ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 12 (499)

УДК 517.968:519.642

Б.Г. ГАБДУЛХАЕВ, Л.Б. ЕРМОЛАЕВА

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРЯМЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение

В ряде теоретических и прикладных задач (см., напр., [1]–[3] и библиографию к ним) встречаются интегродифференциальные уравнения вида

$$A\varphi \equiv \varphi(t) + \int_{-1}^{1} h(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau + \int_{-1}^{1} g(t,\tau)\varphi'(\tau)d\tau = f(t), \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \tag{0.1}$$

где $h(t,\tau)$, $g(t,\tau)$ и $f(t)$ — известные непрерывные функции в своих областях определения, а $\varphi(s)$ — искомая функция.

Согласно предложенной в [2], [3] классификации, уравнение (0.1) относится, как правило, к классу некорректно поставленных задач [4]–[6]. Однако подходящий выбор [1]–[3] пространства $F = \{f\}$ правых частей и зависящий от него выбор пространства $\Phi = \{\varphi\}$ искомых элементов позволяют задачу решения уравнения (0.1) поставить корректно.

В качестве таких пространств ниже будем использовать весовое пространство Соболева

$$F = \Phi = W_2^1(\sqrt{1-t^2}; [-1,1]) \equiv W_2^1(\rho), \quad \rho(t) = (1-t^2)^{1/2}, \tag{0.2}$$

с нормой

$$\|f\|_{W_2^1(\rho)} = \|f(t)\|_{L_2(\rho^{-1})} + \|f'(t)\|_{L_2(\rho)}, \quad f \in W_2^1(\rho), \quad \rho^{-1}(t) = (1-t^2)^{-1/2}, \tag{0.3}$$

где $L_2(q) = L_2(q(t); [-1,1])$ — весовое пространство Лебега с нормой

$$\|\sigma\|_{L_2(q)} = \left\{ \int_{-1}^{1} q(t)|\sigma(t)|^2 dt \right\}^{1/2}, \quad \sigma \in L_2(q), \tag{0.4}$$

а $q(t) = \rho(t)$ или $\rho^{-1}(t)$. При исследовании метода наименьших квадратов будем пользоваться также скалярным произведением

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)\overline{g(t)}}{\sqrt{1-t^2}}dt + \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} f'(t)\overline{g'(t)}dt \quad (f, g \in W_2^1(\rho)) \tag{0.5}$$

и порождаемой им нормой

$$\|f(t)\|_{W_2^1(\rho)} = \{\|f(t)\|^2_{L_2(\rho^{-1})} + \|f'(t)\|^2_{L_2(\rho)}\}^{1/2}, \quad f \in W_2^1(\rho), \tag{0.6}$$

эквивалентной норме (0.3). Кроме того, будем пользоваться пространством

$$F = \Phi = C^1[-1,1] \equiv C^1 \tag{0.7}$$

всех непрерывно дифференцируемых на $[-1,1]$ функций с нормой

$$\|\psi\|_{C^1} = \|\psi(t)\|_C + \|\psi'(t)\|_C, \quad \psi \in C^1, \tag{0.8}$$

где $C = C[-1,1]$ — пространство непрерывных на $[-1,1]$ функций с обычной нормой.

При таком выборе основных пространств ниже предлагаются и исследуются оптимальные [7]–[9] по порядку приближенные методы решения интегродифференциального уравнения (0.1).

Отметим также, что некоторые результаты работы анонсированы в заметке [10].

1. Основные результаты

Приближенное решение уравнения (0.1) будем искать в виде алгебраического многочлена

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k = \sum_{k=0}^{n} \beta_k T_k(t) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k l_k(t), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

где $T_k(t) = \cos k \arccos t$, а $l_k(t)$ — фундаментальные многочлены Лагранжа по некоторой системе из $n+1$ узлов сегмента $[-1,1]$. Неизвестные коэффициенты $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ (а следовательно, $\beta_0, \ldots, \beta_n$ и $\gamma_0, \ldots, \gamma_n$) будем находить при минимальности невязки

$$r_n(t) = f(t) - A(\varphi_n; t), \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \tag{1.2}$$

в определенном смысле, что́ приводит к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для них.

В случае метода коллокации упомянутая СЛАУ имеет вид соответственно

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k A(t^k; t_j) = f(t_j), \quad j = \overline{0,n}; \tag{1.3}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \beta_k A(T_k; t_j) = f(t_j), \quad j = \overline{0,n}; \tag{1.4}$$

$$\gamma_j + \sum_{k=0}^{n} \gamma_k B(l_k; t_j) = f(t_j), \quad j = \overline{0,n}, \tag{1.5}$$

где $B = A - E$, а $t_k = t_{k,n}$ $(k = \overline{0,n})$ — некоторые узлы из $[-1,1]$.

Отметим, что СЛАУ (1.3), (1.4) и (1.5) эквивалентны ввиду вполне определенной эквивалентности многочленов из (1.1) при соответствующих соотношениях между наборами чисел $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$; $\beta_0, \ldots, \beta_n$ и $\gamma_0, \ldots, \gamma_n$.

Если невязка (1.2) минимизируется методами моментов и Галёркина, то приходим к СЛАУ вида

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k c_j^T(At^k) = c_j^T(f), \quad j = \overline{0,n}; \tag{1.6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \beta_k c_j^T(AT_k) = c_j^T(f), \quad j = \overline{0,n}; \tag{1.7}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \gamma_k c_j^T(Al_k) = c_j^T(f), \quad j = \overline{0,n}, \tag{1.8}$$

где

$$c_j^T(y) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{y(t) T_j(t) dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad y \in L(-1,1),$$

— коэффициенты Фурье по полиномам Чебышева I рода.

Ясно, что СЛАУ (1.6), (1.7) и (1.8) попарно эквивалентны во вполне определенном смысле.

Если же невязка (1.2) минимизируется по методу наименьших квадратов, то для определения коэффициентов многочленов (1.1) получаем СЛАУ соответственно

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (At^k, At^j) = (f, At^j), \quad j = \overline{0,n}; \tag{1.9}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \beta_k (AT_k, AT_j) = (f, AT_j), \quad j = \overline{0,n}; \tag{1.10}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \gamma_k (Al_k, Al_j) = (f, Al_j), \quad j = \overline{0,n}, \tag{1.11}$$

где (f,g) — определенное согласно (0.5) скалярное произведение функций $f(t), g(t) \in W_2^1(\rho)$ в пространстве (0.2).

Легко показать, что СЛАУ (1.9), (1.10) и (1.11) попарно эквивалентны.

Для вычислительных схем метода коллокации (0.1), (1.1)–(1.5) и методов моментов и Галёркина (0.1), (1.1), (1.2), (1.6)–(1.8) справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

а) *ядра $h(t,\tau)$ и $g(t,\tau)$ таковы, что оператор $B : W_2^1(\rho) \to W_2^1(\rho)$,*

$$B(\varphi;t) \equiv \int_{-1}^{1} h(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau + \int_{-1}^{1} g(t,\tau)\varphi'(\tau)d\tau, \tag{1.12}$$

вполне непрерывен;

б) *узлы определены по любой из формул*

$$\alpha)\ t_j = \cos\frac{j\pi}{n}, \quad j = \overline{0,n}; \quad \beta)\ t_j = \cos\frac{2j+1}{2n+2}\pi, \quad j = \overline{0,n}; \tag{1.13}$$

в) *уравнение (0.1) имеет единственное решение $\varphi^* \in W_2^1(\rho)$ при любой правой части $f \in W_2^1(\rho)$.*

Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$, системы уравнений (1.3)–(1.5) метода коллокации и системы уравнений (1.6)–(1.8) методов моментов и Галёркина однозначно разрешимы при любых правых частях. Приближенные решения (1.1) сходятся к точному решению $\varphi^*(t)$ в пространстве $W_2^1(\rho)$ со скоростью, определяемой неравенствами

$$E_{n-1}(\varphi^{*'})_{L_2(\rho)} \leqslant E_n(\varphi^*)_{W_2^1(\rho)} \leqslant \|\varphi^* - \varphi_n\|_{W_2^1(\rho)} = O\{E_n(\varphi^*)_{W_2^1(\rho)}\} = O\{E_{n-1}(\varphi^{*'})_{L_2(\rho)}\}. \tag{1.14}$$

Здесь и далее

$$E_n(\varphi)_{W_2^1(\rho)} = \inf_{Q\in\mathbb{H}_n} \|\varphi - Q\|_{W_2^1(\rho)}, \quad \varphi \in W_2^1(\rho);$$

$$E_{n-1}(f)_{L_2(\rho)} = \inf_{Q\in\mathbb{H}_{n-1}} \|f - Q\|_{L_2(\rho)}, \quad f \in L_2(\rho),$$

где $\mathbb{H}_m$ — множество всех алгебраических многочленов степени не выше m $(m+1 \in \mathbb{N})$.

Для вычислительной схемы метода наименьших квадратов (0.1), (1.1), (1.2), (1.9)–(1.11) справедлива

Теорема 2. *Пусть функции $h(t,\tau)$ и $g(t,\tau)$ таковы, что оператор $A : W_2^1(\rho) \to W_2^1(\rho)$ непрерывно обратим. Тогда каждая из систем уравнений (1.9), (1.10) и (1.11) однозначно разрешима при любых $n \in \mathbb{N}$ и любых правых частях. Приближенные решения (1.1) сходятся к точному решению $\varphi^*(t)$ в пространстве $W_2^1(\rho)$, при этом для любых $n \in \mathbb{N}$ справедливы оценки*

$$E_n(\varphi^*)_{W_2^1(\rho)} \leqslant \|\varphi^* - \varphi_n\|_{W_2^1(\rho)} \leqslant \eta(A) E_n(\varphi^*)_{W_2^1(\rho)}, \tag{1.15}$$

где $\eta(A)$ — число обусловленности оператора $A : W_2^1(\rho) \to W_2^1(\rho)$.

В следующей теореме решается задача оптимизации [7]–[9] класса всевозможных полиномиальных (в том числе как проекционных, так и прямых) методов решения уравнения (0.1).

Теорема 3. *В условиях теоремы* 1 *метод коллокации* (0.1), (1.1), (1.3)–(1.5), (1.13) *и методы Галёркина и моментов* (0.1), (1.1), (1.6)–(1.8), *а в условиях теоремы* 2 *метод наименьших квадратов* (0.1), (1.1), (1.9)–(1.11) *оптимальны по порядку среди всевозможных полиномиальных методов решения уравнения* (0.1), *позволяющих построить приближенное решение в виде многочлена* (1.1).

2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. В условиях а) и в) теоремы интегродифференциальное уравнение (0.1) можно записать в виде эквивалентного ему операторного уравнения

$$A\varphi \equiv \varphi + B\varphi = f \quad (\varphi, f \in W_2^1(\rho)), \tag{2.1}$$

где в силу теории Рисса–Шаудера [11] $A = E + B$ есть непрерывно обратимый оператор в пространстве Соболева $W_2^1(\rho)$:

$$\|A^{-1}\|_{W_2^1(\rho)\to W_2^1(\rho)} = \|(E+B)^{-1}\|_{W_2^1(\rho)\to W_2^1(\rho)} \leqslant \text{const} < \infty. \tag{2.2}$$

Положим $\Phi_n = \mathbb{H}_n \cap W_2^1(\rho)$ и введем оператор проектирования $P_n : W_2^1(\rho) \to \Phi_n \subset W_2^1(\rho)$ по формуле

$$P_n(\psi; t) = \sum_{j=0}^{n} \psi(t_j) l_j(t) \equiv \mathcal{L}_n(\psi; t), \quad \psi \in C[-1,1], \tag{2.3}$$

где узлы определены в (1.13). Тогда каждая из СЛАУ (1.3)–(1.5) метода коллокации эквивалентна операторному уравнению

$$A_n\varphi_n \equiv \varphi_n + P_nB\varphi_n = P_nf \quad (\varphi_n, P_nf \in \Phi_n). \tag{2.4}$$

В работах ([12], гл. 1, § 4; [13], п. 2; [14]) показано, что операторы Лагранжа $P_n : W_2^1(\rho) \to W_2^1(\rho)$ сильно сходятся к единичному оператору E пространства $W_2^1(\rho)$, точнее, для любой функции $\varphi \in W_2^1(\rho)$ при любых $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$\|\varphi - P_n\varphi\|_{W_2^1(\rho)} \leqslant \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) E_n(\varphi)_{W_2^1(\rho)}, \tag{2.5}$$

где

$$E_n(\varphi)_{W_2^1(\rho)} = E_n(\varphi)_{L_2(1/\rho)} + E_{n-1}(\varphi')_{L_2(\rho)}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

В силу (2.3), (2.5) и (2.6) правые части уравнений (2.1) и (2.4) близки в том смысле, что

$$\delta_n \equiv \|f - P_nf\|_{W_2^1(\rho)} \leqslant \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\{E_n(f)_{L_2(1/\rho)} + E_{n-1}(f')_{L_2(\rho)}\} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.7}$$

Покажем близость операторов $A : W_2^1(\rho) \to W_2^1(\rho)$ и $A_n : \Phi_n \to \Phi_n \subset W_2^1(\rho)$. Из (2.1), (2.4)–(2.6) для любого элемента $\varphi_n \in \Phi_n$, $\varphi_n \neq 0$, находим

$$\begin{aligned} \|A\varphi_n - A_n\varphi_n\|_{W_2^1(\rho)} &= \|B\varphi_n - P_nB\varphi_n\|_{W_2^1(\rho)} = \|\varphi_n\|_{W_2^1(\rho)}\|B\psi_n - P_nB\psi_n\|_{W_2^1(\rho)} \leqslant \\ &\leqslant \|\varphi_n\|_{W_2^1(\rho)} \sup_{\substack{\psi_n\in\Phi_n\\ \|\psi_n\|=1}} \|B\psi_n - P_nB\psi_n\| \leqslant \|\varphi_n\|_{W_2^1(\rho)} \sup_{z\in BS(0,1)} \|z - P_nz\|_{W_2^1(\rho)} \equiv \varepsilon_n'\|\varphi_n\|_{W_2^1(\rho)}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где $\psi_n = \varphi_n/\|\varphi_n\|_{W_2^1(\rho)}$, а $S(0,1)$ — единичный шар пространства $W_2^1(\rho)$ с центром в нулевой точке $\theta \in W_2^1(\rho)$. В силу условия а) теоремы множество $BS(0,1)$ является компактным в пространстве $W_2^1(\rho)$, а тогда из соотношений (2.5), (2.6) и из теоремы Гельфанда (напр., [11], с. 274–276) получим

$$\varepsilon_n' = \sup_{z \in BS(0,1)} \|z - P_n z\|_{W_2^1(\rho)} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.9}$$

Из формул (2.8) и (2.9) находим

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{\Phi_n \to W_2^1(\rho)} \leqslant \|B - P_n B\|_{W_2^1(\rho) \to W_2^1(\rho)} \leqslant \varepsilon_n' \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.10}$$

В силу соотношений (2.2), (2.7) и (2.10) для уравнений (2.1) и (2.4) выполнены все условия теоремы 7 ([7], гл. I), откуда следует, что для всех $n \in \mathbb{N}$ таких, что

$$q_n = \|A^{-1}\|\varepsilon_n < 1, \tag{2.11}$$

операторное уравнение (2.4), а следовательно, каждая из систем уравнений (1.3)–(1.5) однозначно разрешимы, а приближенные решения $\varphi_n = A_n^{-1} P_n f$, определяемые по формуле (1.1), сходятся к решению $\varphi^* \in W_2^1(\rho)$ уравнения (0.1) со скоростью

$$\|\varphi^* - \varphi_n\|_{W_2^1(\rho)} = O\{\varepsilon_n + \delta_n\}. \tag{2.12}$$

Тогда в силу теоремы 6, ее следствия и теоремы 14 ([7], гл. I) для погрешности приближенного решения (1.1) справедливы тождества

$$\varphi^* - \varphi_n = (E - A_n^{-1} P_n A)(\varphi^* - \overline{\varphi}_n) = (E - A_n^{-1} P_n B)(\varphi^* - P_n \varphi^*), \tag{2.13}$$

где $\overline{\varphi}_n$ — произвольный элемент из $\Phi_n \subset W_2^1(\rho)$.

Из соотношений (2.1)–(2.13) следует, что рассматриваемый в работе вариант метода коллокации сходится со скоростью

$$\|\varphi^* - \varphi_n\|_{W_2^1(\rho)} = O\{E_n(\varphi^*)_{W_2^1(\rho)}\}. \tag{2.14}$$

Поскольку ([12], гл. I, § 4; [13], п. 2) для любой функции $f \in W_2^1(\rho)$

$$E_n(f)_{W_2^1(\rho)} = E_n(f)_{L_2(1/\rho)} + E_{n-1}(f')_{L_2(\rho)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{n+1} E_{n-1}(f')_{L_2(\rho)} + E_{n-1}(f')_{L_2(\rho)} \leqslant \frac{3}{2} E_{n-1}(f')_{L_2(\rho)}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.15}$$

то из (2.14) следуют верхние из оценок (1.13) в случае метода коллокации.

Так как приближенное решение $\varphi_n \in \Phi_n$, то в силу (2.6) справедливы неравенства

$$\|\varphi^* - \varphi_n\|_{W_2^1(\rho)} \geqslant E_n(\varphi^*)_{W_2^1(\rho)} \geqslant E_{n-1}(\varphi^{*'})_{L_2(\rho)}. \tag{2.16}$$

Из соотношений (2.14)–(2.16) следует утверждение теоремы 1 для метода коллокации. Докажем теперь его справедливость для методов моментов и Галёркина. В этом случае оператор проектирования $P_n : W_2^1(\rho) \to \Phi_n \subset W_2^1(\rho)$ введем по формуле

$$P_n(\psi; t) = \frac{c_0^T(\psi)}{2} + \sum_{k=1}^{n} c_k^T(\psi) T_k(t) \equiv S_n^T(\psi; t), \quad \psi \in W_2^1(\rho), \tag{2.17}$$

где коэффициенты Фурье–Чебышева $c_k^T(\psi)$ определены в разделе 1. Следуя ([12], гл. 1, § 4; [13], п. 2), с помощью (2.17) легко показать, что для любой функции $\psi \in W_2^1(\rho)$

$$\|\psi - P_n\psi\|_{W_2^1(\rho)} = \|\psi - S_n^T\psi\|_{L_2(1/\rho)} + \left\| \frac{d}{dt}[\psi(t) - S_n^T(\psi(\tau); t)] \right\|_{L_2(\rho)} = \|\psi(t) - S_n^t(\psi; t)\|_{L_2(1/\rho)} +$$
$$+ \left\| \frac{d\psi(t)}{dt} - S_{n-1}^U\left(\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}; t\right) \right\|_{L_2(\rho)} = E_n(\psi)_{L_2(1/\rho)} + E_{n-1}(\psi')_{L_2(\rho)} = E_n(\psi)_{W_2^1(\rho)}, \tag{2.18}$$

где

$$S_{n-1}^U(f;t) = \sum_{k=1}^{n} c_{k-1}^U(f) U_{k-1}(t), \quad f \in L_2(\rho), \quad -1 \leqslant t \leqslant 1,$$

$$c_{k-1}^U(f) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}f(t)U_{k-1}(t)dt, \quad U_{k-1}(t) = \frac{\sin k \arccos t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

В силу (2.17) и (2.18) далее доказательство ведется по схеме обоснования метода коллокации. Более того, здесь оценку погрешности методов моментов и Галёркина можно несколько уточнить, а именно, в условиях доказываемой теоремы из одного результата Н.Н. Боголюбова и Н.И. Польского (напр., [15], сс. 201, 212) следует

$$(1-\sigma_n)\|\varphi^* - P_n\varphi^*\|_{W_2^1(\rho)} \leqslant \|\varphi^* - \varphi_n\|_{W_2^1(\rho)} \leqslant (1+\sigma_n)\|\varphi^* - P_n\varphi^*\|_{W_2^1(\rho)}, \tag{2.19}$$

где $\sigma_n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому в силу (2.6), (2.15), (2.18), (2.19) для методов моментов и Галёркина имеем

$$\|\varphi^* - \varphi_n\|_{W_2^1(\rho)} \sim \|\varphi^* - P_n\varphi^*\|_{W_2^1(\rho)} = E_n(\varphi^*)_{W_2^1(\rho)} \sim E_{n-1}(\varphi^{*'})_{L_2(\rho)}, \quad n \to \infty. \quad \square \tag{2.20}$$

Доказательство теоремы 2 будем вести, следуя ([16], гл. 10, § 83; [7], гл. 1, § 6). Поскольку системы функций $\{t^k\}_0^\infty$ и $\{T_k(t)\}_0^\infty$ линейно независимы, то в силу условия теоремы линейно независимыми являются также системы функций $\{A(t^k;t)\}_0^\infty$ и $\{A(T_k;t)\}_0^\infty$. Их определители Грама, совпадающие с определителями СЛАУ (1.9) и (1.10), отличны от нуля при любых $n \in \mathbb{N}$. Поэтому СЛАУ (1.9) и (1.10) имеют единственные решения соответственно $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_0, \ldots, \beta_n$ при любых $n \in \mathbb{N}$ и при любых правых частях. Тогда для приближенного решения (1.1) справедливо неравенство

$$\|f - A\varphi_n\|_{W_2^1(\rho)} \leqslant \|f - A\overline{\varphi}_n\|_{W_2^1(\rho)}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.21}$$

где $\overline{\varphi}_n \in \Phi_n$ — многочлен наилучшего приближения для функции $\varphi^*(t)$ в пространстве $W_2^1(\rho)$. Поскольку $f \equiv A\varphi^*$ и оператор $A: W_2^1(\rho) \to W_2^1(\rho)$ непрерывно обратим, то из (2.21) находим неравенства

$$\frac{\|\varphi^* - \varphi_n\|_{W_2^1(\rho)}}{\|A^{-1}\|_{W_2^1(\rho)\to W_2^1(\rho)}} \leqslant \|A\|_{W_2^1(\rho)\to W_2^1(\rho)} E_n(\varphi^*)_{W_2^1(\rho)}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.22}$$

Из (2.22) с учетом $\varphi_n \in \mathbb{H}_n$ следуют оценки (1.15).

В случае СЛАУ (1.9) и (1.10) теорема доказана. Для ее доказательства в случае СЛАУ (1.11) достаточно показать линейную независимость системы функций $\{l_k = l_{kn}(t)\}_{k=0}^n$ при любых $n \in \mathbb{N}$, что легко делается методом от противного. $\square$

Доказательство теоремы 3. Обозначим через $M_n = \{m_n\}$ множество всевозможных приближенных методов решения уравнения (0.1), позволяющих построить приближенное решение в виде многочлена (1.1). Тогда в силу $\varphi_n \in \Phi_n$ и (2.6) имеем [7]–[9]

$$V_n \equiv \inf_{m_n \in M_n} \|\varphi^* - \varphi_n\|_{W_2^1(\rho)} \geqslant \inf_{\varphi_n \in \mathbb{H}_n} \|\varphi^* - \varphi_n\|_{W_2^1(\rho)} = E_n(\varphi^*)_{W_2^1(\rho)} =$$
$$= E_n(\varphi^*)_{L_2(\rho^{-1})} + E_{n-1}(\varphi^{*'})_{L_2(\rho)} \geqslant E_{n-1}(\varphi^{*'})_{L_2(\rho)}. \tag{2.23}$$

С другой стороны, для приближенных решений (1.1), построенных рассмотренными выше методами коллокации, моментов, Галёркина и наименьших квадратов, согласно оценкам (1.14) и (1.15) имеем

$$V_n \leqslant \|\varphi^* - \varphi_n\|_{W_2^1(\rho)} = O\{E_n(\varphi^*)_{W_2^1(\rho)}\} = O\{E_n(\varphi^{*'})_{L_2(\rho)}\}. \tag{2.24}$$

Из неравенств (2.23) и (2.24) с учетом результатов по оптимизации вычислительных методов [7]–[9] следует утверждение теоремы 3. Более того, как видно из (2.20), (2.23) и (2.24), при выполнении условий а) и в) теоремы 1 рассмотренные выше методы моментов и Галёркина будут *асимптотически оптимальными* в указанном выше смысле. □

3. Некоторые замечания и дополнения

3.1. Утверждения, аналогичные теоремам 1–3, справедливы также для *общего проекционного метода* вида (2.4), порождаемого полиномиальными проекционными операторами $P_n : W_2^1(\rho) \to \Phi_n \subset W_2^1(\rho)$, ограниченными по норме в совокупности. В частности, справедлива

Теорема 4. *В условиях* а) *и* в) *теоремы* 1 *общий полиномиальный проекционный метод решения уравнения* (0.1)

$$A_n^\circ \varphi_n^\circ \equiv \varphi_n^\circ + P_n^\circ B \varphi_n^\circ = P_n^\circ f \quad (\varphi_n^\circ, P_n^\circ f \in \Phi_n) \tag{3.1}$$

с линейным оператором $P_n^\circ : W_2^1(\rho) \to \Phi_n \subset W_2^1(\rho)$, *удовлетворяющим условиям*

$$(P_n^\circ)^2 = P_n^\circ, \quad n \in \mathbb{N}; \quad \|P_n^\circ\|_{W_2^1(\rho) \to W_2^1(\rho)} = O(1), \quad n \to \infty, \tag{3.2}$$

является оптимальным по порядку в указанном выше смысле, причем

$$E_{n-1}(\varphi^{*'})_{L_2(\rho)} \leqslant E_n(\varphi^*)_{W_2^1(\rho)} \leqslant V_n \leqslant \|\varphi^* - \varphi_n^\circ\|_{W_2^1(\rho)} = O\{E_n(\varphi^*)_{W_2^1(\rho)}\} = \\ = O\{E_{n-1}(\varphi^{*'})_{L_2(\rho)}\}, \quad \varphi_n^\circ = (A_n^\circ)^{-1} P_n^\circ f \in \mathbb{H}_n. \tag{3.3}$$

Доказательство. В силу соотношений (3.2) и (2.17), (2.18) для любой функции $f(t) \in W_2^1(\rho)$ последовательно находим

$$\delta_n^\circ \equiv \|f - P_n^\circ f\|_{W_2^1(\rho)} = \|(E - P_n^\circ)(f - S_n^T f)\|_{W_2^1(\rho)} \leqslant \\ \leqslant 2\|P_n^\circ\|_{W_2^1(\rho) \to W_2^1(\rho)} \|f - S_n^T f\|_{W_2^1(\rho)} \leqslant M\|f - S_n^T f\|_{W_2^1(\rho)} = \\ = M E_n(f)_{W_2^1(\rho)} \leqslant 2M E_{n-1}(f')_{L_2(\rho)}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.4}$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от $n \in \mathbb{N}$ и $f \in W_2^1(\rho)$.

С помощью соотношений (3.2), (3.4) по аналогии с (2.8)–(2.10) находим

$$\varepsilon_n^0 \equiv \|A - A_n^\circ\|_{\Phi_n \to W_2^1(\rho)} \leqslant \|B - P_n^\circ B\|_{W_2^1(\rho) \to W_2^1(\rho)} = \widetilde{\varepsilon}_n^\circ \to 0, \ n \to \infty. \tag{3.5}$$

Благодаря соотношениям (3.4) и (3.5), как и при доказательстве теоремы 1, устанавливаем, что аппроксимирующие уравнения (3.1) однозначно разрешимы хотя бы при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$, а их решения $\varphi_n^\circ = (A_n^\circ)^{-1} P_n^\circ f$ сходятся к точному решению $\varphi^* \in W_2^1(\rho)$ со скоростью

$$\|\varphi^* - \varphi_n^\circ\|_{W_2^1(\rho)} = O\{E_n(\varphi^*)_{W_2^1(\rho)}\} = O\{E_{n-1}(\varphi^{*'})_{L_2(\rho)}\}. \tag{3.6}$$

С другой стороны, в силу $\varphi_n^\circ \in \mathbb{H}_n \subset W_2^1(\rho)$ имеем

$$\|\varphi^* - \varphi_n^\circ\|_{W_2^1(\rho)} \geqslant V_n \geqslant E_n(\varphi^*)_{W_2^1(\rho)} \geqslant E_{n-1}(\varphi^{*'})_{L_2(\rho)}. \tag{3.7}$$

Из оценок (3.6), (3.7) получаем неравенства (3.3), а из них в силу [7]–[9] — утверждение теоремы 4.

3.2. В теоремах 1–4 существенным образом использовано требование полной непрерывности определенного в (1.12) оператора B в пространстве $W_2^1(\rho)$. Для этого достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\tau^2}{1-t^2}} |h(t,\tau)|^2 dt\, d\tau < \infty, \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{|g(t,\tau)|^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}} dt\, d\tau < \infty,$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)} \left|\frac{\partial h(t,\tau)}{\partial t}\right|^2 dt\, d\tau < \infty, \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t^2}{1-\tau^2}} \left|\frac{\partial g(t,\tau)}{\partial t}\right|^2 dt\, d\tau < \infty.$$

Однако следует отметить, что результаты, аналогичные теоремам 1–4, справедливы также при отсутствии полной непрерывности оператора $B : W_2^1(\rho) \to W_2^1(\rho)$; например, имеет место

Теорема 5. *Пусть существует постоянная* $q > 0$ *такая, что в пространстве* $W_2^1(\rho)$ *выполняются неравенства* $\|P_n\|\|B\| \leqslant q < 1$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

а) *уравнение* (0.1) *имеет единственное решение* $\varphi^* \in W_2^1(\rho)$ *при любой правой части* $f \in W_2^1(\rho)$, *причем*
$$\|\varphi^*\| \leqslant \frac{\|f\|}{1-q};$$

б) *при любых* $n \in \mathbb{N}$ СЛАУ *рассмотренных выше методов коллокации, моментов, Галёркина и общего проекционного метода* (3.1) *при* $P_n = P_n^\circ$ *однозначно разрешимы при любых правых частях, причем*
$$\|\varphi_n\| \leqslant \frac{\|P_n f\|}{1-q}, \quad n \in \mathbb{N};$$

в) *приближенные решения* (1.1) *сходятся к точному решению* $\varphi^* \in W_2^1(\rho)$ *со скоростью, определяемой неравенствами*
$$\frac{\|\varphi^* - P_n\varphi^*\|}{1+q} \leqslant \|\varphi^* - \varphi_n\| \leqslant \frac{\|\varphi^* - P_n\varphi^*\|}{1-q}, \quad n \in \mathbb{N};$$
$$E_n(\varphi^*) \leqslant \|\varphi^* - \varphi_n\| \leqslant \frac{2\|P_n\|}{1-q} E_n(\varphi^*), \quad n \in \mathbb{N},$$

где всюду $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{W_2^1(\rho)}$, $E_n(\varphi^*) = E_n(\varphi^*)_{W_2^1(\rho)}$, *а* $\|P_n\| = \|P_n\|_{W_2^1(\rho)\to W_2^1(\rho)} = O(1)$, $n \to \infty$; *в частности,* $\|P_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$, *для методов моментов и Галёркина.*

3.3. Выше решена задача оптимизации полиномиальных методов решения *фиксированного* уравнения (0.1). Полученные при этом утверждения переносятся [7]–[9] на *класс* уравнений (0.1), если класс $\Phi^* = \{\varphi^*\} \subset W_2^1(\rho)$ искомых функций образует центрально-симметрический компакт в пространстве Соболева $W_2^1(\rho)$.

3.4. Утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2, справедливы также для пространств (0.7) с нормой (0.8); например, если функции
$$f(t) \in W^{r+1}H_\alpha[-1,1] \ \text{ и } \ h(t,\tau), g(t,\tau) \in W^{r+1}H^\alpha[-1,1] \oplus C[-1,1] \quad (r+1 \in \mathbb{N}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1),$$
то указанные выше варианты метода коллокации сходятся в пространстве $C^1[-1,1]$ со скоростью[1)]
$$\|\varphi^* - \varphi_n\|_{C^1} = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right).$$
Однако ни одно из утверждений теоремы 3 в этом случае не имеет места, т. е. указанные выше полиномиальные методы *не являются оптимальными* даже по порядку.

3.5. Результаты, аналогичные приведенным в разделах 1 и 2, справедливы также для *сплайновых проекционных* методов. Пусть $W_2^1 = W_2^1[1;[-1,1]]$ с любой из норм (0.3), (0.6) при $\rho(t) \equiv 1$ или же с эквивалентной им нормой
$$\|\varphi\|_{W_2^1} = \|\varphi(t)\|_C + \|\varphi'(t)\|_{L_2}, \quad \varphi \in W_2^1, \tag{3.8}$$
где $L_2 = L_2(-1,1)$ с обычной нормой (0.4) при $q(t) \equiv 1$. Обозначим через $\Phi_n = \{\varphi_n\} \subset W_2^1$ множество всех сплайнов первой степени с узлами
$$t_k = -1 + \frac{2k}{n}, \quad k = \overline{0,n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

[1)] Это утверждение может быть доказано и самостоятельно, и как следствие теоремы 1, с использованием предложенного в [17] способа доказательства.

Оператор проектирования $P_n : W_2^1 \to \Phi_n \subset W_2^1$ введем по формуле

$$P_n(f;t) = \sum_{k=0}^{n} f(t_k)s_k(t), \quad f \in W_2^1, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.10}$$

где $s_k(t) = s_{kn}(t)$ — фундаментальные сплайны первой степени по системе узлов (3.9):

$$s_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leqslant t_{k-1}; \\ \frac{t-t_{k-1}}{t_k-t_{k-1}} & \text{при } t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k; \\ \frac{t_{k+1}-t}{t_{k+1}-t_k} & \text{при } t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}; \\ 0 & \text{при } t \geqslant t_{k+1}, \end{cases}$$

причем при $k = 0$ и $k = n$ пренебрегаем соответственно первыми двумя и последними двумя звеньями функций $s_0(t)$ и $s_n(t)$. Тогда, как известно (напр., [12], с. 26–31), справедливы следующие соотношения:

$$P_n^2 = P_n, \quad 1 \leqslant \|P_n\|_{W_2^1 \to W_2^1} \leqslant 1 + \theta_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.11}$$

где

$$\theta_n = \begin{cases} 0 & \text{для нормы (3.8);} \\ O(\frac{1}{n}) & \text{для нормы (0.3);} \\ O(1) & \text{для нормы (0.6).} \end{cases}$$

Приближенное решение уравнения (0.1) ищем в виде сплайна

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k s_k(t), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.12}$$

коэффициенты которого будем определять

а) по методу сплайн-коллокации из СЛАУ

$$\alpha_j + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k B(s_k; t_j) = f(t_j), \quad j = \overline{0, n}; \tag{3.13}$$

б) по сплайн-методу Галёркина из СЛАУ

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (As_k, s_j)_{L_2} = (f, s_j)_{L_2}, \quad j = \overline{0, n}; \tag{3.14}$$

в) по сплайн-методу наименьших квадратов из СЛАУ

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (As_k, As_j)_{W_2^1} = (f, As_j)_{W_2^1}, \quad j = \overline{0, n}, \tag{3.15}$$

где $(f, g)_{L_2}$ и $(f, g)_{W_2^1}$ — скалярные произведения функций $f(t)$ и $g(t)$ в пространствах соответственно L_2 и W_2^1.

В силу (3.8)–(3.11) для вычислительных схем (0.1), (3.12)–(3.15) справедливы утверждения, аналогичные приведенным в теоремах 1–5.

3.6. Если существует производная $\frac{\partial g(t,\tau)}{\partial \tau} \in C[-1, 1]^2$, то интегродифференциальное уравнение (0.1) эквивалентно так называемому нагруженному интегральному уравнению

$$A\varphi \equiv \varphi(t) + \int_{-1}^{1} \left[h(t, \tau) - \frac{\partial g(t, \tau)}{\partial \tau}\right] \varphi(\tau) d\tau + g(t, 1)\varphi(1) - g(t, -1)\varphi(-1) = f(t), \quad -1 \leqslant t \leqslant 1. \tag{3.16}$$

В этом случае для исследования уравнения (3.16), а следовательно, и уравнения (0.1), проще всего пользоваться пространствами $\Phi = F = C[-1,1]$ и установленными в ([7], гл. 4; [18]) результатами по оптимизации приближенных методов решения регулярных интегральных уравнений в пространстве непрерывных функций.

Литература

1. Габдулхаев Б.Г. *Заметка об общей теории приближенных методов анализа* // Функц. анализ и теория функций. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1965 (1966). – С. 18–31.
2. Габдулхаев Б.Г. *Некоторые вопросы теории приближенных методов и их приложения к сингулярным интегральным уравнениям*: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. – Казань, Казанск. ун-т, 1966. – 193 с.
3. Габдулхаев Б.Г. *Некоторые вопросы теории приближенных методов.* II // Изв. вузов. Математика. – 1968. – № 10. – С. 21–29.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач.* – М.: Наука, 1979. – 286 с.
5. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. *Теория линейных некорректных задач и ее приложения.* – М.: Наука, 1978. – 206 с.
6. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. *Некорректные задачи математической физики и анализа.* – М.: Наука, 1980. – 286 с.
7. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
8. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач и прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений*: Дисс. ... докт. физ.-матем. наук в форме научного доклада. – Киев, МИАН УССР, 1985. – 48 с.
9. Габдулхаев Б.Г. *Оптимизация прямых и проекционных методов решения операторных уравнений* // Изв.вузов. Математика. – 1999. – № 12. – С. 3–18.
10. Габдулхаев Б.Г., Ермолаева Л.Б. *Оптимальные методы решения одного класса интегродифференциальных уравнений* / Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Теория функций, ее прилож. и смежные вопр. – Казань: Изд-во “ДАС”, 2000. – Т. 8. – С. 61–63.
11. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.
12. Габдулхаев Б.Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1995. – 230 с.
13. Габдулхаев Б.Г., Ермолаева Л.Б. *Интерполяционные полиномы в пространствах Соболева* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 7–19.
14. Габдулхаев Б.Г., Ермолаева Л.Б. *Интерполяция по экстремальным точкам многочленов Чебышева* / Теория приближ. и гармонический анализ. Тез. докл. Междунар. научн. конф. – Тула: Тульск. ун-т, 1998. – С. 74–75.
15. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. *Приближенное решение операторных уравнений.* – М.: Наука, 1969. – 456 с.
16. Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике.* – М.: Наука, 1970. – 512 с.
17. Габдулхаев Б.Г. *К численному решению интегральных уравнений методом механических квадратур* // Изв. вузов. Математика. – 1972. – № 12. – С. 21–39.
18. Габдулхаев Б.Г. *Оптимизация квадратурных методов решения интегральных уравнений* // ДАН СССР. – 1983. – Т. 271. – № 1. – С. 20–25.

Казанский государственный университет

Поступила 16.06.2003