И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2001 МАТЕМАТИКА № 7 (470)

УДК 517.518.8

П.В. БОРИСОВ

О ПОЛИНОМАХ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В МЕТРИКЕ ТИПА L_p

Введение. В данной работе даны характеристические свойства полинома наилучшего приближения в норме, связанной с задачей навигации. Рассмотрим функцию $f \in L_p(Q)$, $1 < p < \infty$, где $Q \subset R^m$ — некоторое ограниченное замкнутое множество с мерой. Пусть норма функции f определяется следующим образом:

$$\|f\|_\Delta = \max_t \left(\int_{\Delta_t} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \tag{1}$$

где $\Delta_t = (t + \Delta) \cap Q$, $t \in R^m$, $\Delta \subset R^m$.

Потребность изучения аппроксимаций функций в подобной норме возникает в следующей задаче. Пусть автоматический летательный аппарат движется с постоянным вектором скорости над районом Q, $f = f(x)$, $x \in R^2$, — высота (или иная функция, характеризующая район Q), и информация о функции f хранится в бортовом компьютере в виде аппроксимирующего "полинома" $r(x) \approx f(x)$. Находясь над некоторой точкой $t \in Q$, координаты которой известны с погрешностью, аппарат измеряет значение f на малой области $t + \Delta = \Delta_t$, $\Delta \subset R^2$, т. е. снимает фрагмент $\varphi(x) = \varphi_t(x) = f(t + x)$, $x \in \Delta$, функции f. Задача навигации (привязки) есть задача определения координат точки t по функции f ("полиному" r) и фрагменту φ. Она сводится к следующей задаче:

$$d(r, t) = \inf_T \{\|r(T + x) - \varphi(x)\|^\Delta : \Delta \subset Q\},$$

где $\|f\|^\Delta = \|f|_\Delta\|$ с $f|_\Delta = \begin{cases} f(x), & x \in \Delta; \\ 0, & x \notin \Delta, \end{cases}$ а $\|\cdot\|$ — некоторая норма.

Если $T = T(x) \in \arg d(r, t)$, то евклидово расстояние $|t - T|$ есть ошибка привязки. Ошибка привязки оценивается (см. [1], с. 659) сверху через величину уклонения полинома r от функции f в метрике (1).

В данной работе даются необходимые и достаточные условия на наилучшее приближение полиномом в случае, когда $\|\cdot\|$ есть L_p-норма.

Постановка задачи. Пусть Φ_n есть линейная оболочка $n + 1$ линейно независимых функций $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ из $L_p(Q)$. Полином $r \in \Phi_n$, на котором достигается точная нижняя грань $\min_{q \in \Phi_n} \|f - q\|_\Delta = \|f - r\|_\Delta$, называется полиномом наилучшего приближения для функции f на классе Φ_n. Требуется найти характеризационные свойства полинома наилучшего приближения для функции f.

Прежде чем перейти к доказательству основных утверждений, заметим, что т. к. Φ_n — конечномерное подпространство, то для любой функции $f \in L_p$ существует по крайней мере один полином наилучшего приближения. Легко показать, что норма $\|\cdot\|_\Delta$ при $1 < p < \infty$ является строго выпуклой, как максимум строго выпуклых функций, а значит (см., напр., [2], с. 19),

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 99-01-00460).

полином наилучшего приближения единственный. Обозначим

$$Q^* = Q^*(r) = \left\{ t : \left(\int_{\Delta_t} |f-r|^p dx \right)^{1/p} = \|f-r\|_\Delta \right\}.$$

Теорема 1. *Пусть $f(x) \in L_p(Q)$, $1 < p < \infty$. Полином*

$$r(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)$$

является полиномом наилучшего приближения для f тогда и только тогда, когда существуют точки $t_i \in Q^*$ и положительные числа λ_i, $i = 0, \ldots, d$, $d \leq n+1$, $\sum\limits_{i=0}^{d} \lambda_i = 1$, такие, что выполняются равенства

$$\sum_{i=0}^{d} \lambda_i \left(\int_{\Delta_{t_i}} \varphi_k |f-r|^{p-1} \operatorname{sign}(f-r) dx \right) = 0, \quad k = 0, \ldots, n. \tag{2}$$

Доказательство. Полином $r \in \Phi_n$ является полиномом наилучшего приближения для f тогда и только тогда, когда r минимизирует функционал

$$F(c_0, \ldots, c_n) = \max_t F_t(c_0, \ldots, c_n),$$

где

$$F_t(c_0, \ldots, c_n) = \int_{\Delta_t} |f(x) - c_0\varphi_0(x) - \cdots - c_n\varphi_n(x)|^p dx.$$

Заметим, что $F_t(\cdot)$, а значит, и $F(\cdot)$ — выпуклые функционалы. В силу известной теоремы о минимуме выпуклого функционала (см., напр., [3], с. 142) для того чтобы r был полиномом наилучшего приближения для f, необходимо и достаточно, чтобы субдифференциал функционала $F(\cdot)$ в точке $a = (a_0, \ldots, a_n)$ содержал нуль. Субдифференциал $\partial F(a)$ выражается формулой (см., напр., [3], с. 87) $\partial F(a) = \operatorname{conv} \bigcup\limits_{t \in Q^*(r)} \partial F_t(a)$, где $\partial F_t(a) = (\partial F_t(a)/\partial a_0, \ldots, \partial F_t(a)/\partial a_n)$. Учитывая, что

$$\partial F_t / \partial a_i = -p \int_{\Delta_t} \varphi_i |f-r|^{p-1} \operatorname{sign}(f-r) dx,$$

получаем представление (2). В силу теоремы Каратеодори (см., напр., [4], с. 19) можно считать, что d не превосходит $n+1$. □

Условия на полином наилучшего приближения, данные в теореме 1, неудобны для применения на практике. Ниже приводится теорема, которая является аналогом теоремы Колмогорова о характеризации полинома наилучшего приближения (см., напр., [4], с. 13), и на наш взгляд может служить основой для создания алгоритма построения полинома наилучшего приближения.

Теорема 2. *Пусть $f \in L_p(Q)$, $1 < p < \infty$. Для того чтобы $r \in \Phi_n$ был полиномом наилучшего приближения для f, необходимо и достаточно, чтобы не существовало полинома $q \in \Phi_n$ такого, что*

$$\int_{\Delta_t} q|f-r|^{p-1} \operatorname{sign}(f-r) dx < 0 \quad \forall t \in Q^*(r).$$

Эта теорема является непосредственным следствием теоремы о минимаксе (см. [5], с. 240). Также ее легко получить из следующей теоремы, в которой покажем, что независимо от вида множества $Q^*(r)$ для того чтобы установить, что полином $r \in \Phi_n$ является полиномом наилучшего приближения для функции f, нужно не более $n+2$ точек из $Q^*(r)$.

Теорема 3. *Пусть $f \in L_p(Q)$, $1 < p < \infty$. Для того чтобы $r \in \Phi_n$ был полиномом наилучшего приближения для f, необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие $n+2$ точки $\{t_0, \ldots, t_{n+1}\} \subseteq Q^*(r)$, не обязательно различные, что не найдется полинома $q \in \Phi_n$, для которого*

$$\int_{\Delta_{t_i}} q|f-r|^{p-1} \operatorname{sign}(f-r)dx < 0 \quad \forall i = 0, \ldots, n+1. \tag{3}$$

Доказательство. Покажем, что условие (3) и необходимые и достаточные условия того, что полином r является наилучшим, эквивалентны. Обозначим $c_{k,i} = \int\limits_{\Delta_{t_i}} \varphi_k|f-r|^{p-1} \operatorname{sign}(f-r)dx$. При $t_0 = t_1 = \cdots = t_{n+1}$ отсутствие q, удовлетворяющего (3), означает, что $c_{k,i} = 0$ $\forall k = 0, \ldots, n+1$ и, значит, выполнено (2). Пусть не все t_i совпадают.

Записав в новых обозначениях условие того, что не существует полинома q, удовлетворяющего неравенствам

$$\int_{\Delta_{t_i}} q|f-r|^{p-1} \operatorname{sign}(f-r)dx < 0, \quad i = 1, \ldots, d,$$

для некоторого натурального d, получим несовместность системы

$$\sum_{k=0}^{n} q_k c_{k,i} < 0, \quad i = 0, \ldots, d, \quad q = \sum_{k=0}^{n} q_k \varphi_k(x). \tag{4}$$

Далее будем отождествлять q и набор коэффициентов $(q_0, \ldots, q_n)$. Запишем необходимые и достаточные условия несовместности системы линейных неравенств (4) относительно q_k, сформулированные в теореме Александрова, Фань-Цзи (см., напр., [6], с. 282), учитывая, что система (4) однородная: найдутся такие положительные числа λ_i, $i = 0, \ldots, d$, что

$$\sum_{i=0}^{d} \lambda_i \left(\sum_{k=0}^{n} q_k c_{k,i} \right) = \sum_{k=0}^{n} q_k \left(\sum_{i=0}^{d} c_{k,i} \lambda_i \right) = 0 \quad \forall q \in R^{n+1}.$$

В силу произвольности q будем иметь $\sum\limits_{i=0}^{d} c_{k,i}\lambda_i = 0$, $k = 0, \ldots, n$. Поскольку все λ_i положительны, получаем условие (2) теоремы 1. Тот факт, что d не превосходит $n+1$, доказывает теорему.

Используя результаты, полученные в [7], можно сформулировать подобную теорему для случая, когда $\|\cdot\|$ есть L_1-норма.

Обозначим через $Z(f)$ множество нулей функции f, будем также полагать, что функция $\operatorname{sign}(f)$ обращается в нуль на множестве $Z(f)$.

Теорема 4. *Пусть $f \in L_1(Q)$. Для того чтобы $r \in \Phi_n$ был полиномом наилучшего приближения для f, необходимо и достаточно, чтобы для любого полинома $q \in \Phi_n$ выполнялось соотношение*

$$\max_{t \in Q^*(r)} \left(\int_{\Delta_t} q \operatorname{sign}(f-r)dx + \int_{\Delta_t \cap Z(f-r)} |q|dx \right) \geq 0.$$

Доказательство. Достаточно доказать следующее равенство для производной по направлению

$$\|f-r+lq\|_{\Delta} - \|f-r\|_{\Delta} = l \max_{t \in Q^*(r)} \left(\int_{\Delta_t} q \operatorname{sign}(f-r)dx + \int_{\Delta_t \cap Z(f-r)} |q|dx \right) + o(l)$$

при $l > 0$, откуда без труда получается утверждение теоремы. Будем пользоваться известным соотношением для $L_1 = L_1(X)$ (см. [7], с. 103)

$$\lim_{l \to 0} \frac{1}{l} \left(\|f+lq\|_{L_1(X)} - \|f\|_{L_1(X)} - |l| \int_{Z(f)} |q|dx \right) = \int_X q \operatorname{sign}(f)dx.$$

При $X=\Delta_t$ и $l>0$

$$\|f-r+lq\|_\Delta = \max_{t\in Q^*(r-lq)} \int_{\Delta_t} |f-r+lq|dx =$$

$$= \max_{t\in Q^*(r-lq)\cup Q^*(r)} \left(\int_{\Delta_t} |f-r|dx + l\int_{\Delta_t} q\,\mathrm{sign}(f-r)dx + l\int_{\Delta_t\cap Z(f-r)} |q|dx + o(l,t)\right) \leq$$

$$\leq \|f-r\|_\Delta + l \max_{t\in Q^*(r-lq)\cup Q^*(r)} \left(\int_{\Delta_t} q\,\mathrm{sign}(f-r)dx + \int_{\Delta_t\cap Z(f-r)} |q|dx \right) + o(l).$$

Здесь $\max\limits_{t\in Q^*(r-lq)\cup Q^*(r)} |o(l,t)|$ заменено на $o(l)$, т. к. множество $Q^*(r-lq)\cup Q^*(r)$ компактно. Дословно повторяя доказательство, приведенное в [5], можно показать, что для любого положительного ε существует $l_0>0$ такое, что для любого $0<l<l_0$ выполняется соотношение

$$\max_{t\in Q^*(r-lq)\cup Q^*(r)} \left(\int_{\Delta_t} q\,\mathrm{sign}(f-r)dx + \int_{\Delta_t\cap Z(f-r)} |q|dx \right) -$$

$$- \max_{t\in Q^*(r)} \left(\int_{\Delta_t} q\,\mathrm{sign}(f-r)dx + \int_{\Delta_t\cap Z(f-r)} |q|dx \right) < \varepsilon$$

(см. [5], с. 234). В итоге получим неравенство

$$\|f-r+lq\|_\Delta \leq \|f-r\|_\Delta + l \max_{t\in Q^*(r)} \left(\int_{\Delta_t} q\,\mathrm{sign}(f-r)dx + \int_{\Delta_t\cap Z(f-r)} |q|dx \right) + o(l).$$

Теперь оценим $\|f-r+lq\|_\Delta$ с другой стороны:

$$\|f-r+lq\|_\Delta = \max_{t\in Q^*(r-lq)} \int_{\Delta_t} |f-r+lq|dx \geq$$

$$\geq \max_{t\in Q^*(r)} \left(\int_{\Delta_t} |f-r|dx + l\int_{\Delta_t} q\,\mathrm{sign}(f-r)dx + l\int_{\Delta_t\cap Z(f-r)} |q|dx \right) - \max_{t\in Q^*(r)} |o(l,t)| \geq$$

$$\geq \|f-r\|_\Delta + l \max_{t\in Q^*(r)} \left(\int_{\Delta_t} q\,\mathrm{sign}(f-r)dx + \int_{\Delta_t\cap Z(f-r)} |q|dx \right) - o(l).$$

Объединяя эти оценки, получим требуемое равенство. $\square$

Литература

1. Бердышев В.И. *Аппроксимация обобщенными полиномами, обеспечивающая наилучшую привязку* // Матем. заметки. – 1996. – Т. 60. – № 11. – С. 658–669.
2. Ахиезер Н.И. *Лекции по теории аппроксимации.* – 2 изд. – М.: Наука, 1965. – 408 с.
3. Пшеничный Б.Н. *Выпуклый анализ и экстремальные задачи.* – М.: Наука, 1980. – 320 с.
4. Даугавет И.К. *Введение в теорию приближения функций.* Учебное пособие. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. – 184 с.
5. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. *Введение в минимакс.* – М.: Наука, 1972. – 368 с.
6. Черников С.Н. *Линейные неравенства.* – М.: Наука, 1965. – 488 с.
7. Kripke B.R., Rivlin T.J. *Approximation in the metric of* $L_1(X,\mu)$ // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – V. 119. – № 1. – P. 101-122.

Уральский государственный университет

Поступила
08.06.1998