ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 12 (451)

УДК 519.853

И.И. ЕРЕМИН

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

1. Введение

Работ по проблематике устойчивости в математическом программировании (МП) достаточно много. Традиционная постановка одной из проблем состоит в следующем: если $\widetilde{f}(y)$ — функция оптимума задачи МП с выделенным параметром y, то каковы условия, обеспечивающие существование и непрерывность функции $\widetilde{f}(y)$ в окрестности фиксированной точки y_0. Обычно формулируются достаточно жесткие условия, не обеспечивающие возможность содержательного анализа устойчивости даже в случае задач линейного программирования (ЛП), например, применительно к вопросу о необходимом и достаточном условии S-устойчивости задачи ЛП, где S — подмножество всей системы исходных данных. По устойчивости в МП и выпуклом программировании (ВП) отметим работы [1]–[3].

Для задачи ЛП

$$\max\{(c,x) \mid Ax \le b,\ x \ge 0\} \tag{1}$$

в качестве y берут либо всю систему исходных данных $[A,b,c]$, либо ее часть: b, c, $[A,b]$ и т.д. В этой ситуации говорят об y-устойчивости, в частности, $[A,b,c]$-устойчивости, b-устойчивости, c-устойчивости и т. д. Критерии устойчивости формируются через какую-то совокупность свойств того математического объекта, который изучается на предмет устойчивости; такими критериями преимущественно являются

1) ограниченность допустимого множества;
2) ограниченность оптимального множества;
3) устойчивость той или иной совокупности неравенств-ограничений (т. е. сохранение свойства совместности системы при замене неравенств $\le$ на неравенства строгие $<$).

Идентификация устойчивости через совокупность перечисленных понятий достаточна. Характеризация устойчивости, естественно, возможна и через другие системы понятий.

К вопросу устойчивости можно подойти более широко. Во-первых, можно говорить об устойчивости в смысле сохранения некоторого фиксированного свойства ω при малых вариациях системы исходных данных, в линейном случае — это $S_0 := \{a_{ji}, b_j, c_i\}$; во-вторых, можно говорить об устойчивости свойства ω, исходя из вариаций элементов из произвольного подмножества S всего массива исходных данных S_0. Исследуемыми на устойчивость объектами ниже будут

1) системы линейных неравенств; 2) задачи линейного программирования.

В качестве ω будет свойство разрешимости или свойство ограниченности — в первом случае, и ограниченности оптимального множества — во втором. При этом, подчеркиваем, речь может идти об S-устойчивости при любом $S \subset S_0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 97-01-00370, 96-15-96247, 99-01-00136).

В ситуации так определенной устойчивости будем говорить об (S,ω)-устойчивости. Здесь возникает ряд вопросов, требующих своих решений. Это, во-первых, вопрос о характеризации (S,ω)-устойчивости: необходимых условиях, достаточных или необходимых и достаточных. Во-вторых, вопрос об идентификации максимального множества $\overline{S} \subset S_0$, включающего S и сохраняющего свойство $(\overline{S},\omega)$-устойчивости. Поясним это на примере системы $(a_j,x) \le b_j$, $j = 1,\dots,m$. Пусть ω — свойство совместности, а $S = \{b_1,\dots,b_m\}$. Если система (S,ω)-устойчива, то она и $(\overline{S},\omega)$-устойчива, где $\overline{S} = \{b_j, a_{ji}\}$, т. е. максимальным расширением исходного множества $S = \{b_j\}$ является вся совокупность исходных данных выписанной системы неравенств. Возможны и другие постановки вопросов, касающихся (S,ω)-устойчивости математических моделей со своей информационной составляющей.

Еще одним важным дополнением к определению (S,ω)-устойчивости является возможность взаимной зависимости информационных параметров из множества S, в частности, повторения некоторых параметров в разных аналитических фрагментах рассматриваемой модели.

Рассмотрим важный для нас пример симметрической системы линейных неравенств, поставленной в соответствие задаче (1),

$$Ax \le b, \quad x \ge 0; \quad A^T u \ge c, \quad u \ge 0; \quad (c,x) \ge (b,u). \tag{2}$$

Здесь каждый из информационных параметров повторяется два раза. Устойчивость объекта с повторяющимися параметрами предполагает согласованные вариации параметров, стоящих в разных местах модели, в данном случае системы (2). Учет этого обстоятельства делает вполне понятной, например, взаимную связь (S,ω)-устойчивости для задач L, $L^* : \min\{(b,u) \mid A^T u \ge c,\ u \ge 0\}$ и (2), а именно: свойства (S,ω)-устойчивости для указанных трех объектов являются эквивалентными (следует из свойств двойственности в ЛП). Приведенный пример интересен тем, что в нем реализуется редукция свойства устойчивости оптимизационной задачи к аналогичной устойчивости для некоторой системы линейных неравенств.

2. Устойчивость системы линейных неравенств (определения, предварительные сведения)

Пусть дана система линейных неравенств

$$Ax \le b \tag{3}$$

с информационной составляющей $S_0 = \{a_{ji}, b_j\}_{j,i=1}^{m,n}$. Если необходимо, будем писать $S_0 = [A,b] = [a_1,\dots,a_m,b^T]$, т. е. записывать S_0 как вектор; здесь $\{a_j\}$ — строки матрицы A. Свойством ω будем считать свойство совместности системы, так что речь идет о (S_0,ω)-устойчивости.

Определим j-устойчивость системы (3) как свойство ее совместности при замене j-го неравенства на строгое неравенство. Если $J \subset \{1,\dots,m\}$, то J-устойчивость будет означать свойство ее совместности при замене нестрогих неравенств для всех $j \in J$ на строгие.

Отметим свойство: если система (3) j-устойчива для всех $j \in J$, то она J-устойчива. Действительно, если $\overline{x}^j$ — некоторое решение системы (3), системы, в которой j-е неравенство заменено на строгое неравенство, то, взяв любую строго выпуклую комбинацию $\overline{x} = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j \overline{x}^j$, $\alpha_j > 0$, $\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$, получим $\overline{x}$, удовлетворяющий системе $(1)_J$ — системе (1), в которой все неравенства с номерами $j \in J$ заменены на строгие неравенства.

Перечислим свойства системы (3), которые будут фигурировать в тексте: 1^0. $[A,b]$-устойчивость; 2^0. b-устойчивость; 3^0. j-устойчивость для всех $j = 1,\dots,m$; 4^0. $\{1,\dots,m\}$-устойчивость.

Утверждение. *Свойства* 1^0–4^0 *эквивалентны.*

Это утверждение достаточно простое, поэтому не будем пояснять его обоснование.

В связи с импликацией $2^0 \Rightarrow 1^0$ возникает следующий вопрос: если система (1) (S,ω)-устойчива, то что из себя представляет максимальное расширение множества устойчивости S до множества $\overline{S}$, обладающее свойством $(\overline{S},\omega)$-устойчивости? Как было уже отмечено, если $S = \{b_1,\dots,b_m\}$, то $\overline{S} = S_0$ $(= \{a_{ji}, b_j\}_{j,i=1}^{m,n})$.

Выше мы считали, что все элементы из S_0 независимы, т. е. среди них нет параметров, зависящих от других параметров. В ситуации таких зависимостей трудность анализа устойчивости неизмеримо возрастает. В этих случаях разумно идти по пути выделения классов систем с фиксированной структурой информационной составляющей и четко очерченными связями между элементами этой составляющей. Примером такой системы является система (2).

Введем одно условие, важное для анализа a_{ji}-устойчивости системы (3), а именно: пусть M — множество решений системы (3), а M_δ — множество ее решений при замене a_{ji} на $a_{ji}+\delta$. Выпишем импликации

$$\begin{aligned} M\cap\{x \mid x_i>0\}\neq\emptyset \Rightarrow M_\delta\cap\{x \mid x_i>0\}\neq\emptyset,\\ M\cap\{x \mid x_i<0\}\neq\emptyset \Rightarrow M_\delta\cap\{x \mid x_i<0\}\neq\emptyset. \end{aligned} \tag{4}$$

Если при достаточно малых $|\delta|$ выполняются условия (4), то будем говорить, что выполняется условие $(a_{ji}, \operatorname{sign} x_i)$-устойчивости.

Лемма 1. *Если система* (3) j*-устойчива, то она* $(a_{ji}, \operatorname{sign} x_i)$*-устойчива для всякого* i*, допускающего решение* $\overline{x}$ *системы* (3) *с координатой* $\overline{x}_i \neq 0$*. Обратно, если система* (3) $(a_{ji}, \operatorname{sign} x_i)$*-устойчива и имеет решение* $\overline{x}$ *с координатой* $\overline{x}_i\neq 0$*, то она* j*-устойчива.*

Доказательство. Действительно, если система j-устойчива, то, как уже отмечалось, она $\{a_{j1},\dots,a_{jn}\}$-устойчива, поэтому при замене a_{ji} на $a_{ji}+\delta$ прежнее решение $\overline{x}$ с $\overline{x}_i\neq 0$ при достаточно малом $|\delta|$ будет оставаться решением и видоизмененной системы, т. е. $\overline{x}\in M_\delta$. Это и дает выполнимость условия (2).

Обратно, пусть система (3) $(a_{ji}, \operatorname{sign} x_i)$-устойчива и существует ее решение $\overline{x}$ с координатой $\overline{x}_i\neq 0$, пусть $\overline{x}_i>0$. Положим для определенности $a_{ji}=a_{11}$. Запишем систему

$$(a_{11}+\delta)x_1 + a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \le b_1, \quad (a_j,x)\le b_j, \quad j=2,\dots,m. \tag{5}$$

По условию при достаточно малом $\delta>0$ система (5) будет обладать решением $\overline{x}^{\,\delta}$ с $\overline{x}_i^{\,\delta}>0$. Подставив это решение в (5), получим $(a_1,\overline{x}^{\,\delta})\le b_1-\delta\,\overline{x}_1^{\,\delta}<0$, $(a_j,\overline{x}^{\,\delta})\le b_j$, $j=2,\dots,m$, что и говорит об j-устойчивости системы (3) для $j=1$, а следовательно, и просто о j-устойчивости.

Лемма 2. *Пусть многогранник* M *системы* $Ax\le b$ *не пуст и ограничен. Если* $\{A_t\}\to A$*,* $\{b_t\}\to b$ *при* $t\to\infty$*,* $M_t\neq\emptyset$ $\forall t$*, то существует* T *такое, что множество* $\bigcup\limits_{t\ge T} M_t$ *ограничено. При этом, если* $x_t\in M_t$*, то* $\{x_t\}'\subset M$ *(здесь* $\{x_t\}'$ *— множество предельных точек ограниченной последовательности* $\{x_t\}$*)* ([4]*, теорема* 8.2; [5]*, леммы* 35.8 *и* 35.9).

Введем условие ω_i: многогранник M ограничен и не содержит векторов с нулевой i-й координатой, т. е. проекция M на координатную ось x_i не содержит нуля.

Лемма 3. *Пусть система* (3) *обладает решением* $\overline{x}$ *с* $\overline{x}_i\neq 0$*. Тогда условие* $(a_{ji}, \operatorname{sign} x_i)$*-устойчивости является достаточным для* a_{ji}*-устойчивости, а в случае выполнимости условия* ω_i *и необходимым.*

Доказательство. Действительно, по лемме 1 из условия (4) вытекает j-устойчивость, а потому и $\{a_{j1},\dots,a_{jn}\}$-устойчивость, что даже больше, чем a_{ji}-устойчивость. Пусть теперь система (3) с ограниченным многогранником решений M является a_{ji}-устойчивой. Нужно доказать ее

$(a_{ji}, \operatorname{sign} x_i)$-устойчивость. Предполагая противное, можем указать последовательность $\delta_k \to 0$ такую, что (при $a_{ji} = a_{11}$ для простоты) система

$$(a_{11} + \delta_k)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \quad (a_j, x) \le b_j, \quad j = 2, \ldots, m, \tag*{$(5)_k$}$$

будет разрешима при любом k, но ее всякое решение $\overline{x}^k$ будет иметь координату $\overline{x}_j^k = 0$. Если обозначить через M_k множество решений системы $(5)_k$, то в силу леммы 1 последовательность $\{\overline{x}^k\}$ будет ограниченной, а потому можно считать $\{\overline{x}^k\} \to \overline{x}$, что в силу этой же леммы дает включение $\overline{x} \in M$. Очевидно, $\overline{x}_1 = 0$, если $\overline{x}^T = [\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n]$. Но это противоречит условию ω_i.

Для свойств системы (3) α) a_{ji}-устойчива; β) j-устойчива; γ) $(a_{ji}, \operatorname{sign} x_i)$-устойчива в леммах 1 и 3 реализована схема логических следований

$$\begin{tikzcd}
\alpha) \arrow[rr, dashed, shift right] \arrow[dr, dashed, shift left] & & \beta) \arrow[ll, shift right] \arrow[dl, shift left] \\
& \gamma) \arrow[ul, shift left] \arrow[ur, shift left] &
\end{tikzcd}$$

В этой схеме пунктирные следования выполняются при условии ω_i.

3. Устойчивость систем линейных неравенств (основные формулировки)

Формулировки устойчивости системы линейных неравенств выглядят по разному в зависимости от ее задания. Скажем, при форме задания в виде $Ax \le b$ условие ее $[A, b]$-устойчивости через свойство совместности системы $Ax < b$ вполне тривиально. Если же система содержит как неравенства, так и уравнения, то формулировки будут совсем иные. Здесь формализм эквивалентной редукции уравнений к неравенствам неэквивалентен в характеризации устойчивости (хотя в других вопросах общей теории линейного программирования правомерен и полезен). Перезапись линейных уравнений через замену каждого из них, пусть $l(x) = 0$, парой неравенств $l(x) \le 0$, $-l(x) \le 0$ приводит к системе неравенств со связанными информационными параметрами, что, как уже отмечалось, усложняет дело в связи с необходимостью учета согласованных вариаций параметров из разных фрагментов полученной системы. Все сказанное относится и к задачам линейного программирования. Для задач ЛП имеются три стандартных формы, запишем их вместе с двойственными

$$\begin{array}{llcll}
L_1: & \max(c, x) & \xrightarrow{(*)} & L_1^*: & \min(b, u) \\
& Ax \le b & & & A^T u = c, \quad u \ge 0;
\end{array} \tag{6}$$

$$\begin{array}{llcll}
L_2: & \max(c, x) & \xrightarrow{(*)} & L_2^*: & \min(b, u) \\
& Ax \le b, \quad x \ge 0 & & & A^T u \ge c, \quad u \ge 0;
\end{array} \tag{7}$$

$$\begin{array}{llcll}
L_3: & \min(c, x) & \xrightarrow{(*)} & L_3^*: & \max(b, u) \\
& Ax = b, \quad x \ge 0 & & & A^T u \le c.
\end{array} \tag{8}$$

Из форм ограничений выписанных задач видно, что требуют внимания системы

$$Ax \le b, \tag{9}$$

$$Ax \le b, \quad x \ge 0, \tag{10}$$

$$Ax = b, \quad x \ge 0. \tag{11}$$

Добавим к ним

$$Ax = b \ \text{(обычная система уравнений)}, \tag{12}$$

$$Ax = b, \quad Dx \leq d \tag{13}$$

(смешанная система). Ниже будут рассмотрены условия ограниченности множеств решений систем (9)–(13) и их устойчивости (по свойству ω совместности). Вначале сформулируем условие ограниченности множества решений произвольной системы линейных неравенств и уравнений. В этом отношении все выписанные системы не несут в себе какой-либо специфики.

Теорема 1. *Конечная система линейных неравенств и уравнений* (*совместная*) *определяет ограниченное множество решений тогда и только тогда, когда соответствующая ей однородная система имеет единственное решение* (*нулевое*) [5].

Часто в литературе условие ограниченности формулируют через понятие всесторонней системы векторов: система векторов $\{a_j\}_1^m \subset \mathbf{R}^n$ называется всесторонней, если для любого вектора $\overline{x} \neq 0$ существует $j \in \{1, \ldots, m\}$ такое, что $(a_j, \overline{x}) > 0$. Условие всесторонности эквивалентно тому, что система $(a_j, x) \leq 0$, $j = 1, \ldots, m$, имеет единственное решение (нулевое). Условие ограниченности многогранника системы $Ax \leq b \sim (a_j, x) \leq b_j$, $j = 1, \ldots, m$, эквивалентно всесторонности системы векторов $\{a_j\}_1^m$, т.е. совокупности строк матрицы A ([5], § 3). Что касается остальных систем, то каждую из них можно формально переписать в форме (9) и сформировать систему векторов, которая и должна быть всесторонней. Для (13), например, соответствующей системой векторов будет $\{\pm a_j, d_k\}_{j,k=1}^{m,\overline{k}}$, где $Ax = b \sim (a_j, x) = b_j$, $j = 1, \ldots, m$, $Dx \leq d \sim (d_k, x) \leq \beta_k$, $k = 1, \ldots, \overline{k}$.

Теперь рассмотрим условия устойчивости систем (9), (13). Условие устойчивости ($[A, b]$-устойчивости) системы (9) эквивалентно ее b-устойчивости, или, как уже отмечалось, совместности системы строгих неравенств $Ax < b$. Для дальнейшего анализа необходимо сформулировать условия устойчивости системы линейных уравнений (12).

Лемма 4. *Пусть ранг* $r \neq 0$ *совместной системы* (12) *меньше числа уравнений, т.е.* $\operatorname{rang} A < m$. *Тогда система не является b-устойчивой* (*следовательно, не является устойчивой*).

Доказательство. Пусть $r < m$. Тогда в системе можно выделить уравнение, являющееся следствием остальных, пусть им будет последнее уравнение. Запишем систему

$$(a_j, x) = b_j, \quad j = 1, \ldots, m-1, \tag{14}$$

$$(a_m, x) = b_m, \tag{15}$$

выделив уравнение — следствие из остальных. Возьмем произвольное приращение $\delta b_m \neq 0$ величины b_m и составим систему

$$(14) \vee (a_m, x) = b_m + \delta b_m. \tag{16}$$

Эта система несовместна. Действительно, если $\overline{x}$ — решение, то $\overline{x}$ удовлетворяет системе (14) и уравнению (15), как следствию системы (14). Но тогда из (16) следует $\delta\, b_m = 0$. Получили противоречие. Так как вариации вектора b_m нарушают совместность системы, то она не является b-устойчивой (следовательно, не является устойчивой). □

Следствие 1. Совместная система (12) устойчива тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang} A = m$.

Доказательство. В силу леммы 4 требуется доказать только достаточность условий, которая довольно просто следует из устойчивости свойства невырожденности некоторого минора A_0 размера $m \times m$ матрицы A, что и определяет разрешимость системы в вариациях.

Теорема 2. *Совместная система* (10) *устойчива тогда и только тогда, когда совместна система* $Ax < b$, $x \geq 0$ (*тогда совместна и система* $Ax < b$, $x > 0$).

Теорема 3. *Совместная система* (11) *устойчива тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rang} A = m$ (m — *число строк в матрице* A).

Теорема 4. *Совместная система* (13) *устойчива тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rang} A = m$ *и совместна система*

$$Ax = b, \quad Dx < d. \tag{17}$$

Доказательство. Необходимость. Соотношение $\operatorname{rang} A = m$ вытекает из следствия 1. Для доказательства совместности системы (17) достаточно взять решение x_δ системы $Ax = b$, $Dx \leq d - \delta d$, в которой $\delta d < 0$. Тогда $Ax_\delta = b$, $Dx_\delta \leq d - \delta d < d$, что и требовалось.

Достаточность. Пусть $\operatorname{rang} A = m$, система (17) совместна и $\overline{x}$ — ее некоторое решение. Нужно доказать совместность системы в вариациях

$$A_\delta x = b^\delta, \quad D_\delta x \leq d^\delta \tag{18}$$

при достаточно малых возмущениях. Покажем, что некоторые x_δ из достаточно малой окрестности V_δ точки $\overline{x}$ будут удовлетворять системе (18). Поскольку выполнимость соотношения $D_\delta x \leq d^\delta$ для всех x_δ из V_δ следует из совместности системы (18), то нужно только показать, что некоторые из x_δ будут удовлетворять и системе $A_\delta x = b^\delta$. Пусть $\overline{x} = \left[\frac{\overline{y}}{\overline{z}}\right]$, $A_0\overline{y} + A_1\overline{z} = b$, $|A_0| \neq 0$. Если варьировать элементы матрицы A и вектора b, то будем иметь $|A_0^\delta| \neq 0$, $y^\delta = (A_0^\delta)^{-1}(b^\delta - A_1^\delta\,\overline{z})$, при этом вектор $x_\delta := \left[\frac{y^\delta}{\overline{z}}\right]$ будет близок к $\overline{x}$, что обеспечивает включение $x_\delta \in V_\delta$. Таким образом, доказана совместность системы (18) при достаточно малых возмущениях элементов информационной составляющей системы (13). $\square$

4. Устойчивость задач линейного программирования

В основе анализа устойчивости в ЛП лежат лемма 2 и следующие две леммы.

Лемма 5 ([5], лемма 35.11). *Если любая из* (6)–(8) *задача* L *разрешима и ее оптимальное множество* $\operatorname{Arg} L$ *ограничено, то при малых приращениях* Δc *вектора* c *задача* $L_{\Delta c} : \max\{c + \Delta c \mid Ax \leq b\}$ *разрешима, при этом* $\operatorname{Arg} L \supset \operatorname{Arg} L_{\Delta c}$.

Лемма 6 ([5], лемма 35.12). *Если оптимальное множество* $\widetilde{M}$ *любой из* (6)–(8) *задачи* L *неограничено, то существуют как угодно малые приращения* Δc *вектора* c *такие, что* $\operatorname{opt} L_{\Delta c} = \infty$, *т. е. задача* L *не является* c*-устойчивой.*

Ниже будет идти речь об $[A, b, c]$-устойчивости задачи ЛП, или просто об устойчивости как свойстве сохранения разрешимости при малых возмущениях всей системы исходных данных. Для определенности будем говорить о задаче

$$L: \ \max\{(c, x) \mid Ax \leq b, \ x \geq 0\}. \tag{19}$$

Перечислим условия:

1. система (2) устойчива;
2. задача L устойчива;
3. задача L^* устойчива;
4. множества $\operatorname{Arg} L$ и $\operatorname{Arg} L^*$ ограничены;
5. системы $Ax < b$, $x \geq 0$ и $A^T u > c$, $u \geq 0$ совместны;
6. множество $\operatorname{Arg} L$ ограничено и система $Ax < b$, $x \geq 0$ совместна;
7. множество $\operatorname{Arg} L^*$ ограничено и система $A^T u > c$, $u \geq 0$ совместна.

Теорема 5. *Перечисленные условия* 1–7 *эквивалентны.*

Сформулируем аналог этого утверждения безотносительно к виду исходной задачи ЛП.

Теорема 6. *Пусть L — произвольная разрешимая задача линейного программирования. Следующие условия эквивалентны*:

1^0. *система линейных неравенств S (симметрическая система), поставленная в соответствие задаче L и L^* — двойственной к ней, устойчива*;
2^0. *задача L устойчива*;
3^0. *задача L^* устойчива*;
4^0. *множества $\operatorname{Arg} L$ и $\operatorname{Arg} L^*$ ограничены*;
5^0. *системы ограничений в задачах L и L^* устойчивы*;
6^0. *множество $\operatorname{Arg} L$ ограничено и система ограничений задачи L устойчива*;
7^0. *множество $\operatorname{Arg} L^*$ ограничено и система ограничений задачи L^* устойчива.*

Перечисленные эквивалентности легко получаются из лемм 2, 5 и 6 и утверждений из п. 3.

Примечание. Теорема 5 характеризует устойчивую разрешимость задачи ЛП по всей системе исходных данных, однако легко сформулировать условия устойчивой разрешимости по некоторым фрагментам этой системы. Например,

1. b-устойчивость $\Leftrightarrow$ совместность системы $Ax < b$, $x \geq 0$;
2. c-устойчивость $\Leftrightarrow$ совместность системы $A^T u > c$, $u \geq 0 \Leftrightarrow$ система векторов $\{-c, a_j, -e_i\}$ $(j = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n)$ всесторонняя (здесь e_i — единичные орты пространства $\mathbf{R}^n$);
3. $[b, c]$-устойчивость $\Leftrightarrow$ $[A, b, c]$-устойчивость.

Теорема 7. *Пусть $y_0 = [A, b, c]$ и $\widetilde{f}(y)$ — функция оптимума задачи* (19). *Если задача L устойчиво разрешима (т. е. устойчива по свойству разрешимости) в точке $y = y_0$, то функция $\widetilde{f}(y)$ непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Устойчивая разрешимость определяет факт существования функции $\widetilde{f}(y)$ в некоторой окрестности V точки y_0. По теореме 5 устойчивость задачи L эквивалентна устойчивости симметрической системы неравенств (2), т. е. системы

$$S: \ Ax \leq b, \ \ x \geq 0, \quad A^T u \geq c, \ \ u \geq 0, \quad (c, x) \geq (b, u).$$

К ситуации этой системы применим лемму 2. А именно, сделаем переобозначения: N — множество решений системы S, N_t — множество решений этой системы при замене A, b и c на A_t, b_t и c_t с условием $y_t = [A_t, b_t, c_t] \to y_0$ $(= [A, b, c,])$, саму систему обозначим S_t. Устойчивость системы S диктует разрешимость задач L_t : $\max\{(c_t, x) \mid A_t x \leq b_t, \ x \geq 0\}$ и ограниченность множества $\bigcup\limits_{(t)} N_t$ (по лемме 2). Связь между L_t и N_t такова: $N_t = \operatorname{Arg} L_t \times \operatorname{Arg} L_t^*$. Если $\{[x_t, u_t]\} \to [\overline{x}, \overline{u}]$, $x_t \in \operatorname{Arg} L_t$, $u_t \in \operatorname{Arg} L_t^*$, то опять-таки по лемме 2 $[\overline{x}, \overline{u}] \in N$, т. е. $[\overline{x}, \overline{u}]$ — решение системы S. Следовательно, $\overline{x} \in \operatorname{Arg} L$, $u \in \operatorname{Arg} L^*$, а потому имеем $\widetilde{f}(y_t) = (c_t, x_t) \to (c, \overline{x}) = \widetilde{f}(y_0)$, т. е. непрерывность функции $\widetilde{f}(\cdot)$ в точке $y_0 = [A, b, c]$.

5. Устойчивая неразрешимость задач ЛП

Неразрешимость (несовместность) систем линейных неравенств и неразрешимость (несобственность) задач ЛП — это вполне самостоятельные по значимости математические объекты наравне с разрешимыми [6]. Рассмотрим их устойчивую неразрешимость, т. е. сохранение свойства неразрешимости при малых возмущениях системы исходных данных. Исследуем систему (9). Систему (9) назовем устойчиво неразрешимой, если при малых возмущениях матрицы A и вектора b система сохраняет свойство неразрешимости. Поскольку неразрешимые задачи ЛП имеют три рода неразрешимости, то для каждого их них можно ввести свое понятие устойчивости, сохраняющее при малых изменениях исходной информации род разрешимости.

Что касается устойчивости систем неравенств и задач ЛП в случае их разрешимости, то эти вопросы уже были рассмотрены в предыдущих параграфах. В частности, устойчивость системы (9) в случае ее совместности эквивалентна разрешимости системы строгих линейных неравенств $Ax < b$. Для системы (10) аналогичным условием будет разрешимость системы $Ax < b$, $x \geq 0$ (что влечет разрешимость системы $Ax < b$, $x > 0$).

Теорема 8 ([5], § 38, п. 4). *Несовместная система* (9) *устойчиво несовместна тогда и только тогда, когда система* $Ax \leq 0$ *имеет единственное решение* (*нулевое*).

Условия устойчивой разрешимости и устойчивой неразрешимости систем линейных неравенств позволяют сформулировать условия устойчивой неразрешимости для задач линейного программирования, в частности, и по родам ее несобственности.

Теорема 9. *Если* L *— НЗ ЛП 1-го рода, то она устойчива относительно этого свойства тогда и только тогда, когда система* $A^T u \geq c$, $u \geq 0$ *устойчиво разрешима* (*что эквивалентно разрешимости системы* $A^T u > c$, $u \geq 0$), *а система* $Ax \leq b$, $x \geq 0$ *устойчиво неразрешима* (*что эквивалентно ее неразрешимости и единственности решения системы* $Ax \leq 0$, $x \geq 0$).

Теорема следует из условий устойчивой разрешимости и устойчивой неразрешимости для систем линейных неравенств (теорема 8) и классифицирующих свойств несобственных задач ЛП. Сказанное относится к формулировкам последующих теорем.

Теорема 10. *Если* L *— НЗ ЛП 2-го рода, то она устойчива относительно этого свойства тогда и только тогда, когда система* $Ax \leq b$, $x \geq 0$ *устойчиво совместна* (*что эквивалентно совместности системы* $Ax < b$, $x \geq 0$), *а система* $A^T u \geq c$, $u \geq 0$ *устойчиво несовместна* (*что эквивалентно несовместности и единственности решения системы* $A^T u \geq 0$, $u \geq 0$).

Теорема 11. *Если* L *— НЗ ЛП 3-го рода, то она устойчива относительно этого свойства тогда и только тогда, когда системы* $Ax \leq b$, $x \geq 0$ *и* $A^T u \geq c$, $u \geq 0$ *устойчиво несовместны* (*что эквивалентно их несовместности и единственности решения каждой из систем* $Ax \leq 0$, $x \geq 0$ *и* $A^T u \geq 0$, $u \geq 0$).

Теорема 12. *Задача* L *устойчиво неразрешима тогда и только тогда, когда хотя бы одна из систем* $Ax \leq b$, $x \geq 0$ *и* $A^T u \geq c$, $u \geq 0$ *устойчиво неразрешима.*

6. Методы регуляризации неустойчивых задач ЛП

Цель регуляризации неустойчивой задачи ЛП

$$L : \max \{(c, x) \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\} \tag{20}$$

состоит в такой ее трансформации в некоторую задачу P, которая являлась бы устойчивой, при этом либо $\operatorname{Arg} P \subset \operatorname{Arg} L$, либо P содержит параметр y такой, что при $y \to 0$ (при определенных режимах убывания) вектор $x(y) \to \overline{x} \in \operatorname{Arg} L$, где $x(y) \in \operatorname{Arg} P_y$.

6.1. *Регуляризация задачи* L *по Тихонову* ([7], библиография книги [8]).

Регуляризация задачи L по Тихонову состоит в ее реконструкции вида

$$P_\alpha :\ \max \{(c, x) - \alpha \|x\|^2 \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}, \tag{21}$$

α — положительный параметр. Если задача (20) разрешима, то (21) однозначно разрешима при любом $\alpha > 0$. Если x_α — это решение, то $x_\alpha \to \overline{x}$ при $\alpha \to +0$, где $\overline{x}$ — нормальное (т. е. минимальное по норме) решение задачи (20). Если к тому же система $Ax < b$ совместна, $y_t = [A_t, b_t, c_t] \to [A, b, c]$, $x_t^\alpha = \arg\max\{(c_t, x) - \alpha \|x\|^2 \mid A_t x \leq b_t\}$, то $x_t^\alpha \to \overline{x}$ при $t \to \infty$, $\alpha \to +0$. На самом деле стремление к нулю параметра α необязательно. Справедливо

Утверждение [9]. При достаточно малых $\alpha > 0$

$$\arg P_\alpha = \arg\min\{\|x\|^2 \mid x \in \operatorname{Arg} L\}, \tag{22}$$

при этом границей для таких α является двойственная оценка $\overline{\alpha}$ неравенства $(c,x) \ge \operatorname{opt} L$ в задаче

$$\min\{\|x\|^2 \mid Ax \le b,\ x \ge 0,\ (c,x) \ge \operatorname{opt} L\}.$$

Взяв подходящее положительное $\alpha_0 < |\overline{\alpha}|$ и предположив совместность системы $Ax < b$, мы тем самым обеспечиваем $[A,b,c]$-устойчивость задачи (21) при $\alpha = \alpha_0$ вместе со свойством $\widetilde{f}(A_t,b_t,c_t) \to \widetilde{f}(A,b,c)$ и $x_t = \arg P^t_{\alpha_0} \to \overline{x}$ при $t \to \infty$, где $\overline{x}$ — нормальное решение задачи L.

6.2. *Линейная регуляризация задачи L.* Линейный тип регуляризации был предложен в ([4], гл. VIII, § 4). Он состоит в трансформации задачи (20) в задачу

$$L_\delta:\ \max\{(c - \delta\Delta c, x) \mid Ax \le b + \delta\Delta b,\ x \ge 0\}, \tag{23}$$

где $\Delta c > 0$, $\Delta b > 0$ — фиксированные приращения, $\delta > 0$.

Теорема 13. *Задача* (23) *устойчива при любом $\delta > 0$, при этом $|\operatorname{Arg} L_\delta - \operatorname{Arg} L| \to 0$ при $\delta \to +0$. Здесь $|N_\delta - N| = \sup\limits_{x\in N_\delta}\inf\limits_{y\in N}\|x-y\|$ — полухаусдорфова норма.*

Что касается устойчивости задачи L_δ, то это вытекает из очевидной совместности систем $Ax < b + \delta\Delta b$, $x \ge 0$ и $A^T u > c - \delta\Delta c$, что эквивалентно требуемой устойчивости (см. теорему 5). Обоснование второй части утверждения имеется в ([4], гл. VIII, § 4].

6.3. *Линейно-двойственная регуляризация* ([10], §§ 20–22). В качестве исходной задачи L примем задачу $L_y : \min\{(c,x) \mid Ax \le b\}$, $y = [A,b,c]$. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ — неотрицательный базис пространства $\mathbf{R}^n$ (т. е. система этих векторов является всесторонней). Запишем задачу

$$L^*_y(t) : \max\left\{u_{m+1} \mid t\,(c,e_i) + \sum_{j=1}^m u_j[t\,(a_j,e_i) - b_j] \ge u_{m+1},\ \ u_j \ge 0,\ \ j = 1,\dots,m,\ \ i = 1,\dots,n+1\right\};$$

здесь t — числовой параметр.

Теорема 14. *Пусть $\{y_k\} \to y$, задача L разрешима и система $Ax < b$ совместна. Если $\{t_k\} \to \infty$ и $\{t_k\|y_k - y\|\} \to 0$, то, начиная с некоторого k_0, множества $\operatorname{Arg} L^*_{y_k}(t_k)$ не пусты, при этом $\operatorname{opt} L^*_{y_k}(t_k) \to \operatorname{opt} L$; если $u^k \in \operatorname{Arg} L^*_{y_k}(t_k)$, $k \ge k_0$, то последовательность $\{u^k\}$ ограничена и ее предельные точки принадлежат множеству $\operatorname{Arg} L^*_y$, т. е. $\{u^k\}' \subset \operatorname{Arg} L^*_y$.*

В работе [10] имеются варианты изложенного метода регуляризации, снимающие требование совместности системы $Ax < b$.

Литература

1. Еремин И.И., Астафьев Н.Н. *Введение в теорию линейного и выпуклого программирования.* – М.: Наука, 1976. – 192 с.
2. Карманов В.Г. *Математическое программирование.* – М.: Наука, 1980. – 256 с.
3. Левитин Е.С. *Теория возмущений в математическом программировании и ее приложения.* – М.: Наука, 1992. – 360 с.
4. Ашманов С.А. *Линейное программирование.* – М.: Наука, 1981. – 304 с.
5. Еремин И.И. *Теория линейной оптимизации.* – Екатеринбург: Изд-во "Екатеринбург", 1999. – 312 с.
6. Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н. *Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования.* – М.: Наука, 1993. – 336 с.

7. Тихонов А.Н., Рютин А.А., Агаян Г.М. *Об устойчивом методе решения задачи линейного программирования с приближенными данными* // ДАН СССР. – 1983. – Т. 272. – № 5. – С. 1058–1063.
8. Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю. *Линейное программирование.* – М.: Изд-во “Факториал”, 1998. –176 с.
9. Еремин И.И. *О задачах последовательного программирования* // Сиб. матем. журн. – 1973. – Т. XIV. – № 1. – С. 53–63.
10. Астафьев Н.Н. *Линейные неравенства и выпуклость.* – М.: Наука, 1982. – 154 с.

Институт математики и механики
Уральского отделения Российской
Академии наук (г.Екатеринбург)

Поступила
12.07.1999