ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 8 (423)

УДК 517.925.51

А.А. КОСОВ

О ГЛОБАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ. II

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему двух уравнений общего вида

$$\dot{x} = \varphi(t,x,y), \quad \dot{y} = \psi(t,x,y), \tag{1}$$

где $t \in R_+$, $x \in R$, $y \in R$, функции $\varphi(t,x,y)$ и $\psi(t,x,y)$ принадлежат классу $\mathrm{Lip}(2,1)$ (здесь и далее используются обозначения и определения [1]), их общую постоянную Липшица для области $S(0,r) = \{(x,y) \in R^2 : |x| + |y| \le r < +\infty\}$ обозначим $L(r) > 0$.

Если функции $\varphi(t,x,y)$ и $\psi(t,x,y)$ линейны и не зависят от t, то необходимые и достаточные условия глобальной асимптотической устойчивости нулевого решения $x = y = 0$ системы (1) записываются в виде двух неравенств Рауса-Гурвица. Если же функции φ и ψ нелинейны, то, как известно [2], обобщенных условий Рауса-Гурвица, записываемых в виде двух неравенств по правым частям системы (1), уже недостаточно для глобальной асимптотической устойчивости. Поэтому возникает следующая задача: найти дополнительные условия на функции $\varphi(t,x,y)$ и $\psi(t,x,y)$, которые совместно с обобщенными условиями Рауса-Гурвица обеспечили бы глобальную асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1).

Эта задача детально исследована для автономного случая (см. [3]–[5] и библиографию в них). Периодический случай рассматривался в [6]. Применим несколько модифицированные конструкции использованных в [3]–[6] знакопостоянных функций Ляпунова к неавтономному случаю системы (1), опираясь на теоремы 1-3 из [1].

2. Общий случай

Введем обозначения:

$$H_1(t,x,y,t_0) = (\varphi(t,x,y) - \varphi(t_0,0,y))/x, \quad x \ne 0;$$
$$H_4(t,x,y,t_0) = (\psi(t,x,y) - \psi(t_0,x,0))/y, \quad y \ne 0;$$
$$h_2(t_0,y) = \varphi(t_0,0,y)/y, \quad y \ne 0; \qquad h_3(t_0,x) = \psi(t_0,x,0)/x, \quad x \ne 0;$$
$$H_1^0(x,y) = \sup_{t\ge 0}\{(\varphi(t,x,y) - \varphi(t,0,y))/x\}, \quad x \ne 0;$$
$$H_4^0(x,y) = \sup_{t\ge 0}\{(\psi(t,x,y) - \psi(t,x,0))/y\}, \quad y \ne 0;$$
$$h_2^0(y) = \varphi^0(y)/|y|, \quad y \ne 0, \qquad \varphi^0(y) = \sup_{t\ge 0}|\varphi(t,0,y)|;$$
$$h_3^0(x) = \psi^0(x)/|x|, \quad x \ne 0, \qquad \psi^0(x) = \sup_{t\ge 0}|\psi(t,x,0)|.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97–01–00741).

Для системы (1) рассмотрим два варианта обобщенных условий Рауса-Гурвица в виде неравенств

$$\begin{cases} H_1 + H_4 \le -\alpha_1(x,y) < 0, \\ H_1 H_4 - h_2 h_3 \ge \alpha_2(x,y) > 0 \quad \text{при } t \ge 0,\ x \ne 0,\ y \ne 0 \end{cases} \tag{2}$$

или

$$\begin{cases} H_1^0(x,y) < 0 & \text{при всех } x \ne 0,\ y \in R, \\ H_4^0(x,y) < 0 & \text{при всех } y \ne 0,\ x \in R, \\ H_1^0 H_4^0 - h_2^0 h_3^0 > 0 & \text{при всех } x \ne 0,\ y \ne 0. \end{cases} \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть при некотором $t_0 \ge 0$ для системы* (1) *выполняются обобщенные условия Рауса-Гурвица* (2) *и, кроме того, условия:*
1.

$$\beta_1(t_0,x,y) = \sup_{t \ge 0}\{H_1(t,x,y,t_0)\} \le 0 \ \textit{при всех}\ x \ne 0,\ y \in R,$$
$$\beta_2(t_0,x,y) = \sup_{t \ge 0}\{H_4(t,x,y,t_0)\} \le 0 \ \textit{при всех}\ x \in R,\ y \ne 0;$$

2. *если $\beta_1(t_0,x,0) = 0$ для некоторого $x \ne 0$, то $|\psi(t,x,0)| \ge \gamma_1(x) > 0$ при всех $t \ge 0$; если $\beta_2(t_0,0,y) = 0$ для некоторого $y \ne 0$, то $|\varphi(t,0,y)| \ge \gamma_2(y) > 0$ при всех $t \ge 0$;*
3.

$$\int_0^{\pm\infty} |\varphi(t_0,0,y)|\operatorname{sign}(y)dy = +\infty, \qquad \int_0^{\pm\infty} |\psi(t_0,x,0)|\operatorname{sign}(x)dx = +\infty.$$

Тогда нулевое решение системы (1) *равномерно асимптотически устойчиво в целом.*

Если решения системы (1) *равномерно ограничены , то условие* 3 *в теореме* 1 *можно опустить.*

Доказательство. Для знакопостоянной, вообще говоря, функции

$$V(t_0,x,y) = \int_0^x |\psi(t_0,x,0)|\operatorname{sign}(x)dx + \int_0^y |\varphi(t_0,0,y)|\operatorname{sign}(y)dy \ge 0$$

производная в силу системы (1) имеет вид

$$\dot V(t,x,y) = H_1|h_3|x^2 + (h_2|h_3| + h_3|h_2|)xy + H_4|h_2|y^2 \text{ при } xy \ne 0;$$
$$\dot V(t,x,y) \le \beta_1(t_0,x,0)|h_3|x^2 \text{ при } x \ne 0, y = 0;$$
$$\dot V(t,x,y) \le \beta_2(t_0,0,y)|h_2|y^2 \text{ при } x = 0,\ y \ne 0.$$

Отсюда с учетом условия 1 и (2) получаем $\dot V(t,x,y) \le -W(x,y) \le 0$ при всех $x,y \in R$, причем множество нулей производной $W^{-1}(0)$ может быть представлено в виде $W^{-1}(0) = \{xy \ne 0 : h_2(t_0,y) = 0,\ h_3(t_0,x) = 0\} \cup \{x \ne 0,\ y = 0 : h_3(t_0,x) = 0\} \cup \{x \ne 0,\ y = 0 : \beta_1(t_0,x,0) = 0\} \cup \{x = 0,\ y \ne 0 : h_2(t_0,y) = 0\} \cup \{x = 0,\ y \ne 0 : \beta_2(t_0,0,y) = 0\} \cup \{(0,0)\} = M \cup M_1^y \cup M_2^y \cup M_1^x \cup M_2^x \cup \{(0,0)\}$.

Компоненту связности множества $\mathrm{M}_0 = \mathrm{M} \cup M_1^x \cup M_1^y \cup \{(0,0)\}$, которая содержит начало координат, обозначим M_0^0. Очевидно, что множество $\mathrm{M}_0^0 = V^{-1}(0)$ является множеством предельных нулей функции $V(t_0,x,y)$ и может быть точкой, отрезком, прямоугольником или другой геометрической фигурой, задаваемой соотношениями вида $M_0^0 = \{(x,y) : -\infty \le a \le x \le b \le +\infty,\ -\infty \le c \le y \le d \le +\infty\}$, где параметры a, b, c, d являются конечными или бесконечными и определяются правыми частями системы (1).

Из условия 3 следует равномерная по $\{t_0, x_0, y_0\}$ ограниченность всех решений системы (1).

На множестве M_0 будем иметь

$$\frac{d(x^2+y^2)}{dt} = 2H_1x^2 + 2H_4y^2 \le 2\beta_1(t_0,x,y)x^2 + 2\beta_2(t_0,x,y)y^2 < 0, \quad xy \neq 0,$$

поскольку из (2) следует, что $\beta_1\beta_2 \neq 0$ при $h_2h_3 = 0$;

$$\begin{aligned}
&\frac{d(x^2+y^2)}{dt} \le 2H_1x^2 \le 2\beta_1(t_0,x,0)x^2 < 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0,\ y = 0,\ x \notin M_2^y;\\
&\frac{d(x^2+y^2)}{dt} \le 2H_1x^2 \le 2\beta_1(t_0,x,0)x^2 = 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0,\ y = 0,\ x \in M_2^y;\\
&\frac{d(x^2+y^2)}{dt} \le 2H_4y^2 \le 2\beta_2(t_0,0,y)y^2 < 0 \quad \text{при} \quad y \neq 0,\ x = 0,\ y \notin M_2^x;\\
&\frac{d(x^2+y^2)}{dt} \le 2H_4y^2 \le 2\beta_2(t_0,0,y)y^2 = 0 \quad \text{при} \quad y \neq 0,\ x = 0,\ y \in M_2^x.
\end{aligned}$$

При этом, если множества $M_0 \cap M_2^y$ и $M_0 \cap M_2^x$ не пусты, то все решения всех предельных систем вследствие условия 2 сразу же покидают эти множества.

Таким образом, на множестве M_0 функция $v(x,y) = x^2 + y^2$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 из [1], поэтому нулевое решение $x = y = 0$ системы (1) равномерно асимптотически устойчиво относительно множества M_0^0, а множество $\mathrm{M}_0 \backslash \mathrm{M}_0^0$ не будет содержать целых траекторий ни одной предельной системы.

На множестве $\{\mathrm{M}_1^y \backslash M_2^y\} \backslash M_0^0$ будем иметь $d(x^2)/dt = 2x^2H_1 \le 2x^2\beta_1(t_0,x,0) < 0$, поэтому в этом множестве нет целых положительных полутраекторий предельных систем.

На множестве M_2^y вследствие условия 2 все решения всех предельных систем не будут иметь контакта с этим множеством.

Для множеств M_1^x и M_2^x в силу симметрии рассуждения аналогичны.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 1 из [1], ссылка на которую завершает доказательство теоремы.

Замечание. Теорема 1 является распространением теоремы 1 из [6] с периодического на неавтономный случай с тем лишь добавлением, что в ней не фиксировано заранее $t_0 = 0$. Следующая теорема, в которой вместо (2) обобщенные условия Рауса-Гурвица используются в форме (3), позволяет охватывать и в периодическом случае некоторые ситуации, в которых теорема Н.Г. Булгакова [6] не работает.

Теорема 2. *Пусть для системы* (1) *выполняются обобщенные условия Рауса-Гурвица* (3) *и, кроме того,*

$$\int_0^{\pm\infty} \varphi^0(y)\,\mathrm{sign}(y)dy = \int_0^{\pm\infty} \psi^0(x)\,\mathrm{sign}(x)dx = +\infty.$$

Тогда нулевое решение системы (1) *равномерно асимптотически устойчиво в целом.*

Если каким-либо образом установлена равномерная ограниченность решений системы (1)*, то условие расходимости интегралов можно опустить.*

Доказательство. Для функции

$$V(x,y) = \int_0^x \psi^0(x)\,\mathrm{sign}(x)dx + \int_0^y \varphi^0(y)\,\mathrm{sign}(y)dy \ge 0$$

с учетом (3) имеем

$$\dot V(t,x,y) \le H_1^0 h_3^0 x^2 + 2h_2^0 h_3^0 |xy| + H_4^0 h_2^0 y^2 \text{ при } xy \ne 0;$$
$$\dot V(t,x,y) \le H_1^0 h_3^0 x^2 \text{ при } x \ne 0,\ y = 0;$$
$$\dot V(t,x,y) \le H_4^0 h_2^0 y^2 \text{ при } x = 0,\ y \ne 0.$$

Отсюда на основании (3) получаем $\dot V(t,x,y) \le -W(x,y) \le 0$, причем $W^{-1}(0) = \{(x,y) : h_3^0(x) = 0,\ h_2^0(y) = 0\} \cup \{x = 0,\ h_2^0(y) = 0\} \cup \{y = 0,\ h_3^0(x) = 0\} \cup \{(0,0)\}$. На множестве $W^{-1}(0)$ для функции $v(x,y) = x^2 + y^2$ будем иметь оценку $\dot v(t,x,y) \le 2H_1^0 x^2 + 2H_4^0 y^2 < 0$ при $x^2 + y^2 \ne 0$.

Таким образом, при условиях теоремы 2 функции $V(x,y)$ и $v(x,y)$ будут удовлетворять всем условиям теоремы 3 из [1], ссылка на которую и завершает доказательство. □

Замечание. Если условия (3) выполняются в усиленном виде

$$H_1^0(x,y) \le -\lambda(x^2 + y^2) \text{ при всех } x \ne 0,\ y \in R;$$
$$H_4^0(x,y) \le -\lambda(x^2 + y^2) \text{ при всех } x \in R,\ y \ne 0,$$

где функция $\lambda(r) \in K$, а постоянная Липшица $L(r)$ такова, что $(L(r)/(r\lambda(r))) \to 0$ при $r \to +\infty$, то условия расходимости интегралов в теореме 2 можно опустить.

3. Случай асимптотически автономной системы

Пусть правые части системы (1) таковы, что для любых $(x,y) \in R^2$ существуют пределы

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t,x,y) = \varphi_0(x,y), \qquad \lim_{t\to+\infty} \psi(t,x,y) = \psi_0(x,y).$$

В этом случае систему (1) называют асимптотически автономной ([7], с. 22), а система

$$\dot x = \varphi_0(x,y),\ \ \dot y = \psi_0(x,y) \tag{4}$$

будет единственной предельной системой для (1). Правая часть системы (4), очевидно, принадлежит классу $\mathrm{Lip}(2,1)$, причем постоянная Липшица $L(r)$ та же, что и для системы (1).

Теорема 3. *Для того чтобы нулевое решение асимптотически автономной системы* (1) *было равномерно асимптотически устойчивым в целом, необходимо и достаточно выполнения условий:*

1. *нулевое решение системы* (4) *асимптотически устойчиво по Ляпунову* (*локально*);
2. *область притяжения* ([8], с. 34) *нулевого решения системы* (4) *неограничена;*
3. *система* (4) *имеет единственное состояние равновесия* $x = y = 0$*;*
4. *все решения системы* (1) *ограничены при* $t \ge t_0$ *равномерно по* $\{t_0, x_0, y_0\}$.

Доказательство. На основании следствия 1 из [1] для доказательства теоремы 3 надо установить только, что при условиях 1–4 нулевое решение системы (4) будет равномерно асимптотически устойчивым в целом. Необходимость каждого из условий 1–3 для этого очевидна, поэтому будем доказывать только достаточность.

Из условия 4 следует ([7], с. 23), что все решения системы (4) ограничены при $t \ge t_0$.

Предположим от противного, что условия 1–3 выполнены, а глобальной асимптотической устойчивости в системе (4) нет. Это означает, что область притяжения $A \ne R^2$ и $\partial A \ne \emptyset$. Возьмем $(x_0, y_0) \in \partial A$ так, чтобы она была ближайшей точкой ∂A к началу координат $x = y = 0$ (если таких точек несколько, то берем любую из них). Из сказанного выше следует ограниченность выходящего из этой точки решения системы (4), поэтому его множество ω-предельных точек $\Omega(x_0, y_0)$ не пусто и в силу замкнутости и инвариантности ∂A ([8], с. 35) будет $\Omega(x_0, y_0) \subset \partial A$.

Согласно теории динамических систем на плоскости ([9], с. 49) $\Omega(x_0, y_0)$ либо содержит точку покоя $(\bar{x}, \bar{y})$ системы (4), либо является замкнутой кривой на плоскости. Первый случай отпадает как противоречащий условию 3. Во втором случае из условия 2 следует, что кривая $\Omega(x_0, y_0)$ не может окружать начало координат, а поскольку она замкнута, то внутри нее обязательно имеется ([9], с. 50) состояние равновесия $(\bar{x}, \bar{y})$ системы (4), причем по построению $(\bar{x}, \bar{y}) \neq (0, 0)$, т. к. $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 \geq x_0^2 + y_0^2 > 0$. Вновь получили противоречие с условием 3. $\square$

Замечание 1. Если все условия теоремы 3 выполнены лишь в некоторой положительно инвариантной области $D \subset R_+ \times R^2$, то эта область целиком содержится в области притяжения.

Замечание 2. Теорема 3 обобщает на случай асимптотически автономных систем критерий глобальной устойчивости Н.П. Еругина ([10], теорема 8) для автономных систем.

Замечание 3. Как показывает пример трехмерной системы

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 + 2x_1(x_1^2 + x_2^2) - x_1(x_1^2 + x_2^2)^2, \\
\dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + 2x_2(x_1^2 + x_2^2) - x_2(x_1^2 + x_2^2)^2, \\
\dot{x}_3 &= -x_3,
\end{aligned}$$

для которой условия 1–4 выполнены, а глобальной асимптотической устойчивости нет — область притяжения $A = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$, теорема 3 для систем выше второго порядка, вообще говоря, несправедлива.

Замечание 4. Несмотря на качественный характер, теорема 3 может выступать и как полезный инструмент для исследования конкретных систем. Это связано с тем, что ее условия могут во многих случаях проверяться по правым частям (1) и (4). Так, условие 1 можно проверять по линейной части (4), условие 2 также можно проверить по правым частям [11], то же можно сказать и о других условиях.

4. Примеры

Пример 1. Для периодической системы

$$\dot{x} = -x^3 + y^3 \cos t, \quad \dot{y} = 2x^3 \sin t - 3y^3$$

имеем $H_1^0 = -x^2$, $H_4^0 = -3y^2$, $h_2^0 = y^2$, $h_3^0 = 2x^2$, $H_1^0 H_4^0 - h_2^0 h_3^0 = x^2 y^2 > 0$ при $xy \neq 0$. Условия теоремы 2 выполнены, поэтому нулевое решение этой системы равномерно асимптотически устойчиво в целом. Отметим, что теорема Н.Г. Булгакова [6] (а также теорема 1) здесь не применима, поскольку $H_1 = (-x^3 + y^3 \cos t - y^3)/x$ может принимать при малых $|x|$ сколь угодно большие по модулю значения разных знаков.

Пример 2. Уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + f(t, x)\dot{x} + g(t, x) = 0 \tag{5}$$

описывает движение материальной точки под действием нестационарных сил сопротивления типа вязкого трения и нестационарной восстанавливающей силы. Предположим, что выполняются соответствующие физической природе сил условия

$$\begin{cases} 0 < f_1 \leq f(t, x) \leq f_2 < +\infty & \text{при всех } t \geq 0,\ x \in R, \\ 0 < g_1 x^2 \leq x g(t, x) \leq g_2 x^2 & \text{при всех } t \geq 0,\ x \neq 0. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь f_i, g_i, $i = 1, 2,$ — положительные постоянные.

Возьмем $0 < \alpha < f_1$ и сделаем замену переменных $x_1 = x$, $x_2 = \alpha x + \dot{x}$. Тогда уравнение (5) запишется в виде системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = [-\alpha^2 + \alpha f(t, x_1) - g(t, x_1)/x_1]x_1 + [\alpha - f(t, x_1)]x_2. \end{cases} \tag{7}$$

Применяя к системе (7) теорему 2, получаем следующий результат. Если выполнены условия (6) и постоянные f_i и g_i удовлетворяют при некотором $0 < \alpha < f_1$ неравенствам

$$\alpha(f_2 - f_1) < g_1 \le g_2 < 2\alpha(f_1 - \alpha), \tag{8}$$

то решение $x = \dot{x} = 0$ уравнения (5) равномерно асимптотически устойчиво в целом.

Для случая, когда $f(t, x) = f_1 = \mathrm{const} > 0$, условия (8) сводятся к неравенству $2g_2 < f_1^2$ и совпадают с условиями, вытекающими из теоремы 1 [12] при дополнительном предположении о периодичности функции $g(t, x)$ по t.

Уравнения типа (5) исследовались в целом ряде работ, см., напр., [13], где имеется библиография по данному вопросу. Особенность условий (6), (8) состоит в том, что они не накладывают ограничений на производную функции $g(t, x)$ по t, которые обычно фигурируют в условиях устойчивости [13].

Отметим также, что неравенства (8) не являются необходимыми для глобальной устойчивости. Если $g(t, x) = g(x)$ не зависит от t, то, применяя к уравнению (5) теорему 1, находим, что условия (6) обеспечивают глобальную асимптотическую устойчивость, однако в случае нестационарной $g(t, x)$ вопрос остается открытым.

Аналитические возможности теоремы 3 проиллюстрируем на следующем примере.

Пример 3. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax(1 + y^2)^{-1} + 2by(1 + y^2)^{-2} = f_1(x, y), \\ \dot{y} = (cx - (1 + x^2)y^{2m+1}) \cos^2(\pi x/2) = f_2(x, y), \end{cases} \tag{9}$$

где a, b, c — вещественные параметры, $m \ge 0$ — целое число. Задача состоит в следующем: в пространстве параметров $R^3 = \{(a, b, c)\}$ найти G — область глобальной асимптотической устойчивости нулевого решения системы (9).

Будем последовательно проверять условия теоремы 3.

А1. Характеристическое уравнение для линейного приближения системы (9) имеет вид $\lambda^2 + a\lambda - 2bc = 0$, поэтому нулевое решение будет асимптотически устойчивым по линейному приближению при $a > 0$, $bc < 0$.

А2. $\partial f_1/\partial x_1 + \partial f_2/\partial x_2 = -a(1+y^2)^{-1} - y^{2m}(2m+1)(1+x^2)\cos^2(\pi x/2) \le 0$, поэтому на основании [11] область притяжения нулевого решения системы (9) неограничена.

А3. Покажем, что при $a > 0$, $bc < 0$, $|b| < a$ у системы (9) будет только одно состояние равновесия $x = y = 0$.

Действительно, кривая $\gamma_1 = \{f_1 = 0\}$ расположена при $b > 0$ во втором и четвертом квадрантах. Максимальное значение координаты x на этой кривой достигается при $|y| = 1$ и равно $\bar{x} = |b|/a$. Решения уравнения $f_2(x, y) = 0$ даются точками прямых $\gamma_{2k} = \{x = 1 + 2k,\ k \in Z\}$ и кривой $\gamma_2^0 = \{cx - (1 + x^2)y^{2m+1} = 0\}$, расположенной при $c > 0$ в первом и третьем квадрантах, при $c < 0$ — во втором и четвертом квадрантах. При $|b| < a$ будет $\bar{x} < 1$, поэтому кривая γ_1 не пересекается с прямыми γ_{2k}. А так как $bc < 0$, то кривые γ_1 и γ_2^0 расположены в разных квадрантах и пересекаются только в точке $x = y = 0$.

А4. Рассматривая производные от функций $v_1 = x^2$ и $v_2 = |y|$, легко можно показать, что система (9) устойчива по Лагранжу при $t \to +\infty$, если $a > 0$.

Таким образом, при $a > 0$, $bc < 0$, $|b| < a$ выполнены все условия теоремы 3, поэтому при выполнении этих неравенств нулевое решение системы (9) глобально асимптотически устойчиво.

В случае, когда $a < 0$ или $bc > 0$, характеристическое уравнение для линейного приближения системы (9) имеет корни с положительной вещественной частью, поэтому в этом случае нулевое решение системы (9) неустойчиво.

Осталось рассмотреть случаи: 1) $a = 0$, b, c произвольны; 2) $a > 0$, $b = 0$, c произвольно; 3) $a > 0$, $c = 0$, b произвольно; 4) $a > 0$, $|b| \geq a$, c произвольно.

В случае 1) система (9) имеет ненулевые состояния равновесия $x = 1 + 2k$, $y = 0$, $k \in Z$, поэтому нулевое решение не является асимптотически устойчивым в целом.

В случае 4) система (9) имеет ненулевые состояния равновесия на пересечении кривой γ_1 и прямых γ_{20} и $\gamma_{2,-1}$, поэтому в этом случае глобальная асимптотическая устойчивость также не имеет места.

В случаях 2) и 3) нулевое решение будет асимтотически устойчиво в целом, в чем нетрудно убедиться с помощью ЗПФЛ $V_1 = x^2$ и $V_2 = y^2$ соответственно, используя теорему 1 из [1].

Итак, теорема 3 позволяет в этом примере полностью описать область глобальной асимптотической устойчивости в пространстве параметров

$$G = \{(a, b, c) : a > 0,\ bc \leq 0,\ |b| < a\}. \tag{10}$$

Отметим, что в данном примере обобщенные условия Рауса-Гурвица $H_1H_4 - h_2h_3 > 0$ не выполняются, поэтому соответствующие теоремы из [3]–[6] не применимы.

Вдоль ломаной l, соединяющей точки $(0,0)-(1,0)-(1,+\infty)$, не выполняется оценка $f_1^2(x,y)+f_2^2(x,y) \geq k(x^2+y^2)$, $k = \mathrm{const} > 0$, поэтому теорема 25.2 Н.Н. Красовского [7] также не применима.

Поскольку

$$\int_0^{+\infty}\{\min\sqrt{f_1^2+f_2^2} \ :\ \sqrt{x^2+y^2}=\rho\}d\rho \leq$$
$$\leq \int_l\{\min\sqrt{f_1^2+f_2^2} \ :\ \sqrt{x^2+y^2}=\rho\}d\rho \leq \sqrt{a^2+c^2} + 0.5\,a + |b| < +\infty,$$

то теорема Олеха ([14], с. 641) здесь также не применима.

При $m = 0$ система (14) является по терминологии Г.С. Кречетова [15] системой 6-го класса. Предложенная в [15] конструкция функции Ляпунова для систем 6-го класса работает только при выполнении обобщенных условий Рауса-Гурвица, поэтому к системе (9) не применима.

Замечание. Если в системе (9) a, b и c являются непрерывными функциями времени t, имеющими конечные пределы при $t \to +\infty$, то точное описание области глобальной асимптотической устойчивости по-прежнему дается соотношением (10), в которое вместо a, b, c надо подставить их предельные значения.

Пример 4. Продольное возмущенное движение летательного аппарата в режиме планирования с большим углом атаки при "зажатых" рулях описывается системой двух дифференциальных уравнений [16]

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_{10}x^2 + c_{10}x^3 = f_1(x,y), \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + \sum\limits_{i=0}^{2} b_{2i}x^{2-i}y^i + \sum\limits_{i=0}^{3} c_{2i}x^{3-i}y^i = f_2(x,y), \end{cases} \tag{11}$$

где x — возмущение по углу атаки, y — возмущение по угловой скорости тангажа. В работе [16] поставлена следующая задача: выделить в пространстве коэффициентов R^{13} такое множество G_0, что $G_0 \subset G$, т. е. построить внутреннюю оценку области глобальной асимптотической устойчивости G для системы (11).

Для решения этой задачи в [16] было предложено строить функции Ляпунова в классе квадратичных форм и получать оценки G_0 в виде условий знакоопределенности производной этой функции в силу системы (11). Такой подход позволяет при заданном наборе коэффициентов проверять его принадлежность множеству G_0, а также алгоритмически строить сечения множества G_0.

Покажем, что теорема 3 позволяет получить аналитическую оценку $G_1 \subset G$ в виде явно записываемых неравенств на коэффициенты системы (11). Эта оценка дополняет результаты [16] в том плане, что объединение оценок $G_0 \cup G_1$ будет заведомо ближе к точной области G, чем каждая из оценок в отдельности и, кроме того, аналитические оценки могут оказаться полезными при выборе конструктивных параметров летательного аппарата, определяющих коэффициенты системы (11).

Для получения оценки G_1 будем последовательно проверять условия теоремы 3 для системы (11).

B1. Если выполняются неравенства

$$a_{11} + a_{22} < 0, \quad a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} > 0, \tag{12}$$

то нулевое решение системы (11) асимптотически устойчиво по линейному приближению.

B2.

$$\begin{aligned} &\partial f_1/\partial x + \partial f_2/\partial y = (a_{11} + a_{22}) + [(2b_{10} + b_{21})x + 2b_{22}y] + \\ &+[(3c_{10} + c_{21})x^2 + 2c_{22}xy + 3c_{23}y^2] = L_0 + L_1(x,y) + L_2(x,y). \end{aligned} \tag{13}$$

Квадратичная составляющая $L_2(x,y)$ будет определенно-отрицательной при выполнении неравенств

$$c_{23} < 0, \quad \Delta = 3c_{23}(3c_{10} + c_{21}) - c_{22}^2 > 0. \tag{14}$$

При выполнении (14) выражение (13) достигает своего максимального по $(x,y) \in R^2$ значения μ, вычисляемого по формуле

$$\begin{aligned} \mu = a_{11} + a_{22} + \frac{b_{22}^2 c_{22}^2 (3c_{10} + c_{21})}{\Delta^2} - \\ - \frac{3c_{23}(2b_{10} + b_{21})^2 - 4c_{22}b_{22}(2b_{10} + b_{21}) + 4b_{22}^2(3c_{10} + c_{21})}{4\Delta}. \end{aligned}$$

Таким образом, если выполняются неравенства (14) и

$$\mu \le 0, \tag{15}$$

то область притяжения нулевого решения (11) неограничена [11].

B3. Если $a_{12} = 0$, то, используя функции $V(t,x,y) = x^2$ и $v(t,x,y) = y^2$, с помощью теоремы 2 из [1] легко найдем точную область G, поэтому далее рассмотрим только более интересный случай $a_{12} \neq 0$. В этом случае по теореме о неявной функции в окрестности начала координат уравнение $f_1(x,y) = 0$ разрешимо относительно y и функция $y = y(x)$ имеет при $x = 0$ производную $y'(0) = -a_{11}/a_{12}$. Аналогичным образом для кривой $f_2(x,y) = 0$ находим $x'(0) = -a_{22}/a_{21}$ при $a_{21} \neq 0$. Поэтому при выполнении условий

$$a_{11}a_{12}a_{21}a_{22} \neq 0, \quad \mathrm{sign}(a_{11}a_{12}) \neq \mathrm{sign}(a_{12}a_{22}) \tag{16}$$

кривые $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$, пересекаясь в точке $x = y = 0$, проходят в разные квадранты плоскости (x,y). Если эти кривые не покидают тех квадрантов, в которых они расположены вблизи начала координат, то единственной точкой их пересечения будет $x = y = 0$. Поэтому достаточными условиями единственности состояния равновесия $x = y = 0$ системы (11) при выполнении (16) будут условия

$$\begin{cases} f_1(x,0) \neq 0 & \text{при } x \neq 0,\ f_1(0,y) \neq 0 \text{ при } y \neq 0; \\ f_2(x,0) \neq 0 & \text{при } x \neq 0,\ f_2(0,y) \neq 0 \text{ при } y \neq 0. \end{cases} \tag{17}$$

Для выполнения первого из этих условий необходимо и достаточно, чтобы уравнение $f_1(x,0) = a_{11}x + b_{10}x^2 + c_{10}x^3 = 0$ не имело ненулевых вещественных корней, что эквивалентно неравенству $b_{10}^2 - 4c_{10}a_{11} < 0$. Рассуждая аналогичным образом, с учетом (16) получим, что для обеспечения (17) необходимо и достаточно выполнения неравенств

$$b_{10}^2 - 4c_{10}a_{11} < 0, \quad b_{20}^2 - 4a_{21}c_{20} < 0, \quad b_{22}^2 - 4a_{11}c_{23} < 0. \tag{18}$$

Таким образом, если коэффициенты системы (11) удовлетворяют неравенствам (16) и (18), то она имеет единственное состояние равновесия $x = y = 0$.

В4. Рассмотрим однородную систему

$$\dot{x} = c_{10}x^3, \quad \dot{y} = \sum_{i=0}^{3} c_{2i}x^{3-i}y^i. \tag{19}$$

Если выполняются неравенства

$$c_{10} < 0, \quad c_{23} < 0, \tag{20}$$

то, используя функции $V(t,x,y) = x^2$ и $v(t,x,y) = y^2$ и применяя теорему 2 из [1], получаем, что нулевое решение системы (19) асимптотически устойчиво в целом, откуда следует ([8], теорема 39) ограниченность всех решений системы (11).

Суммируя все сказанное выше в В1–В4, получаем оценку G_1 области глобальной асимптотической устойчивости G в пространстве параметров R^{13} системы (11) в виде следующего утверждения.

Утверждение. Если коэффициенты системы (11) удовлетворяют неравенствам (12), (13), (16), (18) и (20), то нулевое решение этой системы глобально асимптотически устойчиво.

Замечание. Если коэффициенты системы (11) являются непрерывными функциями времени, имеющими конечные пределы при $t \to +\infty$, то оценку области G_1 получим, используя в неравенствах вместо коэффициентов их предельные значения.

Литература

1. Косов А.А. *О глобальной устойчивости неавтономных систем.* I. // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 7. – С. 28–35.
2. Красовский Н.Н. *Некоторые задачи теории устойчивости движения.* – М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.
3. Егоров И.Г. *Об устойчивости в целом нулевого решения автономной системы двух дифференциальных уравнений* // Некотор. вопр. дифференц. и интегр. уравнений и их прилож. – Якутск, 1978. – С. 22–31.
4. Булгаков Н.Г., Калитин Б.С. *Обобщение теорем второго метода Ляпунова* // Весцi АН БССР. Сер. физ.-матем. навук. – 1979. – № 1. – С. 70–74.
5. Егоров И.Г. *Об устойчивости в целом нулевого решения автономной системы двух дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30. – № 6. – С. 955–963.
6. Булгаков Н.Г. *Об устойчивости в целом периодической системы второго порядка общего вида* // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20. – № 12. – С. 2158–2161.

7. Шестаков А.А. *Прямой метод Ляпунова как метод локализации функциями Ляпунова предельных множеств неавтономных динамических процессов* // Функции Ляпунова и их применения. Новосибирск: Наука, 1987. – С. 14–48.
8. Зубов В.И. *Устойчивость движения.* – М.: Высш. школа, 1973. – 271 с.
9. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.* – М.: Наука, 1990. – 486 с.
10. Еругин Н.П. *Некоторые общие вопросы теории устойчивости движения* // ПММ. – 1951. – Т. 15. – № 2. – С.227–236.
11. Опойцев В.И. *Неограниченные области асимптотической устойчивости* // Автоматика и телемеханика. – 1981. – № 3. – С. 1–13.
12. Скачков Б.Н. *Об устойчивости в большом решений уравнений n-го порядка* // Дифференц. уравнения. – 1986. – Т. 22. – № 4. – С. 624–628.
13. Hatvani L. *On location of positive limit sets of solutions of nonautonomous system* // Colloquia mathematica societatis Janos Bolyai. Differential Equations: Qualitative theory. – Szeged, 1984. – P. 413–428.
14. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – М.: Мир, 1970. – 720 с.
15. Кречетов Г.С. *Функции Ляпунова для автономных систем второго порядка 5–7 классов* // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20. – № 12. – С.2048–2053.
16. Сиразетдинов Т.К., Аминов А.Б. *К задаче построения функций Ляпунова при исследовании устойчивости в целом решения систем с полиномиальной правой частью* // Метод функций Ляпунова и его приложения. – Новосибирск: Наука, 1984. – С. 72–77.

Иркутский государственный университет

Поступила
10.02.1995