ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 9 (496)

УДК 517.926

*Ю.Я. ИСАЕНКО*

# О ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ НА ПЛОСКОСТИ, ИМЕЮЩИХ МАТРИЦАНТ ТРЕБУЕМОГО ВИДА

В данной работе изучается линейная система $x'(t) = \widetilde{A}(t)x(t)$ с $\omega$-периодической вещественной матрицей-функцией $\widetilde{A}(t)$ второго порядка, удовлетворяющей условию $\operatorname{Sp}\widetilde{A}(t) \equiv 0$, $t \in R$. Как известно [1]–[3], для таких систем справедлива фундаментальная теорема Флоке–Ляпунова, в силу которой матрицант $X(t)$ системы представим в виде $X(t) = F(t)e^{Rt}$, где $R$ — постоянная вещественная матрица со следом, равным нулю, а $F(t)$ — периодическая матрица-функция с постоянным определителем, равным единице, и $F(0) = I$.

Исследуются системы, для которых $F(t)$ имеет специальный вид, а именно,

$$F(t) = A_0 + A_k \cos\frac{2\pi k}{\omega}t + B_k \sin\frac{2\pi k}{\omega}t,$$

где $A_0$, $A_k$, $B_k$ — постоянные матрицы. В дальнейшем про такие системы будем говорить, что они имеют матрицант требуемого вида.

Так как $F(t)$ имеет постоянный определитель и $F(0) = I$, то очевидно, что эти условия накладывают ограничения на постоянные матрицы $A_0$, $A_k$, $B_k$, входящие в разложение матрицы-функции $F(t)$.

**Теорема 1.** *Для того чтобы матрица-функция*

$$F(t) = A_0 + A_k \cos\frac{2\pi k}{\omega}t + B_k \sin\frac{2\pi k}{\omega}t$$

*удовлетворяла условиям $F(0) = I$ и $|F(t)| \equiv 1$, необходимо и достаточно, чтобы матрицы $A_0$, $A_k$, $B_k$, входящие в представление $F(t)$, удовлетворяли условиям*

$$A_0 \cdot A_0^- + \frac{1}{2}A_k \cdot A_k^- + \frac{1}{2}B_k \cdot B_k^- = I, \tag{1}$$

$$A_0 \cdot A_k^- + A_k \cdot A_0^- = 0, \tag{2}$$

$$A_0 \cdot B_k^- + B_k \cdot A_0^- = 0, \tag{3}$$

$$A_k \cdot B_k^- + B_k \cdot A_k^- = 0, \tag{4}$$

$$A_k \cdot A_k^- - B_k \cdot B_k^- = 0, \tag{5}$$

$$A_0 + A_k = I, \tag{6}$$

*где $A^-$ — матрица, присоединенная к матрице $A$.*

**Доказательство. Необходимость.** Так как $|F(t)| \equiv 1$, а $F^{-1}(t) = |F(t)|^{-1} \cdot F^-(t) = F^-(t)$, то $F(t) \cdot F^-(t) \equiv I$. Легко проверить, что для матриц второго порядка отображение, ставящее каждой матрице $A$ ее присоединенную матрицу $A^-$, является линейным оператором. Следовательно,

$$F^-(t) = A_0^- + A_k^- \cos\frac{2\pi k}{\omega}t + B_k^- \sin\frac{2\pi k}{\omega}t.$$

Умножив $F(t)$ на $F^-(t)$, получим условия (1)–(6).

**Достаточность.** Так как $F(0) = A_0 + A_k = I$ в силу соотношения (6), то остается только убедиться в том, что $|F(t)| \equiv 1$. Заметим, что для квадратных матриц $A$, $B$ второго порядка имеет место формула

$$|A + B| = |A| + |B| + \mathrm{Sp}(A \cdot B^-),$$

поэтому

$$|F(t)| = \left| A_0 + A_k \cos\frac{2\pi k}{\omega}t + B_k \sin\frac{2\pi k}{\omega}t \right| = |A_0| + \cos^2\frac{2\pi k}{\omega}t \cdot |A_k| + \cos\frac{2\pi k}{\omega}t \cdot \mathrm{Sp}(A_0 A_k^-) +$$
$$+ \sin\frac{2\pi k}{\omega}t \cdot \mathrm{Sp}(A_0 B_k^-) + \cos\frac{2\pi k}{\omega}t \cdot \sin\frac{2\pi k}{\omega}t \cdot \mathrm{Sp}(A_k B_k^-) + \sin^2\frac{2\pi k}{\omega}t \cdot |B_k|,$$

а отсюда в силу условий (2)–(6) $|F(t)| = |A_0| + |A_k| = |A_0 + A_k| = |I| = 1$.

Следующая теорема, которая является следствием теоремы 1, полностью описывает структуру матриц-функций $F(t)$ требуемого вида. В дальнейшем множество таких матриц-функций будем обозначать символом $\Omega_1^\omega$ [6].

**Теорема 2.** *Для того чтобы матрица-функция $F(t) \in \Omega_1^\omega$, необходимо и достаточно, чтобы $F(t)$ либо имела представление вида*

$$F(t) = \frac{1}{2}[I + XY^{-1}] + \frac{1}{2}[I - XY^{-1}]\cos\frac{2\pi k}{\omega}t + \frac{1}{2}[X - Y]J\sin\frac{2\pi k}{\omega}t, \tag{7}$$

*где $k \in N$, $X$ и $Y$ — постоянные, не равные между собой матрицы, удовлетворяющие условиям $X = X^*$, $Y = Y^*$, $\det X = \det Y = 1$, $J = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, либо имела представление вида*

$$F(t) = I - \mu B + \mu B \cos\frac{2\pi k}{\omega}t + \lambda B \sin\frac{2\pi k}{\omega}t, \tag{8}$$

*где $B \neq 0$, $\mathrm{Sp}\, B = \det B = 0$, $\mu \in R$, $\lambda \in R$, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, $k \in N$.*

Ниже, используя структуру элементов множества $\Omega_1^\omega$, исследуем линейные системы, имеющие матрицант требуемого вида. При этом вырожденным случаем называем ситуацию, когда $F(t)$ имеет представление (8), а регулярным случаем — ситуацию, когда $F(t)$ имеет представление (7).

Вырожденный случай является более простым по сравнению с регулярным и его удается полностью изучить. В качестве иллюстрации приведем два результата.

**Теорема 3.** *Пусть матрицант $X(t)$ линейной системы имеет вид*

$$X(t) = \left[ I - \mu B + \mu B \cos\frac{2\pi k}{\omega}t + \lambda B \sin\frac{2\pi k}{\omega}t \right] \cdot e^{Rt},$$

*где матрицы $R$ и $B$ линейно независимы, $\mathrm{Sp}\, RB \neq 0$ и $\mu(\lambda^2 - \mu^2) \neq 0$, $\lambda, \mu \in R$. Тогда матрица $\widetilde{A}(t)$ необходимо имеет вид*

$$\widetilde{A}(t) = \widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_k \cos\frac{2\pi k}{\omega}t + \widetilde{B}_k \sin\frac{2\pi k}{\omega}t + \widetilde{A}_{2k} \cos\frac{4\pi k}{\omega}t + \widetilde{B}_{2k} \sin\frac{4\pi k}{\omega}t,$$

*где постоянные матрицы $\widetilde{A}_0$, $\widetilde{A}_k$, $\widetilde{B}_k$, $\widetilde{A}_{2k}$, $\widetilde{B}_{2k}$ задаются формулами*

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}_0 &= R + \mu[RB - BR] - 2^{-1}[3\mu^2 + \lambda^2]BRB, \\
\widetilde{A}_k &= 2\pi k\omega^{-1}\lambda B - \mu[RB - BR] + 2\mu^2 BRB, \\
\widetilde{B}_k &= -2\pi k\omega^{-1}\mu B - \lambda[RB - BR] + 2\lambda\mu BRB, \\
\widetilde{A}_{2k} &= 2^{-1}(\lambda^2 - \mu^2)BRB, \\
\widetilde{B}_{2k} &= -\lambda\mu BRB.
\end{aligned}$$

*Кроме того, матрицы $\widetilde{A}_0$, $\widetilde{A}_k$, $\widetilde{A}_{2k}$ образуют линейно независимую систему и удовлетворяют условиям*

$$\operatorname{Sp}\widetilde{A}_0 = \operatorname{Sp}\widetilde{A}_k = \operatorname{Sp}\widetilde{A}_{2k} = \det\widetilde{A}_{2k} = 0,$$
$$\operatorname{Sp}\widetilde{A}_0\widetilde{A}_{2k} \neq 0,$$
$$\widetilde{A}_k = \alpha[\widetilde{A}_0\widetilde{A}_{2k} - \widetilde{A}_{2k}\widetilde{A}_0] + \beta\widetilde{A}_{2k},$$
$$\alpha^2 + \frac{2}{\operatorname{Sp}\widetilde{A}_0\widetilde{A}_{2k}} \geq 0.$$

*При этом если $\alpha^2 + \frac{2}{\operatorname{Sp}\widetilde{A}_0\widetilde{A}_{2k}} > 0$, то $\beta$ — любое, отличное от нуля действительное число; если $\alpha^2 + \frac{2}{\operatorname{Sp}\widetilde{A}_0\widetilde{A}_{2k}} = 0$, то $\beta = 0$.*

**Теорема 4.** *Матрицант $X(t)$ линейной $\omega$-периодической системы*

$$x'(t) = \widetilde{C}(t)x(t) \quad c \quad \widetilde{C}(t) = \widetilde{C}_0 + \widetilde{C}_k\cos\frac{2\pi k}{\omega}t + \widetilde{D}_k\sin\frac{2\pi k}{\omega}t,$$

*где постоянные матрицы $\widetilde{C}_0$, $\widetilde{C}_k$, $\widetilde{D}_k$ удовлетворяют условиям*

$$\operatorname{Sp}\widetilde{C}_0 = \operatorname{Sp}\widetilde{C}_k = \operatorname{Sp}\widetilde{D}_k = \det\widetilde{C}_k = \det\widetilde{D}_k = 0,$$
$$\widetilde{C}_k \neq 0, \quad \widetilde{D}_k = \alpha\widetilde{C}_k \quad (\alpha \in R), \quad \widetilde{C}_0\widetilde{C}_k = \gamma\widetilde{C}_k, \quad \gamma \neq 0,$$

*имеет вид*

$$X(t) = \left[I + \frac{\gamma + \pi k\omega^{-1}\alpha}{2(\gamma^2 + \pi^2k^2\omega^{-2})}\widetilde{C}_k - \frac{\gamma + \pi k\omega^{-1}\alpha}{2(\gamma^2 + \pi^2k^2\omega^{-2})}\widetilde{C}_k\cdot\cos\frac{2\pi k}{\omega}t + \frac{\pi k\omega^{-1} - \gamma\alpha}{2(\gamma^2 + \pi^2k^2\omega^{-2})}\widetilde{C}_k\sin\frac{2\pi k}{\omega}t\right]\cdot e^{Rt},$$

*где*

$$R = \widetilde{C}_0 + \gamma\frac{\gamma + \pi k\omega^{-1}\alpha}{\gamma^2 + \pi^2k^2\alpha^{-2}}\widetilde{C}_k.$$

Переходим теперь к рассмотрению регулярного случая. Во-первых, получен следующий результат, который можно считать основным.

**Теорема 5.** *Для того чтобы система*

$$x'(t) = \widetilde{A}(t)x(t)$$

*имела матрицант требуемого вида, причем $|A_k| = |B_k| \neq 0$, $A_0 \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы существовали вещественные числа $\alpha$, $\beta$, $\lambda$ и постоянные невырожденные матрицы $F_1$, $F_2$, $F_3$, удовлетворяющие условиям*

$$\operatorname{Sp}F_1 = \operatorname{Sp}F_2 = \operatorname{Sp}F_3 = 0, \tag{9}$$
$$|F_2| = |F_3|, \tag{10}$$
$$F_1\cdot F_2 = |F_1 + F_2|\cdot F_3 \tag{11}$$

*такие, что*

$$\widetilde{A}(t) = \widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_k\cos\frac{2\pi k}{\omega}t + \widetilde{B}_k\sin\frac{2\pi k}{\omega}t + \widetilde{A}_{2k}\cos\frac{4\pi k}{\omega}t + \widetilde{B}_{2k}\sin\frac{4\pi k}{\omega}t, \tag{12}$$

$$\widetilde{A}_0 = \left[\frac{1 - 2|F_1 + F_2|}{2|F_1 + F_2|}\lambda - \frac{\pi k}{\omega|F_1 + F_2|}\right]\cdot F_1 - \frac{1 - |F_1 + F_2|}{|F_1 + F_2|}\alpha F_2 + \frac{1 - |F_1 + F_2|}{|F_1 + F_2|}\beta F_3, \tag{13}$$

$$\widetilde{A}_k = 2\cdot\frac{1 - |F_1 + F_2|}{|F_1 + F_2|}\alpha F_1 + \lambda F_2, \tag{14}$$

$$\widetilde{B}_k = 2\cdot\frac{1 - |F_1 + F_2|}{|F_2 + F_2|}\beta F_1 - \lambda F_3, \tag{15}$$

$$\widetilde{A}_{2k} = \alpha F_2 + \beta F_3, \tag{16}$$

$$\widetilde{B}_{2k} = \beta F_2 - \alpha F_3. \tag{17}$$

Теорема 5 позволяет строить линейные системы, матрицант которых имеет требуемый вид. Для этого нужно, что следует из теоремы 5, задать постоянные матрицы $F_1$, $F_2$, $F_3$, удовлетворяющие соотношениям (9)–(11), произвольные вещественные числа $\alpha$, $\beta$, $\lambda$ и матрицы $\widetilde{A}_0$, $\widetilde{A}_k$, $\widetilde{B}_k$, $\widetilde{A}_{2k}$, $\widetilde{B}_{2k}$ формулами (13)–(17) соответственно.

Далее, из теоремы 5 следует, что если линейная система $x'(t) = \widetilde{A}(t)x(t)$ имеет матрицант требуемого вида, то $\widetilde{A}(t)$ имеет вид

$$\widetilde{A}(t) = \widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_k \cos\frac{2\pi k}{\omega}t + \widetilde{B}_k \sin\frac{2\pi k}{\omega}t + \widetilde{A}_{2k}\cos\frac{4\pi k}{\omega}t + \widetilde{B}_{2k}\sin\frac{4\pi k}{\omega}t,$$

причем матрицы $\widetilde{A}_0$, $\widetilde{A}_k$, $\widetilde{B}_k$, $\widetilde{A}_{2k}$, $\widetilde{B}_{2k}$ задаются формулами (13)–(17) соответственно. При этом возможны следующие три ситуации:

A) если $\alpha = \beta = \lambda = 0$, то $\widetilde{A}(t) = \widetilde{A}_0$ — постоянная матрица;

B) если $\alpha = \beta = 0$, $\lambda \neq 0$, то $\widetilde{A}(t) = \widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_k \cos\frac{2\pi k}{\omega}t + \widetilde{B}_k \sin\frac{2\pi k}{\omega}t$, причем $|\widetilde{A}_k| = |\widetilde{B}_k| \neq 0$;

C) если $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Заметим, что этот случай пока до конца не исследован.

**Теорема 6.** *Для того чтобы матрицант линейной системы с постоянной матрицей имел требуемый вид, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\widetilde{A}_0 = -\frac{\pi k}{\omega} U J^{-1}, \quad \textit{где} \quad U = U^*, \quad |U| = 1, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее рассматривается линейная система

$$x'(t) = \left[\widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_k \cos\frac{2\pi k}{\omega}t + \widetilde{B}_k \sin\frac{2\pi k}{\omega}t\right] \cdot x(t), \tag{I}$$

причем $|\widetilde{A}_k| = |\widetilde{B}_k| \neq 0$, что соответствует ситуации B).

**Теорема 7.** *Для того чтобы линейная система* (I) *имела матрицант требуемого вида, необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения*

$$\operatorname{Sp}\widetilde{A}_k = \operatorname{Sp}\widetilde{B}_k = \operatorname{Sp}\widetilde{A}_k\widetilde{B}_k = 0,$$

$$|\widetilde{A}_k| = |\widetilde{B}_k| < 0,$$

$$\widetilde{A}_0 = \gamma \widetilde{A}_k \widetilde{B}_k,$$

*причем*

$$\gamma \notin \left[\frac{\pi k}{\omega|\widetilde{A}_k|} - \frac{1}{\sqrt{-|\widetilde{A}_k|}},\ \frac{\pi k}{\omega|\widetilde{A}_k|} + \frac{1}{\sqrt{-|\widetilde{A}_k|}}\right]. \tag{18}$$

**Доказательство. Необходимость.** Так как матрицант $\Phi(t)$ данной системы имеет требуемый вид, то в силу теоремы 5 существуют вещественные числа $\alpha$, $\beta$, $\lambda$ и постоянные невырожденные матрицы $F_1$, $F_2$, $F_3$, удовлетворяющие условиям (9)–(11) такие, что выполняются соотношения (12)–(17). По условию, две из четырех матриц $\widetilde{A}_k$, $\widetilde{B}_k$, $\widetilde{A}_{2k}$, $\widetilde{B}_{2k}$ нулевые, а остальные две невырожденные. Легко видеть, что это может быть тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta = 0$ и $\lambda \neq 0$. Таким образом, имеем

$$\widetilde{A}_0 = \left[\frac{1 - 2|F_1 + F_2|}{2|F_1 + F_2|}\lambda - \frac{\pi k}{\omega|F_1 + F_2|}\right] \cdot F_1,$$

$$\widetilde{A}_k = \lambda F_2,$$

$$\widetilde{B}_k = -\lambda F_3,$$

откуда следует $\operatorname{Sp}\widetilde{A}_0 = \operatorname{Sp}\widetilde{A}_k = \operatorname{Sp}\widetilde{B}_k = 0$. Так как $F_3 = \frac{1}{|F_1+F_2|}F_1 \cdot F_2$, то $\operatorname{Sp}F_1F_2 = 0$ и

$$F_2 \cdot F_3 = \frac{1}{|F_1+F_2|}F_2F_1F_2 = -\frac{1}{|F_1+F_2|}F_1F_2^2 = \frac{|F_2|}{|F_1+F_2|}F_1.$$

Отсюда следует, что $\widetilde{A}_0 = \gamma\widetilde{A}_k\widetilde{B}_k$, где $\gamma$ — вещественное число.

Так как $F_1^2 = A_kB_k^- \cdot A_kB_k^- = -|A_k|^2 \cdot I$, $F_1 \cdot F_2 = |A_k| \cdot F_3$, то $|F_1| = |F_1+F_2|^2 > 0$, и тогда $|F_2| = |F_3| < 0$, т. е. $|\widetilde{A}_k| = |\widetilde{B}_k| < 0$. Таким образом, для доказательства теоремы осталось убедиться, что $\gamma$ удовлетворяет условию (18).

Имеем $\widetilde{A}_k\widetilde{B}_k = -\lambda^2F_2F_3 = -\lambda^2 \cdot \frac{|F_2|}{|F_1+F_2|}F_1$, следовательно,

$$\gamma = \left[\frac{1-2|F_1+F_2|}{2|F_1+F_2|}\lambda - \frac{\pi k}{\omega|F_1+F_2|}\right](-1) \cdot \frac{|F_1+F_2|}{\lambda^2|F_2|} = \frac{\pi k}{\omega\lambda^2|F_2|} + \frac{2|F_1+F_2|-1}{2\lambda^2|F_2|}\lambda.$$

Далее,

$$|F_1+F_2| \cdot (1-|F_1+F_2|) = |F_1+F_2| - |F_1+F_2|^2 = |F_1+F_2| - |F_1| = |F_2| = \frac{1}{\lambda^2}|\widetilde{A}_k|.$$

Таким образом, $|F_1+F_2|$ является корнем квадратного уравнения $y^2 - y + \lambda^{-2}|\widetilde{A}_k| = 0$, т. е. либо $|F_1+F_2| = \frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4|\widetilde{A}_k|}}{2\lambda}$, либо $|F_1+F_2| = \frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4|\widetilde{A}_k|}}{2\lambda}$.

Если $|F_1+F_2| = \frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4|\widetilde{A}_k|}}{2\lambda}$, то

$$\gamma = \frac{\pi k}{\omega|\widetilde{A}_k|} + \frac{\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4|\widetilde{A}_k|}}{\lambda} - 1}{2|\widetilde{A}_k|} \cdot \lambda = \frac{\pi k}{\omega|\widetilde{A}_k|} - \frac{\sqrt{\lambda^2-4|\widetilde{A}_k|}}{2|\widetilde{A}_k|}$$

и, т. к. $\lambda \neq 0$, $|\widetilde{A}_k| < 0$, то

$$\gamma > \frac{\pi k}{\omega|\widetilde{A}_k|} - \frac{\sqrt{-4|\widetilde{A}_k|}}{2|\widetilde{A}_k|} = \frac{\pi k}{\omega|\widetilde{A}_k|} + \frac{1}{\sqrt{-|\widetilde{A}_k|}}.$$

Если же $|F_1+F_2| = \frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4|\widetilde{A}_k|}}{2\lambda}$, то

$$\gamma = \frac{\pi k}{\omega|\widetilde{A}_k|} + \frac{\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4|\widetilde{A}_k|}}{\lambda} - 1}{2|\widetilde{A}_k|} \cdot \lambda = \frac{\pi k}{\omega|\widetilde{A}_k|} + \frac{\sqrt{\lambda^2-4|\widetilde{A}_k|}}{2|\widetilde{A}_k|}$$

и, следовательно, $\gamma < \frac{\pi k}{\omega|\widetilde{A}_k|} - \frac{1}{\sqrt{-|\widetilde{A}_k|}}$.

Отметим, что в рассмотренных выше теоремах матрицы $F_1$, $F_2$, $F_3$ связаны с матрицами $A_0$, $A_k$, $B_k$ соотношениями $F_1 = A_kB_k^-$, $F_2 = B_kA_0^-$, $F_3 = A_kA_0^-$, где $A^-$ — матрица, присоединенная к матрице $A$, и образуют линейно независимую систему. Если же они образуют линейно зависимую систему, то необходимо $A_0 = 0$ и $F(t) = I \cdot \cos\frac{2\pi k}{\omega}t + B_k \cdot \sin\frac{2\pi k}{\omega}t$.

**Теорема 8.** *Для того чтобы линейная система имела матрицант вида*

$$X(t) = \left[I \cdot \cos\frac{2\pi k}{\omega}t + B_k\sin\frac{2\pi k}{\omega}t\right] \cdot e^{Rt},$$

*необходимо и достаточно чтобы $\widetilde{A}(t)$ имела вид*

$$\widetilde{A}(t) = \widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_{2k}\cos\frac{4\pi k}{\omega}t + \widetilde{B}_{2k}\sin\frac{4\pi k}{\omega}t$$

*и выполнялись соотношения*

$$\operatorname{Sp}\widetilde{A}_{2k} = \operatorname{Sp}\widetilde{B}_{2k} = \operatorname{Sp}\widetilde{A}_{2k}\widetilde{B}_{2k} = 0,$$

$$|\widetilde{A}_{2k}| = |\widetilde{B}_{2k}| < 0,$$
$$\widetilde{A}_0 = \gamma \widetilde{A}_{2k} \widetilde{B}_{2k}.$$

В заключение отметим, что, кроме ситуации C), удается полностью описать класс периодических систем второго порядка, матрицант $X(t)$ которых имеет вид $X(t) = F(t)e^{Rt}$, где $F(t) \in \Omega_1^\omega$. Полученные результаты дают возможность явно находить преобразование, приводящее произвольную систему из этого класса к системе с постоянной матрицей и саму эту матрицу, т. е. решение получается в замкнутой форме. Отметим, что большинство полученных результатов интегрируемости в замкнутой форме не следуют из результатов Н.П. Еругина [4], [5] и являются новыми, т. к. он рассматривал системы вида

$$x'(t) = [A_1\varphi_1(t) + A_2\varphi_2(t)]x(t),$$

где $A_1$ и $A_2$ — постоянные матрицы (произвольного порядка), а $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — скалярные функции, при этом матрицы $A_1$ и $A_2$ удовлетворяют условию

$$A_1(A_2A_1 - A_1A_2) - (A_2A_1 - A_1A_2)A_1 = 0. \tag{19}$$

В данной работе встречаются системы

$$x'(t) = \left[\widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_k \cos\frac{2\pi k}{\omega}t + \widetilde{B}_k \sin\frac{2\pi k}{\omega}t + \widetilde{A}_{2k}\cos\frac{4\pi k}{\omega}t + \widetilde{B}_{2k}\sin\frac{4\pi k}{\omega}t\right]x(t),$$

причем в большинстве случаев $\widetilde{A}_0 \neq 0$, а в том случае, когда $\widetilde{A}_0 = 0$, матрицы $A_k$ и $B_k$ не удовлетворяют условию (19). Так, система

$$x'(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cos t + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\sin t$$

удовлетворяет всем условиям из теоремы 7 и поэтому имеет матрицант требуемого вида. В то же время, не представляет труда проверить, что матрицы $A_1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, $B_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ не удовлетворяют условию (19). Действительно,

$$A_1 \cdot (B_1 \cdot A_1 - A_1 \cdot B_1) - (B_1 \cdot A_1 - A_1 \cdot B_1) \cdot A_1 = -4 \cdot I \neq O.$$

## Литература


1. Floquet G. *Sur les equations differentielles lineaires a coefficients periodiques* // Ann. de l'Ecole Norm. Ser. 2. – 1883. – V. 12. – P. 47–88.
2. Ляпунов А.М. *Общая задача об устойчивости движения* // Собр. соч., 1956. – Т. 2. – 472 с.
3. Якубович В.А., Старжинский В.М. *Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения.* – М.: Наука, 1972.- 718 с.
4. Еругин Н.П. *Метод Лаппо–Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1956. – 108 с.
5. Еругин Н.П. *Замечание к статье Л.М. Шифнера* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1941. – № 5. – С. 377–380.
6. Исаенко Ю.Я. *Об одном классе линейных периодических дифференциальных уравнений на плоскости, интегрируемых в конечном виде* // Дифференц. и интегральные уравнения. Тезисы докл. международн. научн. конф. – Челябинск, 1999. – С. 55.



*Воронежский государственный*
*педагогический университет*



*Поступила*
14.11.2002