ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 11 (534)

УДК 510.5

Д.И. ИВАНОВ

О СЛАБО КОМБИНАТОРНО-СЕЛЕКТОРНЫХ МНОЖЕСТВАХ

Пусть β — произвольная булева функция (БФ), $R(\beta)$ — класс всех слабо β-комбинаторно-селекторных (β-КС) множеств, $N = \{0,1,2,\dots\}$ и $\overline{A} = N \setminus A$ для $A \subseteq N$. В данной статье получены следующие результаты.

Теорема 1. *Если β — монотонная БФ, $\beta \neq 0,1$, то слабо β-КС множество принадлежит одному из классов $R(x \vee y) \subset R(xy \vee xz \vee yz) \subset R(xy) \subset R(x)$.*

Теорема 2. *Если β — немонотонная БФ и A — слабо β-КС множество, то $\overline{A}$ — рекурсивно-перечислимое множество и может быть произвольным, но обязательно рекурсивным множеством, или некоторым полурекурсивным, но не обязательно рекурсивным или произвольным рекурсивно перечислимым множеством.*

Пусть $A \subseteq N$ и β — n-местная БФ. Тогда A называется слабо β-КС множеством [1], если существует n-местная частично-рекурсивная функция (ЧРФ) f такая, что

$$\text{а)}\ (\forall x_1,\dots,x_n)(f(x_1,\dots,x_n)\downarrow \Rightarrow f(x_1,\dots,x_n) \in \{x_1,\dots,x_n\}),$$
$$\text{б)}\ (\forall x_1,\dots,x_n)(\beta(\chi(x_1),\dots,\chi(x_n)) = 1 \Leftrightarrow f(x_1,\dots,x_n) \in A),$$

где χ — характеристическая функция множества A. Функция f в силу условия а) является селекторной и называется соответствующей множеству A. Прежде всего очевидно, если $\beta(0,\dots,0) = 1$, то только N может быть слабо β-КС множеством. Поэтому ниже рассматриваются БФ β такие, что $\beta(0,\dots,0) = 0$ и, разумеется, они представляют интерес лишь с точностью до перестановки переменных. Очевидно также, $R(x) = \{X : X \subseteq N\}$. В работе [1] доказано, что включение $R(xy \vee xz \vee yz) \subset R(xy)$ строгое. Начнем с простого замечания.

Лемма 1. *$R(xy) \subset R(x)$.*

Доказательство. Начинаем вычислять значения $u_0 = \varphi_0(0,1), u_1 = \varphi_1(2,3),\dots,u_n = \varphi_n(2n,2n+1),\dots$, где φ_n — двухместная ЧРФ с клиниевским номером n. Для каждого n, если $u_n\downarrow$ (определено), отнесем к A число $2n$, если $u_n = 2n+1$ (соответственно $2n+1$, если $u_n = 2n$).

Предположим, что $\overline{A}$ — слабо xy-КС множество с соответствующей ЧРФ φ_n. Если предположить, что $2n, 2n+1 \in \overline{A}$, то $u_n \in \{2n, 2n+1\}$. По определению A, если $2n \in A$ ($2n+1 \in A$), то $u_n = 2n+1$ (соответственно $u_n = 2n$). Итак, хотя $\chi(2n)\&\chi(2n+1) = 0$, значение $u_n \in \overline{A}$, что противоречит предположению. □

Известны

Лемма 2 ([1]). *Если БФ γ получена из БФ β в результате отождествления некоторых переменных и приписывания некоторым из них константы 0, то $R(\beta) \subseteq R(\gamma)$.*

Лемма 3 ([1]). *Имеют место равенства $R(xy) = R(xyz) = \cdots$ и $R(x\vee y) = R(x\vee y\vee z) = \cdots$, причем $R(x \vee y) \subseteq R(\beta)$ для любой монотонной БФ $\beta \neq 0,1$.*

Пусть $\delta = xy \vee xz \vee yz$. Отметим также в виде леммы следующий нетривиальный результат.

Лемма 4 ([1]). *$R(\delta) = R(xy \vee xz)$.*

Любую БФ можно представить в виде дизъюнкции подходящих конъюнкций различных переменных, некоторые из которых входят в нее с отрицанием. Такие элементарные конъюнкции назовем *слагаемыми* БФ γ, а число переменных в слагаемом — его *весом.* Если γ – монотонная БФ, то ее слагаемые не содержат переменных с отрицанием. Поэтому, если γ состоит из одного слагаемого, вес которого не менее двух, то по лемме 3 $R(\gamma) = R(xy)$.

Лемма 5. *Если БФ γ зависит по крайней мере от трех переменных и число слагаемых γ не менее двух, то $R(\gamma) \subseteq R(\delta)$.*

Доказательство. Это верно, если γ зависит в точности от трех переменных [1]. Далее воспользуемся индукцией по наименьшему весу t слагаемых γ, и покажем, что в результате отождествления переменных γ можно привести к одному из следующих видов:

$$x_1 \vee x_2, \quad x_1(x_2 \vee x_3), \quad x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3. \tag{1}$$

Итак, $\gamma = x_nx_{n-1}\dots x_{k+1}\gamma'(x_1,\dots,x_k)$, где $x_n,\dots,x_{k+1}$ — все те переменные, которые встречаются во всех слагаемых γ. Отождествив их с u, получим БФ $\gamma'' = u\gamma'(x_1,\dots,x_k)$.

Возможно, таких переменных нет, и тогда $u = 1$, но γ' состоит по крайней мере из двух слагаемых.

Если $t = 1$, то $\gamma' = x_1 \vee \alpha(x_2,\dots,x_k)$. Отождествив в α переменные $x_3,\dots,x_k$ с x_2, получим $x \vee x_2$ и $\gamma'' = (x_1 \vee x_2)$.

Если $t = 2$, то $\gamma' = x_1x_2 \vee x_1\alpha_1(x_3,\dots,x_k) \vee x_2\alpha_2(x_3,\dots,x_k) \vee \alpha_3(x_3,\dots,x_k)$. В силу закона поглощения $(x_1x_2 \vee x_1x_2\alpha_1(x_3,\dots,x_k) = x_1x_2)$ можно считать, что α_1 и α_2 не содержат переменных x_2 и x_1 соответственно и наименьший вес их слагаемых не менее 1. Отождествив в γ' переменные $x_4,\dots,x_k$ с x_3, получим БФ $\beta(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3 \vee \theta x_3$, где $\theta = 0$ или $\theta = 1$. Поэтому $\gamma'' = u(x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3)$ или $\gamma'' = u(x_1x_2 \vee x_3)$. Отождествив в случае необходимости u с x_1, получим функцию из системы (1).

Шаг $t+1$ ($t \geq 2$). В этом случае, можно считать

$$\gamma' = x_1\alpha_1(x_2,\dots,x_k) \vee \alpha_2(x_2,\dots,x_k),$$

и вес слагаемых в БФ α_1 не менее t, а в БФ α_2 — не менее $t+1$. Отождествляя в γ' переменную x_k с x_{k-1}, получим

$$\beta = x_1\beta_1(x_1,\dots,x_{k-1}) \vee \beta_2(x_2,\dots,x_{k-1}),$$

причем веса слагаемых в β_1 и β_2 не менее 2.

По предположению индукции, отождествляя переменные в β_1 и β_2 подходящим образом, можно получить одну из БФ β' системы (1) и тогда $\gamma'' = u\beta'$. Отождествляя, если надо, u с x_1, а в случае $u(x_1 \vee x_2)$ получим также БФ γ''' из системы (1).

Наконец, используя леммы 2, 3 и 4, имеем $R(\gamma) \subseteq R(\gamma''') \subseteq R(\delta)$. $\square$

Доказательство теоремы 1 завершает следующий результат [2]: класс $R(x \vee y)$ строго содержится в классе $R(xy \vee xz \vee yz)$.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим три случая, которым может удовлетворять немонотонная БФ $\beta = \beta(x_1,\dots,x_n)$.

Случай 1. Для каждого слагаемого β выполнены условия:

а) в каждое слагаемое только одна переменная входит без отрицания,

б) переменная, входящая в некоторое слагаемое без отрицания, входит с отрицанием в любое другое слагаемое, разумеется, в которое она не входит без отрицания. Утверждаем, что A является слабо β-КС множеством как только $\overline{A}$ — рекурсивно перечислимое множество.

Пусть, например, $x_1,\dots,x_k$ — все переменные, которые входят в подходящие слагаемые β без отрицания, β — n-местная БФ и $x'_1,\dots,x'_n \in N$. Начинаем перечислять $\overline{A}$ до тех пор, пока для одного из слагаемых, например, $x_1\overline{x}_2\dots\overline{x}_k\overline{x}_{k+1}\dots\overline{x}_\ell$, все числа $x'_2,\dots,x'_\ell$ не вычислятся в $\overline{A}$. Если этого не случится, то положим $f(x_1,\dots,x_n)\uparrow$. В частности, $\beta(\chi(x'_1),\dots,\chi(x'_n))=0$. Иначе полагаем $f(x'_1,\dots,x'_n)=x'_1$.

Ясно, что если $x'_1\in A$, то $\beta(\chi(x'_1),\dots,\chi(x'_n))=1$. Если же $x'_1\in\overline{A}$, то $\beta(\chi(x'_1),\dots,\chi(x'_n))=0$, т. к. $x'_1,\dots,x'_k\in\overline{A}$.

Случай 2. Для БФ β выполнено условие а), но не б). Значит, найдутся два слагаемых, например, $x_1\overline{x}_3\dots\overline{x}_k$ и $x_2\overline{x}_{i1}\dots\overline{x}_{is}$, т. е. x_2 не входит в первое из них с отрицанием. Отождествляем все переменные $x_4,\dots,x_n$ в β с 0, получив при этом одну из следующих БФ:

$$\begin{aligned}
\gamma_1&=x_1\overline{x}_3\vee x_2,\\
\gamma_2&=x_1\overline{x}_3\vee x_1x_2,\\
\gamma_3&=x_1\overline{x}_3\vee x_2\overline{x}_3,\\
\gamma_4&=x_1\overline{x}_3\vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3=x_1\overline{x}_3\vee x_2\overline{x}_3.
\end{aligned}$$

Но в [1], [3] показано, что $R(\gamma_1)$ совпадает с классом всех рекурсивных множеств, а слабо γ_2-КС или γ_3,γ_4-КС множества будут полурекурсивными. По лемме 2 $R(\beta)\subseteq R(\gamma)$.

Случай 3. Покажем вначале, что если β — немонотонная БФ зависит не менее, чем от трех переменных и $\beta(x,\dots,x)=x$, то $R(\beta)$ совпадает с классом всех рекурсивных множеств. Пусть β немонотонна по переменной x_1. Тогда найдется набор $\theta_2,\dots,\theta_n$ из нулей и единиц такой, что

$$\beta(0,\theta_2,\dots,\theta_n)=1 \ \text{ и } \ \beta(1,\theta_2,\dots,\theta_n)=0.$$

Отождествляя те переменные x_i (x_j), что $\theta_i=0$ ($\theta_i=1$) с x_2 (соответственно с x_3), получим немонотонную БФ $\gamma(x_1,x_2,x_3)$ такую, что $\gamma(x,x,x)=x$. Но таких БФ с точностью до перестановки переменных двенадцать и, как доказано в [1], $R(\gamma)$ совпадает с классом всех рекурсивных множеств.

Поэтому считаем, что $\beta(1,\dots,1)=0$ и в β есть слагаемые вида $x_1x_2\dots x_k\overline{x}_{k+1}\dots\overline{x}_\ell$. Отождествляя в β переменные $x_3,\dots,x_k$ с x_2, а затем $x_{k+1},\dots,x_n$ с x_3, получим БФ $\gamma(x_1,x_2,x_3)$, в которой имеется слагаемое $x_1x_2\overline{x}_3$, и т. к. $\gamma(1,1,1)=0$, в каждом слагаемом γ встречается переменная с отрицанием. Таких БФ с точностью до перестановки переменных три: $x_1x_2\overline{x}_3$, $x_1x_2\overline{x}_3\vee\overline{x}_1\overline{x}_2x_3$, $x_1x_2\overline{x}_3\vee x_1\overline{x}_2x_3\vee\overline{x}_1x_2x_3$. Отождествляя в них x_3 с 0, получим x_1x_2. По лемме 2 $R(\gamma)\subseteq R(xy)$. Но любое слабо xy-КС множество с рекурсивно-перечислимым дополнением является полурекурсивным [1]. □

В заключение сделаем замечание к работе [1]. В формулировке следствия 3 надо БФ $xy\overline{z}$ заменить на $x\overline{y}\,\overline{z}$, а в доказательстве леммы 9 заменить определения ЧРФ f_2, f_3, f_5 на

$$f_2(x,y,z)=\begin{cases} g(x,y), & \text{если } z\in\overline{A};\\ g(x,z), & \text{если } y\in\overline{A};\\ \uparrow & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

$$f_3(x,y,z)=\begin{cases} g(x,y), & \text{если } z\in\overline{A};\\ g(x,z), & \text{если } x,y\in\overline{A};\\ \uparrow & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

$$f_5(x,y,z)=\begin{cases} g(y,z), & \text{если } x\in\overline{A};\\ g(x,z), & \text{если } y\in\overline{A};\\ g(x,y), & \text{если } z\in\overline{A};\\ \uparrow & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Литература

1. Дегтев А.Н., Иванов Д.И. *Слабо комбинаторно-селекторные множества* // Алгебра и логика. – 1998. – Т. 37. – № 6. – С. 627–636.
2. Дегтев А.Н. *Слабые комбинаторно-селекторные свойства подмножеств натуральных чисел* // Алгебра и логика. – 1990. – Т. 29. – № 4. – С. 421–429.
3. Дегтев А.Н. *Рекурсивно-комбинаторные свойства подмножеств натуральных чисел* // Алгебра и логика. – 1990. – Т. 29. – № 3. – С. 303–314.

Тюменский государственный университет

Поступила 06.12.2004