ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 8 (423)

УДК 515.124.4

Е.Н. СОСОВ

О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ СПЕЦИАЛЬНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

В статье получено обобщение теоремы Банаха об обратном операторе и обобщение принципа равностепенной непрерывности для F-пространств ([1], сс. 99, 104).

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, в котором каждые две различные точки можно соединить единственным сегментом из фиксированного множества сегментов S (под сегментом понимается кривая, длина которой равна расстоянию между ее концами ([2], с. 42)). Часто на пространство X и множество S будем налагать

Условие A. Каждый сегмент из множества S можно единственным образом продолжить до геодезической линии пространства X ([2], с. 48).

Введем следующие обозначения:

$T(x, y)$ — сегмент из множества S с концами $x, y \in X$;

(xyz) обозначает ситуацию, при которой $y \in T(x, z)$, $y \neq x$, $y \neq z$;

$\omega_\lambda(x, y)$ — точка, которая находится из условий:

а) если $0 \leq \lambda \leq 1$, то $\omega_\lambda(x, y) \in T(x, y)$ и $\rho(x, \omega_\lambda(x, y)) = \lambda \cdot \rho(x, y)$;

б) если выполнено условие A и $\lambda > 1$ ($\lambda < 0$), то $\rho(x, \omega_\lambda(x, y)) = |\lambda| \cdot \rho(x, y)$ и $(xy\omega_\lambda(x, y))$ $((\omega_\lambda(x, y)xy))$.

Часто на пространство X и множество S будем налагать также

Условие B. Отображение $\omega_\lambda : X \times X \to X$ непрерывно для каждого $\lambda \in K$, где $K = [0, 1]$, если условие A не выполнено, и $K = \mathbb{R}$, если условие A выполнено.

Аналогичные условия будем налагать также на метрическое пространство $(\widetilde{X}, \widetilde{\rho})$ с фиксированным множеством сегментов $\widetilde{S}$. Введем следующие определения. Непрерывное отображение $f : X \to \widetilde{X}$ назовем геодезическим отображением, если оно переводит сегменты из множества S в сегменты множества $\widetilde{S}$. Множество всех геодезических отображений из X в $\widetilde{X}$ обозначим через $G(X, \widetilde{X})$. Мы в большей степени будем интересоваться подмножеством $G_\omega(X, \widetilde{X})$ множества $G(X, \widetilde{X})$, содержащем только такие геодезические отображения $f : X \to \widetilde{X}$, которые удовлетворяют условию $f(\omega_\lambda(x, y)) = \widetilde{\omega}_\lambda(f(x), f(y))$ для всех $x, y \in X$ и для каждого $\lambda \in K$. Множество M пространства X назовем выпуклым, если вместе с каждыми двумя различными точками оно содержит сегмент из множества S с концами в этих точках.

Приведем некоторые элементарные свойства геодезических отображений.

1. Образ выпуклого множества при геодезическом отображении является выпуклым множеством.

2. Изометрическое отображение пространства X в пространство $\widetilde{X}$ является геодезическим отображением при условии возможного изменения множества $\widetilde{S}$.

3. Если множество $\widetilde{S}$ замкнуто относительно топологии поточечной сходимости в множестве всех сегментов пространства $\widetilde{X}$ и последовательность геодезических отображений поточечно сходится к некоторому непрерывному отображению, то это отображение геодезическое.

4. Если пространство $\widetilde{X}$ удовлетворяет условию B, последовательность отображений из множества $G_\omega(X,\widetilde{X})$ поточечно сходится к некоторому непрерывному отображению, то это отображение принадлежит множеству $G_\omega(X,\widetilde{X})$.

5. Если гомеоморфизм f принадлежит множеству $G(X,\widetilde{X})$ $(G_\omega(X,\widetilde{X}))$, то обратный гомеоморфизм f^{-1} принадлежит множеству $G(\widetilde{X},X)$ $(G_\omega(\widetilde{X},X))$.

Сформулируем полученные результаты.

Теорема 1. *Если $f \in G_\omega(X,\widetilde{X})$, то f отображает ограниченные множества в ограниченные множества.*

Теорема 2. *Пусть пространства X, $\widetilde{X}$ удовлетворяют условию* A, *отображение $f : X \to \widetilde{X}$ переводит ограниченные множества в ограниченные множества, $f(\omega_\lambda(x,y)) = \widetilde{\omega}_\lambda(f(x), f(y))$ для всех $x, y \in X$ и для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $f \in G_\omega(X,\widetilde{X})$.*

Теорема 3. *Пусть полные метрические пространства X, $\widetilde{X}$ удовлетворяют условиям* A, B *и все шары в этих пространствах выпуклые. Если сюръекция f принадлежит множеству $G_\omega(X,\widetilde{X})$, то f — открытое отображение.*

Следствием свойства 5 и теоремы 3 является

Теорема 4. *Пусть полные метрические пространства X, $\widetilde{X}$ удовлетворяют условиям* A, B *и все шары в этих пространствах выпуклые. Если отображение f из $G_\omega(X,\widetilde{X})$ биективно, то $f^{-1} \in G_\omega(\widetilde{X},X)$.*

Теорема 5. *Пусть полные метрические пространства X, $\widetilde{X}$ удовлетворяют условиям* A, B *и $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — семейство отображений из $G_\omega(X,\widetilde{X})$. Если для каждого $x \in X$ множество $\{f_\alpha(x) : \alpha \in A\}$ ограничено, то $\lim\limits_{x\to p} f_\alpha(x) = f_\alpha(p)$ равномерно относительно $\alpha \in A$.*

Пусть $\{r_i\}$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных действительных чисел, B_i — замкнутый шар с центром в точке $p \in X$, радиуса r_i. Из теоремы 1 следует, что на множестве $G_\omega(X,\widetilde{X})$ можно задать метрику [3]

$$\delta(f,\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \cdot \sup\{\widetilde{\rho}(f(x),\varphi(x)) : x \in B_i\} \cdot (1 + \sup\{\widetilde{\rho}(f(x),\varphi(x)) : x \in B_i\})^{-1}$$

для всех $f, \varphi \in G_\omega(X,\widetilde{X})$. Обозначим через $H_\omega(X)$ множество гомеоморфизмов из $G_\omega(X,X)$, равномерно непрерывных на каждом замкнутом шаре $B_i \subset X$ вместе с обратными гомеоморфизмами.

Из теоремы 1 данной статьи и теоремы 2 статьи [3] следует

Теорема 6. *Метрическое пространство $(H_\omega(X),\delta)$, наделенное операцией композиции отображений, является топологической группой, непрерывно действующей на пространстве (X,ρ).*

Замечание. В первом предложении статьи ([3], с. 61) следует читать: "... отображений (непрерывных), которые отображают ограниченные множества ...".

Доказательство теоремы 1. Допустим обратное. Пусть существует такая ограниченная последовательность $\{x_n\}$ из X, что $\widetilde{\rho}(f(x_n), f(p)) \to \infty$ $(n\to\infty)$, где p — фиксированная точка из X. Тогда, начиная с некоторого номера n, $\lambda_n = (\widetilde{\rho}(f(x_n), f(p)))^{-1} \leq 1$ и $\lambda_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Кроме того, $\omega_{\lambda_n}(p,x_n) \to p$ $(n\to\infty)$, поскольку $\rho(p,\omega_{\lambda_n}(p,x_n)) = \lambda_n \cdot \rho(p,x_n) \to 0$ $(n\to\infty)$. Получили противоречие с условием непрерывности отображения f, т. к.

$$\widetilde{\rho}(f(p), f(\omega_{\lambda_n}(p,x_n))) = \widetilde{\rho}(f(p), \widetilde{\omega}_{\lambda_n}(f(p), f(x_n))) = \lambda_n \cdot \widetilde{\rho}(f(p), f(x_n)) = 1. \quad \square$$

Доказательство теоремы 2. Докажем непрерывность отображения f. Пусть $x_n,\ x \in X$, $x_n \to x$ $(n \to \infty)$. Выберем такую последовательность действительных чисел $\{k_n\}$, что $k_n \to \infty$, $k_n \cdot \rho(x_n, x) \to 0$ $(n \to \infty)$. Тогда $\rho(x, \omega_{k_n}(x, x_n)) \to 0$, поскольку $\rho(x, \omega_{k_n}(x, x_n)) = k_n \cdot \rho(x, x_n)$. Кроме того, последовательность $\{f(\omega_{k_n}(x, x_n))\}$ ограничена, т. к. отображение f переводит ограниченные множества в ограниченные множества. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{\rho}(f(x_n), f(x)) = \lim_{n\to\infty} k_n^{-1} \cdot \widetilde{\rho}(f(\omega_{k_n}(x, x_n)), f(x)) = 0.$$

Таким образом, отображение f непрерывно. $\square$

Доказательство теоремы 3. Из представления $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \omega_n(p, C)$, где $p \in X$, C — открытый шар с центром в точке p и радиусом $\varepsilon > 0$, имеем

$$\widetilde{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{\omega}_n(f(p), f(C)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\widetilde{\omega}_n(f(p), f(C))},$$

где черта означает замыкание множества. По известной теореме о категориях ([1], с. 44) существует такой номер n, что множество $\overline{\widetilde{\omega}_n(f(p), f(C))}$ содержит непустое открытое множество. Но из условий A, B следует, что отображение $\widetilde{\omega}_\lambda(z, \cdot) : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ является гомеоморфизмом для каждого $z \in \widetilde{X}$ и для каждого $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Поэтому множество $\overline{f(C)}$ содержит открытое множество $V \neq \varnothing$. Кроме того,

$$\overline{f(C)} = \overline{f(\omega_{1/2}(C, \omega_{-1}(p, C)))} = \overline{\widetilde{\omega}_{1/2}(f(C), \widetilde{\omega}_{-1}(f(p), f(C)))} \supset \widetilde{\omega}_{1/2}(V, \widetilde{\omega}_{-1}(f(p), V)).$$

Последнее множество содержит точку $f(p)$ и открыто, поскольку в силу условий A, B открыто отображение $\widetilde{\omega}_\lambda : \widetilde{X} \times \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$. Выберем числа $\varepsilon_k = \varepsilon/2^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Из приведенных выше рассуждений следует, что найдутся такие действительные числа $\delta_k > 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, что $\delta_k \to 0$ $(k \to \infty)$ и $\overline{f(B(x, \varepsilon_k))} \supset \widetilde{B}(f(x), \delta_k))$ для каждого $x \in X$ и для каждого $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, где $B(x, \varepsilon_k)$ $(\widetilde{B}(f(x), \delta_k))$ — шар с центром в точке $x \in X$ $(f(x) \in \widetilde{X})$, радиуса ε_k (δ_k). Пусть $x_0 \in X$, $y \in \widetilde{B}(f(x_0), \delta_0)$. Тогда существует точка $x_1 \in B(x_0, \varepsilon_0)$, для которой $\widetilde{\rho}(f(x_1), y) < \delta_1$. Следовательно, $y \in \widetilde{B}(f(x_1), \delta_1)$. Повторяя это рассуждение, построим такую последовательность $\{x_k\}$, что $x_{k+1} \in B(x_k, \varepsilon_k)$, $y \in \widetilde{B}(f(x_k), \delta_k)$. Эта последовательность фундаментальная, поскольку

$$\rho(x_k, x_{k+l}) \leq \rho(x_k, x_{k+1}) + \cdots + \rho(x_{k+l-1}, x_{k+l}) < \varepsilon_k + \cdots + \varepsilon_{k+l-1} = \varepsilon \cdot 2^{1-k}(1 - 2^{-l})$$

для каждого $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ и для каждого $l \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Но пространство X полное, поэтому последовательность $\{x_k\}$ сходится к некоторому пределу $x \in X$. Кроме того, $y = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(x)$, поскольку отображение f непрерывно. Таким образом, $\widetilde{B}(f(x_0), \delta_0) \subset f(B(x_0, 3 \cdot \varepsilon))$, т. к. точка y из $\widetilde{B}(f(x_0), \delta_0)$ произвольная и $\rho(x_0, x) = \lim\limits_{k\to\infty} \rho(x_0, x_k) \leq 2 \cdot \varepsilon < 3 \cdot \varepsilon$. Теперь нетрудно заметить, что отображение f открытое. $\square$

Доказательство теоремы 5. Пусть $\varepsilon > 0$, $p \in X$. Очевидно, что множества $X_n = \{x : n^{-1} \cdot \widetilde{\rho}(f_\alpha(x), f_\alpha(p)) \leq \varepsilon,\ \alpha \in A\}$, $n = 1, 2, \ldots$, замкнуты в пространстве X и $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$. По теореме о категориях ([1], с. 44) существует такое натуральное число n_0, что $B(x_0, \delta) \subset X_{n_0}$ для некоторого $x_0 \in X_{n_0}$ и некоторого $\delta > 0$. Отображение $\omega_\lambda(z, \cdot) : X \to X$ является гомеоморфизмом для каждого $z \in X$ и для каждого $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ в силу условий A, B. Поэтому $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда $y = \omega_{n_0^{-1}}(p, \omega_{1/2}(\omega_{-1}(p, x_0), x)) \to p$. Но если $\rho(x, x_0) < \delta$, то

$$\widetilde{\rho}(f_\alpha(y), f_\alpha(p)) = n_0^{-1}\widetilde{\rho}(f_\alpha(\omega_{1/2}(\omega_{-1}(p, x_0), x)), f_\alpha(p)) \leq$$
$$\leq n_0^{-1}[\widetilde{\rho}(\widetilde{\omega}_{1/2}(f_\alpha(\omega_{-1}(p, x_0)), f_\alpha(x)), f_\alpha(\omega_{-1}(p, x_0))) + \widetilde{\rho}(f_\alpha(\omega_{-1}(p, x_0)), f_\alpha(p))] \leq$$
$$\leq (2 \cdot n_0)^{-1}[\widetilde{\rho}(f_\alpha(p), f_\alpha(x)) + 3 \cdot \widetilde{\rho}(f_\alpha(\omega_{-1}(p, x_0)), f_\alpha(p))] =$$
$$= (2 \cdot n_0)^{-1}[\widetilde{\rho}(f_\alpha(p), f_\alpha(x)) + 3 \cdot \widetilde{\rho}(f_\alpha(x_0), f_\alpha(p))] \leq 2 \cdot \varepsilon.$$

Следовательно, при $y \to p$ $f_\alpha(y)$ сходится к $f_\alpha(p)$. □

Литература

1. Садовничий В.А. *Теория операторов.* – 2-е изд. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1986. – 386 с.
2. Буземан Г. *Геометрия геодезических.* – М.: Физматгиз, 1962. – 503 с.
3. Сосов Е.Н. *О метрическом пространстве слабо ограниченных отображений метрических пространств* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 9. – С.61–64.

Казанский государственный
педагогический университет

Поступила
03.03.1995