ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 5 (540)

УДК 517.929

О.А. ДЖУНГУРОВА, И.Н. ВОЛОДИН

АСИМПТОТИКА НЕОБХОДИМОГО ОБЪЕМА ВЫБОРКИ ПРИ ПРОВЕРКЕ ГИПОТЕЗ О ПАРАМЕТРЕ ФОРМЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, БЛИЗКОГО К НОРМАЛЬНОМУ

Введение

Необходимый объем выборки (НОВ) при различении двух гипотез определяется как наименьший объем наблюдений, при котором существует критерий различения этих гипотез, гарантирующий заданные ограничения на вероятности ошибок первого и второго рода. Существуют два основных подхода асимптотического анализа НОВ: подход, основанный на стремлении к нулю определенной меры близости гипотез, и исследование асимптотики НОВ при стремлении к нулю заданных ограничений на вероятности ошибок. Первый подход осуществляется в рамках лекамовской теории локальной асимптотической нормальности и использует меры контигуальной близости различаемых гипотез, в то время, как второй основан на теории больших уклонений для сумм независимых случайных величин. Оба этих подхода подробно излагаются и реализуются в [1]. Синтез этих подходов, использующий схему асимптотического анализа, в которой одновременно происходит как сближение гипотез, так и стремление к нулю ограничений на вероятности ошибок, представлен в [2].

В данной работе рассматривается еще один подход к получению асимптотических формул для НОВ, который не претендует на широкую область его применений, но приводит к исключительно точным асимптотическим формулам: асимптотическая ошибка в определении НОВ не превосходит единицы наблюдений. Основное применение подхода связано с проверкой возможности аппроксимации распределения, из которого берется выборка, нормальным законом. Подход применим к распределениям, принадлежащим области притяжения нормального закона, таким как биномиальное, Пуассона, гамма, обратное гауссовское, Бирнбаума–Саундерса и т. п. Такого рода распределения зависят, кроме прочих, от некоторого параметра λ, при стремлении которого к бесконечности распределение аппроксимируется нормальным законом. В связи с этим может возникнуть задача проверки гипотезы $\lambda \geq \lambda_0$ при альтернативе $\lambda \leq \lambda_1$ $(< \lambda_0)$. Предлагается исследовать асимптотику НОВ, когда $\lambda_0, \lambda_1 \to \infty$. При этом, как и в лекамовской теории, можно ввести аналоги контигуальных альтернатив и строить асимптотически локально наиболее мощные критерии, соответствующие при больших значениях λ_0 и λ_1 критериям, на которых достигается (асимптотически) НОВ. Изложение этого подхода содержится в [3], здесь же приводим доказательства результатов, заявленных в [4].

Особенность предлагаемого метода состоит в том, что при различении такого рода гипотез НОВ остается ограниченным, если фиксировано отношение $u = \lambda_1/\lambda_0$, и поэтому точность аппроксимации НОВ измеряется в терминах абсолютной ошибки, а не относительной, что обычно делается при аппроксимациях в схеме сближающихся альтернатив. В данном случае уместно провести параллели с исследованием дефекта критериев по Ходжесу–Леману [5], как это делается в [6].

1. Асимптотика НОВ при нормальной аппроксимации гамма-распределения

Гамма-распределение с функцией плотности

$$f(x|a,\lambda) = \frac{1}{a^\lambda \Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} \exp\left\{-\frac{x}{a}\right\}, \quad x > 0; \quad a > 0, \quad \lambda > 0,$$

асимптотически нормально с параметрами λa и λa^2. Для проверки односторонних гипотез о значениях параметра формы λ при мешающем масштабном параметре a существует равномерно наиболее мощный инвариантный критерий, обладающий максиминным свойством, в силу чего для определения НОВ достаточно выполнения ограничений на вероятности ошибок в граничных точках области безразличия. Этот критерий основан на инвариантной статистике

$$L_n = n \ln\left(\sum_1^n X_k\right) - \sum_1^n \ln X_k, \quad n \geq 2,$$

асимптотическое и точное распределения которого хорошо изучены. Асимптотика НОВ в схеме сближающихся гипотез исследована в [7], где получена формула, с ошибкой определения НОВ не более единицы наблюдения при достаточно близком расстоянии между гипотезой и альтернативой. Там же имеются формулы характеристической функции и семиинвариантов любого порядка для тестовой статистики, на основе которых получены эджвортские разложения ее распределения.

Рассмотрим задачу проверки гипотезы $H_0 : \lambda \geq \lambda_0$ при альтернативе $H_1 : \lambda \leq \lambda_1$, где λ_0 выбирается так, чтобы гарантировать заданную точность аппроксимации гамма-распределения нормальным законом в равномерной метрике. Следовательно, как λ_0, так и λ_1 — достаточно большие числа, и асимптотика НОВ будет исследоваться в схеме: $\lambda_0 \to \infty$ и при этом $\lambda_1/\lambda_0 = u$ $(= \mathrm{const})$.

Статистика

$$T_n = 2\lambda_0 n \left[\ln\left(\frac{1}{n}\sum_1^n X_k\right) - \frac{1}{n}\sum_1^n \ln X_k\right]$$

есть линейное преобразование статистики L_n, так что критерий $T_n > C$ соответствует минимуму числа наблюдений, гарантирующих заданные ограничения α, β на вероятности ошибок (соответствует НОВ). Как известно, при выборе из гамма-распределения с параметром формы λ_0 распределение этой статистики при $\lambda_0 \to \infty$ и фиксированном объеме наблюдений n сходится к распределению хи-квадрат с $(n-1)$-й степенью свободы. Этот факт был установлен первоначально в [8] и неоднократно использовался в задачах проверки гипотез и доверительном оценивании; предлагались также более точные аппроксимации распределения T_n при больших λ_0 (см., напр., [9]). Однако точность аппроксимации хи-квадрат ухудшается с ростом числа наблюдений n, и это обстоятельство осложняет доказательство асимптотической точности оценок НОВ, основанных на этой аппроксимации. Изучим более подробно эту проблему и покажем, что в данной асимптотической схеме анализа истинное значение НОВ остается ограниченным при любых (больших) значениях λ_0, если $u = \mathrm{const}$.

Чтобы не загромождать формулы при исследовании точности асимптотики распределения T_n излишними индексами, заменим в записи T_n множитель λ_0 на λ, и пусть выбор идет из гамма-распределения с параметром формы λ. В таком случае логарифм характеристической функции T_n (см. [7]) имеет вид

$$\ln\varphi(t) = -2\mathbf{i}tn\lambda\ln n + n\ln\Gamma(\lambda(1-2\mathbf{i}t))n\ln\Gamma(\lambda) + \ln\Gamma(n\lambda) - \ln\Gamma(n\lambda(1-2\mathbf{i}t)).$$

Если воспользоваться известной асимптотической формулой Стирлинга

$$\ln\Gamma(z) = \ln\sqrt{2\pi} + \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{\theta}{12z},$$

в которой z — комплексное число и $|\theta| \le 1$, то путем несложных алгебраических выкладок нетрудно убедиться, что при $\lambda \to \infty$ справедливо асимптотическое представление

$$\ln \varphi(t) = -\frac{n-1}{2} \ln(1 - 2\mathbf{i}t) + r(t; n, \lambda), \tag{1}$$

в котором $r(t; n, \lambda) = O(n/\lambda)$, причем $|r(t; n, \lambda)| < n/\lambda$.

Асимптотическое представление (1) показывает, что при $\lambda \to \infty$ распределение T_n сходится к хи-квадрат со скоростью $1/\lambda$ в равномерной метрике, но с ростом n хи-квадрат аппроксимация теряет в точности пропорционально n. В связи с этим, прежде чем приступить к выводу асимптотической формулы для НОВ, докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *В задачах проверки гипотез $\lambda \ge \lambda_0$ при альтернативах $\lambda \le \lambda_1$, $\lambda_0 \gg 1$, $\lambda_1/\lambda_0 = \mathrm{const}$, с заданными ограничениями α, β на вероятности ошибок существуют такие Λ_0 и $N = N(u, \Lambda_0)$, что НОВ $n^*(\lambda_0, \lambda_1; \alpha, \beta) < N$ при всех $\lambda_0 > \Lambda_0$.*

Доказательство. Вернемся к прежней записи статистики T_n с множителем λ_0. Если выбор происходит из распределения с параметром λ, то среднее значение и дисперсия T_n равны (см. [7]): $\mathbf{E}_\lambda T_n = n\mu(\lambda, n)$ и $\mathbf{D}_\lambda T_n = n\sigma^2(\lambda, n)$, где

$$\mu(\lambda, n) = 2\lambda_0[-\ln n + \psi(n\lambda) - \psi(\lambda)],$$
$$\sigma^2(\lambda, n) = 4\lambda_0^2[\psi'(\lambda) - n\psi'(n\lambda)];$$

$\psi(x) = d\ln\Gamma(x)/dx$ и $\psi'(x) = d^2\ln\Gamma(x)/dx^2$ — соответственно ди-гамма и три-гамма функции Эйлера, для которых при $x \to \infty$ справедливы асимптотические представления (см. любой справочник по специальным функциям)

$$\psi(x) = \ln x - 1/2x - \theta(x)/12x^2, \quad \psi'(x) = 1/x + 1/2x^2 + \theta_1(x)/6x^2,$$

где $0 < \theta(x) < 1$ и $0 < \theta_1(x) < 1$ при всех $x > 0$.

Теперь воспользуемся неравенством Хмаладзе (см. [10] или [1], формула (1.2))

$$n^* \le 1 + \left[\frac{\sigma(\lambda_0, n-1)/\sqrt{\alpha} + \sigma(\lambda_1, n-1)/\sqrt{\beta}}{\mu(\lambda_1, n-1) - \mu(\lambda_0, n-1)}\right]^2,$$

из которого следует, что для доказательства леммы достаточно показать ограниченность функций μ и σ при всех значениях n и достаточно больших значениях λ_0 (напомним, $\lambda_1 = u\lambda_0$, $u < 1$).

Используя приведенные выше асимптотики для ди-гамма и три-гамма функций Эйлера, находим

$$\mu(\lambda, n) = \frac{\lambda_0}{\lambda}\left[\frac{n-1}{n} + \frac{\theta_2}{6\lambda}\right], \quad \sigma^2(\lambda, n) = 2\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2\left[\frac{n-1}{n} + \frac{\theta_3}{3}\right],$$

где $|\theta_i = \theta(\lambda, n)| < 1$. Полученные представления при $\lambda_0 \to \infty$ указывают на ограниченность исследуемых функций. □

Полученные результаты определяют следующую асимптотику НОВ. При каждом фиксированном значении критической константы C для максимальных значений вероятностей ошибок первого и второго рода критерия $T_n > C$ справедливы асимптотические представления

$$\mathbf{P}_{\lambda_0}(T_n > C) = 1 - K_{n-1}(C) + R_0(n, C, \lambda_0), \tag{2}$$
$$\mathbf{P}_{\lambda_1}(T_n \le C) = K_{n-1}(uC) + R_1(n, C, \lambda_0),$$

где R_0 и R_1 сходятся к нулю при $\lambda_0 \to \infty$ равномерно по всем значениям C и ограниченным подмножествам значений n.

Пусть $C_0(n)$ — решение уравнения $\mathbf{P}_{\lambda_0}(T_n > C) = \alpha$, а $C_1(n)$ — уравнения $\mathbf{P}_{\lambda_1}(T_n \le C) = \beta$. Допуская рандомизацию при выборе объема наблюдений, как это обычно делается при исследовании дефекта критериев (см. [6]), определим НОВ как решение уравнения $C_0(n) = C_1(n)$. Асимптотические формулы (2) позволяют представить это уравнение в виде

$$uK_{n-1}^{-1}(1 - \alpha + R_0(n, C_0(n), \lambda_0)) = K_{n-1}^{-1}(\beta - R_1(n, C_1(n), \lambda_0)),$$

где $K_\nu^{-1}(p)$ — квантиль хи-квадрат распределения. Эта квантиль есть дифференцируемая функция от p и ν, если придавать аргументу ν непрерывный ряд значений. Данное обстоятельство и ограниченность НОВ устанавливают (посредством тех же рассуждений, что и в [7]) справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Если* $\lambda_0 \to \infty$ *и при этом* $u = \lambda_1/\lambda_0 = \mathrm{const}$, *то* $n^* = \widetilde{n} + o(1)$, *где* $\widetilde{n}$ *есть корень уравнения* $uK_{n-1}^{-1}(1-\alpha) = K_{n-1}^{-1}(\beta)$.

Заметим, что $\widetilde{n}$ совпадает с НОВ в задаче гарантийного различения гипотез о значениях дисперсии нормального распределения при неизвестном среднем, и значения этого НОВ приводится в большинстве известных таблиц математической статистики. Об удивительной точности $\widetilde{n}$ как асимптотики НОВ в проблеме гарантийного различения гипотез о масштабном параметре гамма-распределения можно судить по данным табл. 2 (столбец Г), но обсудим это в дальнейшем, т. к. точно такая же асимптотика НОВ имеет место в более сложной задаче о нормальной аппроксимации распределений типа обратного гауссовского, его смещенного по долговечности варианта, распределения Бирнбаума–Саундерса и его обобщения.

2. Асимптотика НОВ при нормальной аппроксимации обобщенного распределения Бирнбаума–Саундерса

Распределение с функцией плотности

$$f(x|\lambda,\theta,p) = \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\lambda(1-p)}{(x/\theta)^{3/2}} + \frac{p}{(x/\theta)^{1/2}}\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\lambda\sqrt{\frac{\theta}{x}} - \sqrt{\frac{x}{\theta}}\right)^2\right\},$$

отличной от нуля на положительной полуоси и зависящей от параметров формы $\lambda > 0$, масштаба $\theta > 0$ и смеси $p \in [0;1]$, является смесью с весом $1-p$ обратного гауссовского распределения (IG) и с весом p смещенного по долговечности (long-biased) аналога данного распределения ($\overline{\mathrm{IG}}$). Оно служит обобщением известного в теории надежности распределения Бирнбаума–Саундерса (BS) – равновесной смеси ($p = 1/2$) распределений IG и $\overline{\mathrm{IG}}$, и в дальнейшем будет обозначаться аббревиатурой GBS. Впервые, по-видимому, это распределение было введено в [11]. Решению проблем оценки параметров распределения GBS посвящена работа [12]; задачи проверки гипотез о значениях параметров p и λ рассматривались в [3].

Распределение GBS асимптотически при $\lambda \to \infty$ нормально с параметрами $\mu = \theta(\lambda + p)$ и $\sigma^2 = \theta(\lambda + p(3-p))$, и поэтому интересна задача проверки гипотезы $H_0 : \lambda \geq \lambda_0$ при альтернативе $H_1 : \lambda \leq \lambda_1$ при $\lambda_0 \to \infty$ и $\lambda_1/\lambda_0 = \mathrm{const}$. Как было установлено в [3], инвариантный относительно масштабных преобразований, асимптотически свободный от параметра смеси p и обладающий свойством асимптотической ($\lambda_0 \to \infty$) минимаксности критерий проверки H_0 при альтернативе H_1 основан на U-статистике

$$T_n = \frac{\lambda_0}{n}\left(\sum_1^n X_k \sum_1^n X_k^{-1} - n^2\right).$$

Теорема 4.3 работы [3] устанавливает, что нерандомизированный критерий $\varphi^* = \varphi^*(X^{(n)})$, отвергающий гипотезу H_0, если $T_n > K_{n-1}^{-1}(1-\alpha)$, имеет асимптотический уровень α:

$$\lim_{\lambda_0\to\infty} \sup_{\lambda>\lambda_0} \mathbf{E}_\lambda \varphi^* \leq \alpha$$

и является асимптотически равномерно наиболее мощным: для любого другого критерия φ асимптотического уровня α имеет место неравенство

$$\lim_{\lambda_0\to\infty} \inf_{\lambda<\lambda_0} (\mathbf{E}_\lambda\varphi^* - \mathbf{E}_\lambda\varphi) \geq 0.$$

Таким образом, данная схема асимптотического анализа мощностных свойств критерия φ^* совершенно аналогична схеме асимптотического анализа в рамках сближающихся гипотез с заменой соотношения $\lambda_1 - \lambda_0 \to 0$ на $\lambda_1/\lambda_0 = \mathrm{const}$. Повторяя дословно рассуждения работы ([1], § 1), сводим задачу различения сложных гипотез к различению простых гипотез $\lambda = \lambda_0$ и

$\lambda = \lambda_1$, и дальнейший вывод асимптотической формулы НОВ осуществляется так же, как и в случае гамма-распределения.

Лемма 2. *В задачах проверки гипотез $\lambda = \lambda_0$ при альтернативах $\lambda = \lambda_1$, $\lambda_0 \gg 1$, $\lambda_1/\lambda_0 = u$* ($= \mathrm{const}$) *с заданными ограничениями α, β на вероятности ошибок с неизвестными и, возможно, различными при гипотезе и альтернативе значениями масштабных параметров, а также неизвестными, но одинаковыми значениями параметра смеси p существуют такие Λ_0 и $N = N(u, \Lambda_0)$, что НОВ $n^*(\lambda_0, \lambda_1; \alpha, \beta) < N$ при всех $\lambda_0 > \Lambda_0$.*

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 1, достаточно убедиться, что при выборе из распределения GBS с параметрами λ и p среднее значение и дисперсия T_n имеют вид $\mathbf{E}_\lambda T_n = n\mu(\lambda, p, n)$ и $\mathbf{D}_\lambda T_n = n\sigma^2(\lambda, p, n)$, где $\mu(\lambda, p, n)$ и $\sigma^2(\lambda, p, n)$ — ограниченные функции от λ, $u = \lambda/\lambda_0 < 1$, n и $p \in [0; 1]$.

Используя формулы из ([3], предложение 3.1), находим

$$\mu(\lambda, p, n) = \frac{\lambda_0}{\lambda^2}\frac{n-1}{n}(\lambda + p - p^2),$$

$$\sigma^2(\lambda, p, n) = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 \left[2\frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}\left(a_1(p) + \frac{a_2(p)}{n} - \frac{1}{n^2}\right) + a_3(p) + \frac{a_4(p)}{n} + \frac{a_5(p)}{n^2}\right],$$

где $a_i(p)$, $i = 1, \ldots, 5$, — многочлены степени 2 и 4 от p с постоянными коэффициентами. Легко видеть, что μ и σ^2 — ограниченные функции переменных λ, u, и p. $\square$

Теперь, повторяя рассуждения теоремы 1.2 из [1] и используя замечания, предшествующие формулировке теоремы 1 данной статьи, убеждаемся, что справедлива

Теорема 2. *Если $\lambda_0 \to \infty$ и при этом $u = \lambda_1/\lambda_0 = \mathrm{const}$, то $n^* = \widetilde{n} + o(1)$, где $\widetilde{n}$ — корень уравнения $uK_{n-1}^{-1}(1-\alpha) = K_{n-1}^{-1}(\beta)$.*

3. Иллюстрации точности асимптотик НОВ при нормальных аппроксимациях гамма-распределения и обобщенного распределения Бирнбаума–Саундерса

Итак, при тестировании приближенной нормальности распределения гамма и обобщенного распределения Бирнбаума–Саундерса (GBS) асимптотики ($\lambda_0 \to \infty$) имеют одинаковый вид и зависят от граничных точек различаемых гипотез только через отношение $u = \lambda_1/\lambda_0$. Ниже приводятся табл. 1–4, вычисленные методом статистического моделирования, в которых приводятся общие для всех распределений значения целочисленных асимптотик $\widetilde{n}^*$ для НОВ ($\widetilde{n}^*$ определяется как ближайшее целое, не меньшее $\widetilde{n}$) и соответствующие распределениям гамма (Г), обратного гауссовского (IG, $p = 0$), Бирнбаума–Саундерса (BS, $p = 1/2$) и смещенного по долговечности обратного гауссовского распределения ($\overline{\mathrm{IG}}$, $p = 1$) значениям ошибок $\Delta = n^* - \widetilde{n}^*$ в определении НОВ по асимптотической формуле. Вычисления n^* проводились моделированием 10 000 выборок из соответствующих распределений. Для $u = 0{,}9$ значения Δ для указанных распределений получить не удалось из-за медленной работы датчика случайных чисел.

Таблица 1

$\alpha = 0{,}01$, $\beta = 0{,}01$

$\widetilde{n}$	u	$\lambda_0 = 10$				$\lambda_0 = 50$				$\lambda_0 = 100$			
		Г	IG	BS	$\overline{\mathrm{IG}}$	Г	IG	BS	$\overline{\mathrm{IG}}$	Г	IG	BS	$\overline{\mathrm{IG}}$
10,3	0,1	−0,3	+1,7	+0,7	+3,7	−0,3	+1,7	+0,7	+0,7	+0,7	+0,7	+0,7	+0,7
18,8	0,2	−0,8	+1,2	+0,2	+3,2	+0,2	+2,2	+0,2	+0,2	+0,2	+1,2	+1,2	+0,2
32,0	0,3	−1,0	+2,0	0,0	+3,0	−1,0	+1,0	0,0	−1,0	0,0	+2,0	0,0	+2,0
53,7	0,4	−2,7	+3,3	+1,3	+2,3	−0,7	−1,7	−0,7	−1,7	+0,3	+0,3	+0,3	+0,3
92,3	0,5	−4,3	+4,7	+0,7	+3,7	−0,3	+0,7	−0,3	+0,7	−0,3	−1,3	+1,7	−2,3
168,1	0,6	−6,1	+3,9	−2,1	+0,9	+0,9	+0,9	+0,9	+0,9	−0,1	−2,1	−0,1	+0,9
342,5	0,7	−5,5	+2,5	−1,5	+4,5	+0,5	+0,5	−0,5	+1,5	+0,5	+0,5	−0,5	+0,5
871,7	0,8	−8,7	+8,3	−1,7	+7,3	−1,7	+1,3	−1,7	+1,3	−2,7	+0,3	−2,7	−1,7

Таблица 2

$\alpha = 0{,}01$, $\beta = 0{,}05$

$\widetilde{n}$	u	$\lambda_0 = 10$				$\lambda_0 = 50$				$\lambda_0 = 100$			
		Г	IG	BS	$\overline{\mathrm{IG}}$	Г	IG	BS	$\overline{\mathrm{IG}}$	Г	IG	BS	$\overline{\mathrm{IG}}$
7,1	0,1	−0,1	+1,9	+0,9	−1,1	+0,9	+1,9	+0,9	+1,9	−0,1	+0,9	+0,9	+0,9
13,1	0,2	−0,1	+1,9	+0,9	+0,9	−0,1	+1,9	−0,1	+0,9	−0,1	+1,9	−0,1	+1,9
22,3	0,3	−1,3	+2,7	−0,3	−2,3	−0,3	+1,7	+0,7	+1,7	+0,7	+0,7	+0,7	+0,7
37,6	0,4	−1,6	+2,4	−0,6	−2,6	+0,4	+1,4	−0,6	+1,4	−0,6	+0,4	+0,4	+0,4
65,1	0,5	−4,1	+5,9	+0,9	+0,9	−1,1	−1,1	+0,9	−1,1	+0,9	−2,1	−0,1	+0,9
119,4	0,6	−0,4	+3,6	−0,4	−2,4	+0,6	+2,6	−1,4	−1,4	−0,4	−1,4	+0,6	−2,4
244,9	0,7	−9,9	+5,1	−0,9	+4,1	−0,9	−1,9	+1,1	−1,9	−0,9	−3,9	−0,9	+0,1
627,4	0,8	−9,4	+4,6	−0,4	+3,6	+4,6	+0,6	−0,4	+0,6	+3,6	+0,6	−0,4	+1,6

Таблица 3

$\alpha = 0{,}05$, $\beta = 0{,}01$

$\widetilde{n}$	u	$\lambda_0 = 10$				$\lambda_0 = 50$				$\lambda_0 = 100$			
		Г	IG	BS	$\overline{\mathrm{IG}}$	Г	IG	BS	$\overline{\mathrm{IG}}$	Г	IG	BS	$\overline{\mathrm{IG}}$
8,7	0,1	−0,7	+2,3	+0,3	+3,3	+0,3	+3,3	+0,3	+2,3	+0,3	+0,3	+0,3	+0,3
15,3	0,2	−1,3	+1,7	+0,7	+1,7	−0,3	+0,7	+0,7	+1,7	+0,7	+2,7	+0,7	+0,7
25,2	0,3	−1,2	+1,8	+0,8	−1,2	+0,8	+1,8	−0,2	+0,8	+0,8	+1,8	+0,8	+1,8
41,5	0,4	−1,5	+0,5	+0,5	+2,5	+1,5	+1,5	−0,5	+2,5	−0,5	+0,5	+1,5	−1,5
70,2	0,5	−3,2	−1,2	+0,8	+3,2	−0,2	−1,2	+0,8	+0,8	+0,8	−1,2	+2,8	+1,8
126,4	0,6	-2,4	+2,6	+2,6	+0,6	−1,4	−1,4	−0,4	−1,4	−0,4	+0,6	+0,6	+0,6
255,0	0,7	−3,0	−4,0	+1,0	+2,0	−1,0	0,0	0,0	+3,0	+1,0	+1,0	−2,0	−1,0
643,5	0,8	−10,5	+2,5	+0,5	−1,5	−0,5	+2,5	+0,5	+0,5	+0,5	−1,5	+0,5	+0,5

Таблица 4

$\alpha = 0{,}05$, $\beta = 0{,}05$

$\widetilde{n}$	u	$\lambda_0 = 10$				$\lambda_0 = 50$				$\lambda_0 = 100$			
		Г	IG	BS	$\overline{\mathrm{IG}}$	Г	IG	BS	$\overline{\mathrm{IG}}$	Г	IG	BS	$\overline{\mathrm{IG}}$
5,9	0,1	+0,1	+1,1	+1,1	−1,9	+0,1	+2,1	+1,1	+1,1	+0,1	+0,1	+0,1	+1,1
10,2	0,2	−0,2	+1,8	+0,8	+2,8	−0,2	+0,8	+0,8	+1,8	+0,8	+0,8	+0,8	+0,8
16,8	0,3	−0,8	−1,8	+0,2	+1,2	+0,2	+1,2	+0,2	+0,2	+0,2	+0,2	+1,2	+0,2
27,6	0,4	−1,6	+1,4	+0,4	+2,4	+0,4	+1,4	+0,4	+2,4	+0,4	−1,6	+0,4	+0,4
46,9	0,5	−1,9	−1,9	+0,1	+2,2	−0,8	+1,2	+1,2	+0,2	−0,8	+0,2	−0,8	+0,2
84,8	0,6	−3,8	+2,2	+0,2	+1,2	−0,8	+1,2	+1,2	+0,2	−0,8	+0,2	−0,8	+0,2
172,0	0,7	−8,0	+2,0	−1,0	−3,0	−1,0	+2,0	+1,0	−2,0	−1,0	0,0	0,0	+2,0
436,5	0,8	−11,5	−4,5	+4,5	−4,5	−0,5	−2,5	+5,5	−1,5	+0,5	+0,5	+1,5	+1,5

Табличные данные указывают на исключительную точность асимптотики НОВ во всей области табулирования. Мы располагаем более обширными таблицами, включающими значения $\alpha, \beta = 0{,}1$ и $\lambda_0 = 200$, которые подтверждают наблюдаемую на приводимых данных закономерность о повышении точности асимптотики при увеличении значений α, β и u. По существу можно утверждать, что ошибки в определении НОВ лежат в пределах точности метода статистического моделирования. В подтверждении этого довода проводились 100-кратные репликации в определении НОВ для ряда значений α, β, u и распределений Г и BS. Разброс в моделируемых значениях n^* в основном определялся величиной u. При $u = 0{,}1$ наблюдалось не более трех значений n^* (в основной массе — 2), причем модальное значение содержало более 90% данных. Для $u = 0{,}5$ широта выборки не превосходила 5, а для $u = 0{,}8$ — не более 10.

Следует отметить, что распределение GBS крайне медленно приближается к нормальному (в равномерной метрике) при $\lambda \to \infty$. Так, табличные данные, приведенные в конце статьи [3], указывают, что ошибка в использовании нормального закона вместо распределения BS не превышает 0,01 лишь при $\lambda_0 \geq 400$, а при $\lambda = 10$ равна 0,061. Высокая точность асимптотики НОВ при малых значениях λ_0 указывает на возможность ее использовании при проверке гипотез о значениях параметра формы распределений Γ и BS вне проблемы тестирования приближенной нормальности этих распределений.

Авторы считают своим долгом поблагодарить профессора Д.М. Чибисова, советы и замечания которого значительно улучшили содержание статьи.

Литература

1. Володин И.Н., Новиков А.А. *Асимптотика необходимого объема выборки при гарантийном различении параметрических гипотез* // Исследов. по прикл. матем. Сб. научных статей. – Казань: Унипресс, 1999. – Т. 21. – С. 3–41.
2. Боровков А.А., Могульский А.А. *Большие уклонения и проверка статистических гипотез* // Тр. ин-та матем. СО РАН. – 1993. – Т. 19. – С. 1–222.
3. Volodin I.N., Dzungurova O.A. *On limit distributions emerging in the generalized Birnbaum-Saunders model* // J. Math. Sci. – 2000. – V. 99. – № 3. – P. 1348–1366.
4. Volodin I.N., Dzungurova O.A. *Asymptotically optimum test for selection a partial types from a general model of fatigue crack extension* // Second Inter. Conf. on Math. Methods in Reliab., Bordeaux, France, July 4–7, 2000, Abstr. book. – 2000. – V. 2. – P. 1022–1025.
5. Hodges J.L., Lehmann E.L. *Deficiency* // Ann. Math. Statist. – 1970. – V. 41. – P. 783–801.
6. Chibisov D.M. *Asymptotic expansions and deficiences of tests* // Proc. Internat. Congress Math., Aug. 16–24, 1983, Warzawa. PWN-Polish Scientific Publishers, Warzawa, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford. – 1984. – V. 2. – P. 1063–1079.
7. Володин И.Н. *О числе наблюдений, необходимых для различения двух близких гипотез* // Теория вероят. и ее применен. – 1967. – Т. 12. – № 3. – С. 575–581.
8. Linhart H. *Approximate confidence limits for the coefficient of variation of gamma distribution* // Biometrics. – 1965. – V. 21. – P. 733–738.
9. Bain L.J., Engelhardt M. *A two moment chi-square approximations for the statistic* $\log(\overline{X}/\widetilde{X})$ // J. Amer. Statist. Assoc. – 1979. – V. 70. – P. 948–950.
10. Хмаладзе Е.В. *Оценка необходимого числа наблюдений для различения простых сближающихся гипотез* // Теория вероят. и ее применен. – 1975. – Т. 20. – С. 115–125.
11. Jorgensen B., Seshadri V., Whitmore G.A. *On the mixture of the inverse Gaussian distribution with its complimentari reciprocal* // Scand. J. Statist. – 1991. – V. 18. – № 1. – P. 77-79.
12. Gupta R.C., Akman H.O. *On the reliability studies of a weighted inverse Gaussian model* // J. Statist. Plann. Inference. – 1995. – V. 48. – № 1. – P. 69–83.

Казанский государственный университет

Поступила 23.01.2006