}_n = \widetilde{U}(t,\lambda)M(\lambda)V(\lambda)\widetilde{f}_n + \int\limits_0^t U(t-s,\lambda)\widetilde{A}(s)f_n(s)ds \tag{13}$$

следует сходимость последовательности $\{\widetilde{U}(t,\lambda)M(\lambda)V(\lambda)\widetilde{f}_n\}$ в пространстве B. Тогда замечание 1 влечет сходимость $\{M(\lambda)V(\lambda)\widetilde{f}_n\}$ в пространстве Q_1. Отсюда и из ограниченности $V(\lambda)$, замкнутости $M(\lambda)$ следует $\widetilde{f} \in D(R(\lambda))$ и $\widetilde{y} = R(\lambda)\widetilde{f}$, т. е. $R(\lambda)$ замкнут.

Пусть теперь оператор $R(\lambda)$ замкнут. В этом случае оператор $C(\lambda)$ замкнут. Действительно, пусть последовательность пар $\{C(\lambda)\widetilde{f}_n, \widetilde{f}_n\}$ сходится в пространстве $Q_1 \oplus \mathrm{B}$ к паре $\{x, \widetilde{f}\}$. Тогда из (13) следует сходимость последовательности $\{R(\lambda)\widetilde{f}_n, \widetilde{f}_n\}$ к паре $\{R(\lambda)\widetilde{f}, \widetilde{f}\}$. Отсюда и из замечания 1 получаем, что $\widetilde{f} \in D(C(\lambda))$ и $x = C(\lambda)\widetilde{f}$, а это означает замкнутость $C(\lambda)$ и, следовательно, замкнутость $C_0(\lambda)$. Теперь равенство (12) влечет замкнутость $M(\lambda)$.

Плотность области определения $D(R(\lambda))$ равносильна плотности $D(C(\lambda))$ и, следовательно, $D(C_0(\lambda))$. Применение равенства (12) завершает доказательство теоремы. □

Отметим, что теоремы 1, 2 фактически дают описание спектра семейства отношений $\widetilde{L}(\lambda)$ в терминах свойств семейства $M(\lambda)$.

Литература

1. Coddington E.A. *Extension theory of formally normal and symmetric subspaces* // Mem. Amer. Math. Soc. – 1973. – V. 134. – P. 1–80.
2. Брук В.М. *О числе линейно независимых, квадратично интегрируемых решений систем дифференциальных уравнений* // Функциональный анализ. – Ульяновск. пединститут, Ульяновск, 1975. – № 5. – С. 25–33.
3. Lee S.J. *Formally self-adjoint systems of differential operators* // J. Math. Anal. Appl. – 1976. – V. 55. – P. 90–101.
4. Храбустовский В.И. *Спектральный анализ периодических систем с вырождающимся весом на оси и полуоси* // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – Харьковский государственный университет, Харьков, 1985. – № 44. – С. 122–133.
5. Брук В.М. *О линейных отношениях в пространстве вектор-функций* // Матем. заметки. – 1978. – Т. 24. – № 4. – С. 499–511.
6. Брук В.М. *Обобщенные резольвенты симметрических отношений в пространстве вектор-функций* // Функциональный анализ. – Ульяновский пединститут, Ульяновск, 1986. – № 26. – С. 52–61.
7. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.* – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
8. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* – М.: Мир, 1971. –372 с.
9. Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1967. – 464 с.
10. Рофе-Бекетов Ф.С., Холькин А.М. *Спектральный анализ дифференциальных операторов.* – Мариуполь: Физико-технический институт низких температур НАН Украины, 2001. – 332 с.
11. Коган В.И., Рофе-Бекетов Ф.С. *О квадратично интегрируемых решениях симметрических систем дифференциальных уравнений произвольного порядка* // Препринт. Физико-технический институт низких температур АН УССР. – Харьков, 1973. – 60 с.
12. Брук В.М. *О краевых задачах, связанных с голоморфными семействами операторов* // Функциональный анализ. – Ульяновский пединститут, Ульяновск, 1989. – № 29. – С. 32–42.

Саратовский государственный технический университет

Поступила 18.04.2005