И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2006 МАТЕМАТИКА № 1 (524)

УДК 512.565:510.57

А.Н. ФРОЛОВ

ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ СВОДИМОСТИ ПО РЕШЕТКЕ МНОЖЕСТВ

Все рассматриваемые множества будут подмножествами множества натуральных чисел $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$. Под решеткой множеств понимается класс множеств $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\omega) = \{A \mid A \subseteq \omega\}$, замкнутый относительно операций объединения и пересечения. Решеткой множеств с наименьшим (с наибольшим) элементом назовем решетку множеств $\mathcal{D}$, если $\emptyset \in \mathcal{D}$ (или $\omega \in \mathcal{D}$ соответственно).

Под алгеброй множеств понимается решетка множеств с наименьшим и наибольшим элементами, замкнутая относительно операции теоретико-множественной разности. Дополнение множества A будем обозначать $\overline{A} = \omega - A$.

В данной работе изучаются две сводимости, называемые теоретико-множественными сводимостями по решетке множеств. Известны различные сводимости, например, тьюринговая сводимость, 1-сводимость, m-сводимость и др. ([1]–[3]). Изучение этих сводимостей направлено на изучение алгоритмической сложности различных структур. Изучаемые в данной статье сводимости отображают теоретико-множественную сложность, поэтому эти сводимости называются теоретико-множественными (по решетке множеств $\mathcal{D}$) и обозначаются как $\leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}}$ и $\leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-2}}$.

1. Теоремы о нормальной форме

Пусть $\mathcal{D}$ — решетка множеств, тогда назовем функцию $\Phi : \mathcal{D}^n \to \mathcal{D}$ теоретико-множественной по классу множеств $\mathcal{D}$, если она либо совпадает с одной из следующих: $\Phi_1(X, Y) = X \cup Y$, $\Phi_2(X, Y) = X \cap Y$ или $\Phi_3^{n,m}(X_1, \dots, X_n) = X_m$ $(1 \leq m \leq n)$, либо может быть получена из них применением конечного числа раз операции суперпозиции.

Определение 1. Пусть $\mathcal{D}$ — решетка множеств, тогда будем говорить, что множество B SET-1-сводится (SET-2-сводится) к множеству A по классу множеств $\mathcal{D}$ и будем писать

$$A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B \quad (A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-2}} B),$$

если существуют такие множества $R_1, \dots, R_n \in \mathcal{D}$ и такая теоретико-множественная функция $\Phi : \mathcal{D}^{n+1} \to \mathcal{D}$ $(\Phi : \mathcal{D}^{n+2} \to \mathcal{D})$, что $A = \Phi(B, R_1, \dots, R_n)$ (или $A = \Phi(B, \overline{B}, R_1, \dots, R_n)$ соответственно).

Если $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$ $(A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-2}} B)$ не верно, то говорим, что B не SET-1-сводится к A (B не SET-2-сводится к A), и пишем $A \nleq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$ $(A \nleq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-2}} B)$.

Для $1 \leq i \leq 2$ введем обозначение $A <^{\mathcal{D}}_{\text{SET-}i} B$, если $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-}i} B$ и $B \nleq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-}i} A$.

Будем также писать $A \equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-}i} B$, если $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-}i} B$ и $B \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-}i} A$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00169) и Министерства образования и науки Российской Федерации (грант № E02-1.0-177).

Легко видеть, что введенные отношения $\leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-}i}$ рефлексивны и транзитивны, а отношения $\equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-}i}$ являются отношениями эквивалентности. Классы эквивалентности будем обозначать $[A]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-}i} = \{B \subseteq \omega \mid B \equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-}i} A\}$, где $1 \leq i \leq 2$. Пусть $R \in \mathcal{D}$, тогда класс $[R]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-}i}$ — наименьший элемент по SET-i-сводимости, причем $[R]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} = \mathcal{D}$. Легко видеть, что $[R]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-2}}$ — наименьшая по включению алгебра множеств, содержащая $\mathcal{D}$. Следовательно, если $\mathcal{D}$ — алгебра множеств, то $[R]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-2}} = \mathcal{D}$.

Если $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$, то очевидно $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-2}} B$. Очевидно также, что $A \equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-2}} \overline{A}$ для любого $A \subseteq \omega$.

Лемма 1. *Если $\mathcal{D}$ — алгебра множеств, то $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$ тогда и только тогда, когда $\overline{A} \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} \overline{B}$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$). Если $A = \Phi(B, R_1, \ldots, R_n)$, где $R_1, \ldots, R_n \in \mathcal{D}$, то $\overline{A} = \Phi'(\overline{B}, \overline{R}_1, \ldots, \overline{R}_n)$, где формула Φ' получается из формулы Φ заменой операции $\cup$ на $\cap$, а $\cap$ на $\cup$. Заметим, что $\overline{R}_1, \ldots, \overline{R}_n \in \mathcal{D}$, т. к. $\mathcal{D}$ – алгебра множеств.

($\Leftarrow$). Аналогично. $\square$

Определения теоретико-множественных сводимостей неудобны для дальнейших действий с ними, поэтому необходимы критерии для этих сводимостей, так называемые нормальные формы. Далее в теоремах 1 и 2 установим критерии для теоретико-множественных SET-1- и SET-2-сводимостей.

Теорема 1 (о нормальной форме для SET-1-сводимости). *Для решетки множеств $\mathcal{D}$ и для любых множеств A и B выполнено $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$ тогда и только тогда, когда существуют такие множества $R_1, R_2 \in \mathcal{D}$, что $R_1 \subseteq R_2$ и справедливо одно из следующих представлений*:

1) $A = B$,
2) $A = B \cap R_1$,
3) $A = B \cup R_1$,
4) $A = (B \cup R_1) \cap R_2 = (B \cap R_2) \cup R_1$.

Приведем сначала лемму 2, справедливость которой проверяется непосредственно.

Лемма 2. *Для любых множеств $R_1 \subseteq R_2$, $R_3 \subseteq R_4$ и B имеем*
1) $((B \cup R_1) \cap R_2) \cup ((B \cup R_3) \cap R_4) = (B \cup (R_1 \cup R_3)) \cap (R_2 \cup R_4)$,
2) $((B \cup R_1) \cap R_2) \cap ((B \cup R_3) \cap R_4) = (B \cup (R_1 \cap R_3)) \cap (R_2 \cap R_4)$.
Кроме того, $R_1 \cup R_3 \subseteq R_2 \cup R_4$ и $R_1 \cap R_3 \subseteq R_2 \cap R_4$.

Замечание 1. Представим теорему 1 в следующей более удобной записи.

Пусть $\mathcal{D}$ — решетка множеств. Тогда для любых множеств A и B выполнено $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$ тогда и только тогда, когда существуют такие множества $R_1 \in \mathcal{D} \cup \{\emptyset\}$ и $R_2 \in \mathcal{D} \cup \{\omega\}$, что $R_1 \subseteq R_2$ и $A = (B \cup R_1) \cap R_2$.

Отметим также, что если $R_1 \subseteq R_2$, то $(B \cup R_1) \cap R_2 = (B \cap R_2) \cup R_1$.

Доказательство теоремы 1. ($\Rightarrow$). Пусть $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$, тогда существуют такие множества $R_1, \ldots, R_n \in \mathcal{D}$ и такая теоретико-множественная функция Φ, что $A = \Phi(B, R_1, \ldots, R_n)$. Любая теоретико-множественная функция реализуется некоторой конечной записью специальных символов — базисных формул Φ_1, Φ_2, $\Phi_3^{n+1,m}$ $(1 \leq m \leq n+1)$ и специального символа, который связывает базисные формулы операцией суперпозиции. Зафиксируем такую запись для функции Φ.

Введем понятие длины записи множества B в записи теоретико-множественной функции Φ. Эту длину будем обозначать через $\mathrm{Ln}_\Phi(B)$ как число встречающихся в записи функции Φ символов $\Phi_3^{n+1,1}$. Далее будем вести индукцию по $\mathrm{Ln}_\Phi(B)$.

I) Пусть $\mathrm{Ln}_\Phi(B) = 0$, тогда $A = \Phi(B, R_1, \ldots, R_n) = \widetilde{\Phi}(R_1, \ldots, R_n)$, где теоретико-множественная функции $\widetilde{\Phi}$ полностью совпадает с Φ, т. к. в данном случае формальный параметр B можно опустить. Следовательно, $A \in \mathcal{D}$, т. к. $\mathcal{D}$ является решеткой множеств. Тогда $A = (B \cup R) \cap R$ и $R \subseteq R$, где $R = A \in \mathcal{D}$.

II) Если $\mathrm{Ln}_\Phi(B) = 1$, то либо $A = \Phi(B, R_1, \ldots, R_n) = \Phi_1'(B, R_1, \ldots, R_n) \cup \Phi_1''(B, R_1, \ldots, R_n)$, либо $A = \Phi(B, R_1, \ldots, R_n) = \Phi_1'(B, R_1, \ldots, R_n) \cap \Phi_1''(B, R_1, \ldots, R_n)$, либо $A = \Phi(B, R_1, \ldots, R_n) = \Phi_3^{n+1,i}(B, R_1, \ldots, R_n)$, $1 \le i \le n+1$ (в последнем случае теорема доказана), где $\mathrm{Ln}_{\Phi_1'}(B) + \mathrm{Ln}_{\Phi_1''}(B) = 1$. В силу коммутативности операций объединения и пересечения, без ограничения общности можем предположить, что $\mathrm{Ln}_{\Phi_1'}(B) = 1$ и $\mathrm{Ln}_{\Phi_1''}(B) = 0$. Тогда по случаю I) имеем $\Phi_1''(B, R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{D}$.

Аналогично, $\Phi_1'(B, R_1, \ldots, R_n) = \Phi_2'(B, R_1, \ldots, R_n) \delta \Phi_2''(B, R_1, \ldots, R_n)$, где δ означает $\cup$ или $\cap$, $\mathrm{Ln}_{\Phi_2'}(B) = 1$ и $\mathrm{Ln}_{\Phi_2''}(B) = 0$. И так далее, пока выполняется $\Phi_n' = \Phi_3^{n+1,i}$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ (такое число существует, т. к. запись для Φ конечна). Таким образом, получим представление множества A (при $s = 0$ теорема доказана)

$$A = (\ldots((B\delta_1 R_1')\delta_2 R_2') \ldots \delta_s R_s'), \quad \text{где} \quad \delta_i \in \{\cup, \cap\} \quad \text{и} \quad R_i' \in \mathcal{D}, \quad 1 \le i \le s. \tag{1}$$

Заметим, что $B = (B \cup \emptyset) \cap \omega$ и $R_i' = (B \cup R_i') \cap R_i'$ $(1 \le i \le s)$. Неоднократно применяя лемму 2, из (1) получим $A = (B \cup P_1) \cap P_2$, где $P_1 \in \mathcal{D} \cup \{\emptyset\}$, $P_2 \in \mathcal{D} \cup \{\omega\}$ и $P_1 \subseteq P_2$.

III) Пусть $\mathrm{Ln}_\Phi(B) = k > 1$ и для любой формулы $\Phi'(B, R_1, \ldots, R_n)$ при $\mathrm{Ln}_{\Phi'}(B) < k$ существуют такие множества $R' \in \mathcal{D} \cup \{\emptyset\}$, $R'' \in \mathcal{D} \cup \{\omega\}$, что $R' \subseteq R''$ и $\Phi'(B, R_1, \ldots, R_n) = (B \cup R') \cap R''$.

Так же, как и в п. II), получим формулу (случай $s = 0$ очевиден)

$$A = (\ldots(\Phi'(B, R_1, \ldots, R_n)\delta_1 R_1')\delta_2 \ldots)\delta_s R_s', \tag{2}$$

где $\delta_i \in \{\cup, \cap\}$, $R_i' \in \mathcal{D}$ $(1 \le i \le s)$, $\Phi'(B, R_1, \ldots, R_n) = \Phi_1'(B, R_1, \ldots, R_n) \cup \Phi_2'(B, R_1, \ldots, R_n)$ или $\Phi'(B, R_1, \ldots, R_n) = \Phi_1'(B, R_1, \ldots, R_n) \cap \Phi_2'(B, R_1, \ldots, R_n)$, где $\mathrm{Ln}_{\Phi_1'}(B) \neq 0$ и $\mathrm{Ln}_{\Phi_2'}(B) \neq 0$ (т. е. $\mathrm{Ln}_{\Phi_1'}(B) < k$ и $\mathrm{Ln}_{\Phi_2'}(B) < k$).

Применим индукцию к Φ_1' и Φ_2'. Тогда существуют такие множества $P_1, P_3 \in \mathcal{D} \cup \{\emptyset\}$ и $P_2, P_4 \in \mathcal{D} \cup \{\omega\}$, что $P_1 \subseteq P_2$ и $P_3 \subseteq P_4$, $\Phi_1'(B, R_1, \ldots, R_n) = (B \cup P_1) \cap P_2$ и $\Phi_2'(B, R_1, \ldots, R_n) = (B \cup P_3) \cap P_4$.

По лемме 2 имеем $\Phi'(B, R_1, \ldots, R_n) = (B \cup P') \cap P''$, где $P' \in \mathcal{D} \cup \{\emptyset\}$, $P'' \in \mathcal{D} \cup \{\omega\}$ и $P' \subseteq P''$.

Аналогично п. II) по лемме 2 из (2) следует существование таких множеств $\widetilde{R}_1 \in \mathcal{D} \cup \{\emptyset\}$ и $\widetilde{R}_2 \in \mathcal{D} \cup \{\omega\}$, что $\widetilde{R}_1 \subseteq \widetilde{R}_2$ и $A = (B \cup \widetilde{R}_1) \cap \widetilde{R}_2$.

($\Leftarrow$). Очевидно по определению SET-1-сводимости. □

Из замечания 1 вытекает

Следствие 1. Для решетки множеств $\mathcal{D}$ с наименьшим или с наибольшим элементом и для любых множеств A и B выполнено $A \le_{\text{SET-1}}^{\mathcal{D}} B$ тогда и только тогда, когда существуют такие множества $R_1, R_2 \in \mathcal{D}$, что $R_1 \subseteq R_2$ и справедливо одно из следующих представлений:

1°) $A = B \cup R_1$ (если $\mathcal{D}$ с наименьшим элементом) или $A = B \cap R_1$ (если $\mathcal{D}$ с наибольшим элементом соответственно),

2°) $A = (B \cup R_1) \cap R_2 = (B \cap R_2) \cup R_1$.

Если $\emptyset, \omega \in \mathcal{D}$, то случай 1°) можно опустить.

Теорема 2 (о нормальной форме для SET-2-сводимости). *Для решетки множеств $\mathcal{D}$ и для любых множеств A и B выполнено $A \le_{\text{SET-2}}^{\mathcal{D}} B$ тогда и только тогда, когда либо $A \le_{\text{SET-1}}^{\mathcal{D}} B$, либо $A \le_{\text{SET-1}}^{\mathcal{D}} \overline{B}$, либо существуют такие множества R_1, $R_2 \in \mathcal{D}$, что $A = (B \cup R_1) \cap (\overline{B} \cup R_2)$.*

Следующие две леммы доказываются непосредственной проверкой.

Лемма 3. *Для любых множеств $R_1 \subseteq R_2$ и B справедливо равенство*

$$(B \cup R_1) \cap R_2 = (B \cup R_1) \cap (\overline{B} \cup R_2).$$

Лемма 4. *Для любых множеств R_1, R_2, R_3, R_4 и B имеем*

1) $((B \cup R_1) \cap (\overline{B} \cup R_2)) \cup ((B \cup R_3) \cap (\overline{B} \cup R_4)) = (B \cup (R_1 \cup R_3)) \cap (\overline{B} \cup (R_2 \cup R_4))$,

2) $((B \cup R_1) \cap (\overline{B} \cup R_2)) \cap ((B \cup R_3) \cap (\overline{B} \cup R_4)) = (B \cup (R_1 \cap R_3) \cap (\overline{B} \cup (R_2 \cap R_4)))$.

Замечание 2. В силу леммы 3 аналогично замечанию 1 запишем теорему 2 о нормальной форме для SET-2-сводимости в следующем виде.

Пусть $\mathcal{D}$ — решетка множеств. Тогда для любых множеств A и B выполнено $A \le^{\mathcal{D}}_{\text{SET-2}} B$ тогда и только тогда, когда существуют такие множества $R_1, R_2 \in \mathcal{D} \cup \{\emptyset, \omega\}$, что

$$A = (B \cup R_1) \cap (\overline{B} \cup R_2).$$

Доказательство теоремы 2. ($\Rightarrow$). Пусть $A \le^{\mathcal{D}}_{\text{SET-2}} B$, тогда существуют такая теоретико-множественная функция Φ и такие множества $R_1, \ldots, R_n \in \mathcal{D}$, что $A = \Phi(B, \overline{B}, R_1, \ldots, R_n)$.

Аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 1, введем понятие длины записи множества $\overline{B}$ в записи теоретико-множественной функции Φ, которую будем обозначать через $\mathrm{Ln}_\Phi(\overline{B})$ как число встречающихся в записи функции Φ символов $\Phi^{n+1,2}_3$. Далее будем вести индукцию по $\mathrm{Ln}_\Phi(\overline{B})$.

I) Пусть $\mathrm{Ln}_\Phi(\overline{B}) = 0$, тогда $A = \Phi(B, \overline{B}, R_1, \ldots, R_n) = \widetilde{\Phi}(B, R_1, \ldots, R_n)$, т. е. $A \le^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$.

II) Если $\mathrm{Ln}_\Phi(\overline{B}) = 1$, то аналогично рассуждениям, проведенным при доказательстве теоремы 1, можно обосновать представление

$$A = (\ldots(\overline{B}\delta_1 Q_1)\delta_2 \ldots)\delta_s Q_s, \tag{3}$$

где $\delta_i \in \{\cup, \cap\}$ и $\mathrm{Ln}_{Q_i}(\overline{B}) = 0$, $1 \le i \le s$. Так как $\mathrm{Ln}_{Q_i}(\overline{B}) = 0$, то из теоремы 1 имеем

$$Q_i = (B \cup P^i_1) \cap P^i_2, \quad \text{где } P^i_1, P^i_2 \in \mathcal{D} \cup \{\emptyset, \omega\} \text{ и } P^i_1 \subseteq P^i_2 \ (1 \le i \le s).$$

Так как $\overline{B} = (B \cup \omega) \cap (\overline{B} \cup \emptyset)$ и $Q_i = (B \cup P^i_1) \cap (\overline{B} \cup P^i_2)$ для любого $i \in \{1, \ldots, s\}$ (см. лемму 3), то из леммы 4 и (3) следует, что $A = (B \cup P') \cap (\overline{B} \cup P'')$, где $P', P'' \in \mathcal{D} \cup \{\emptyset, \omega\}$.

III) Пусть $\mathrm{Ln}_\Phi(\overline{B}) = k > 1$ и для любой формулы $\Phi'(B, \overline{B}, R_1, \ldots, R_n)$, где $\mathrm{Ln}_{\Phi'}(\overline{B}) < k$, существуют такие множества $R', R'' \in \mathcal{D} \cup \{\emptyset, \omega\}$, что $\Phi'(B, \overline{B}, R_1, \ldots, R_n) = (B \cup R') \cap (\overline{B} \cup R'')$.

Так же, как и в п. II), получим формулу

$$A = (\ldots(\Phi'(B, \overline{B}, R_1, \ldots, R_n)\delta_1 Q_1)\delta_2 \ldots)\delta_s Q_s, \tag{4}$$

где $\delta_i \in \{\cup, \cap\}$, $Q_i = (B \cup P^i_1) \cap P^i_2$, $P^i_1, P^i_2 \in \mathcal{D} \cup \{\emptyset, \omega\}$, $P^i_1 \subseteq P^i_2$, $1 \le i \le s$, причем $\Phi'(B, \overline{B}, R_1, \ldots, R_n) = \Phi'_1(B, \overline{B}, R_1, \ldots, R_n)\delta\Phi'_2(B, \overline{B}, R_1, \ldots, R_n)$, где $\delta \in \{\cup, \cap\}$, $\mathrm{Ln}_{\Phi'_1}(\overline{B}) < k$ и $\mathrm{Ln}_{\Phi'_2}(\overline{B}) < k$.

Применим индукцию к Φ'_1 и Φ'_2. Тогда существуют такие множества $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathcal{D} \cup \{\emptyset, \omega\}$, что $\Phi'_1(B, \overline{B}, R_1, \ldots, R_n) = (B \cup P_1) \cap (\overline{B} \cup P_2)$ и $\Phi'_2(B, \overline{B}, R_1, \ldots, R_n) = (B \cup P_3) \cap (\overline{B} \cup P_4)$. Тогда по лемме 4 существуют такие $T_1, T_2 \in \mathcal{D} \cup \{\emptyset, \omega\}$, что $\Phi'(B, \overline{B}, R_1, \ldots, R_n) = (B \cup T_1) \cap (\overline{B} \cup T_2)$.

Далее, так же, как и в п. II), согласно леммам 3 и 4 из (4) следует $A = (B \cup T') \cap (\overline{B} \cup T'')$, где $T', T'' \in \mathcal{D} \cup \{\emptyset, \omega\}$.

($\Leftarrow$). Очевидно по определению SET-2-сводимости. $\square$

В силу замечания 2 сразу получается

Следствие 2. Для решетки множеств $\mathcal{D}$ с наименьшим и наибольшим элементами и для любых множеств A и B выполнено $A \le^{\mathcal{D}}_{\text{SET-2}} B$ тогда и только тогда, когда существуют множества $R_1, R_2 \in \mathcal{D}$ такие, что $A = (B \cup R_1) \cap (\overline{B} \cup R_2)$.

2. Частные случаи и теоремы о почти нормальной форме

В предыдущем разделе были доказаны теоремы 1 и 2, теоремы о нормальных формах для SET-1- и SET-2-сводимостей. Однако в таких частных случаях, как $A \cap B = \emptyset$, $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, сводимости $A \le^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$ и $A \le^{\mathcal{D}}_{\text{SET-2}} B$ ($\mathcal{D}$ — некоторая решетка множеств) по предложениям 1 и 2 можно записать в еще более простом виде.

Предложение 1. *Если $\mathcal{D}$ — решетка множеств и $A \cap B \in \mathcal{D}$, то*
1) $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$ *тогда и только тогда, когда* $A \in \mathcal{D}$;
2) $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-2}} B$ *тогда и только тогда, когда* $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} \overline{B}$.

Доказательство. 1) Очевидно, если $A \in \mathcal{D}$, то $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$. Пусть теперь $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$, тогда по теореме 1 существуют такие множества $R_1 \in \mathcal{D} \cup \{\emptyset\}$ и $R_2 \in \mathcal{D} \cup \{\omega\}$, что $R_1 \subseteq R_2$ и

$$A = (B \cup R_1) \cap R_2.$$

Имеем $A = (A \cup R_1) \cap A = (A \cup R_1) \cap (B \cup R_1) \cap R_2 = ((A \cap B) \cup R_1) \cap R_2 \in \mathcal{D}$, т. к. $A \cap B \in \mathcal{D}$.

2) Очевидно, если $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} \overline{B}$, то $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-2}} B$. Пусть теперь $A \leq_{\text{SET-2}} B$, тогда по теореме 2 существуют такие множества $R_1, R_2 \in \mathcal{D} \cup \{\emptyset, \omega\}$, что $A = (B \cup R_1) \cap (\overline{B} \cup R_2) = (B \cap R_2) \cup (\overline{B} \cap R_1) = R_0 \cup (\overline{B} \cap R_1)$, где $R_0 = B \cap R_2 = A \cap B \in \mathcal{D}$. Следовательно, $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} \overline{B}$. $\square$

Предложение 2. *Пусть $\mathcal{D}$ — решетка множеств. Если $A \subseteq B$, тогда следующие условия эквивалентны*:
1) $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$,
2) $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-2}} B$,
3) *существует такое множество $R \in \mathcal{D}$, что $A = B$ или $A = B \cap R$,*
4) *существует такое множество $R \in \mathcal{D} \cup \{\omega\}$, что $A = B \cap R$.*

Также эквивалентны условия:
1′) $B \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A$,
2′) $B \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-2}} A$,
3′) *существует такое множество $R \in \mathcal{D}$, что $A = B$ или $A = B \cup R$,*
4′) *существует такое множество $R \in \mathcal{D} \cup \{\emptyset\}$, что $A = B \cup R$.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2), 3) $\Leftrightarrow$ 4) и 4) $\Rightarrow$ 1) очевидны. Докажем 2) $\Rightarrow$ 4).

Пусть $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-2}} B$, тогда по теореме 2 существуют такие множества $R_1, R_2 \in \mathcal{D} \cup \{\emptyset, \omega\}$, что $A = (B \cup R_1) \cap (\overline{B} \cup R_2)$. Так как $A \subseteq B$, то $A = A \cap B = B \cap R_2$. Заметим, что если $R_2 = \emptyset$, то $R_2 = \emptyset = A \cap B \in \mathcal{D}$.

Вторая часть предложения доказывается аналогично. $\square$

Следствие 3. Пусть $\mathcal{D}$ — решетка множеств с наибольшим (с наименьшим) элементом. Если $A \subseteq B$, то эквивалентны условия:
1) $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$ ($B \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A$),
2) $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-2}} B$ ($B \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-2}} A$),
3) существует такое множество $R \in \mathcal{D}$, что $A = B \cap R$ ($A = B \cup R$).

Заметим, что из предложения 2 также следует, что теоремы о нормальной форме для SET-1- и SET-2-сводимостей улучшить нельзя, т. е. нельзя таким образом множество A выразить через множество B и через некоторое множество $R \in \mathcal{D}$ с помощью операций объединения и пересечения.

Можно предположить, например, что $A \equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B \cap R$ или $A \equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B \cup R$ для некоторого $R \in \mathcal{D}$. Далее в следствии 4 покажем, что наше предположение верно.

Теорема 3 (о почти нормальной форме для SET-1-сводимости). *Пусть $\mathcal{D}$ — алгебра множеств, тогда если для любых множеств A и $B_1, \ldots, B_n$ выполнено $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B_i$, где $1 \leq i \leq n$, то существуют такие множества $R_1, R_2 \in \mathcal{D}$, что для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ $A' = B_i \cap R_1$, $A'' = B_i \cup R_2$ и $A \equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A'$, $A \equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A''$.*

Доказательство. Пусть для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ выполнено $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B_i$, тогда по теореме 1 существуют такие множества $R^i_1, R^i_2 \in \mathcal{D}$, где $1 \leq i \leq n$, что $A = (B_i \cup R^i_1) \cap R^i_2 = (B_i \cap R^i_2) \cup R^i_1$ и $R^i_1 \subseteq R^i_2$.

Таким образом, для любого $i \in \{1,\ldots,n\}$ имеем $R_1^i \subseteq A \subseteq R_2^i$. Пусть $P_1 = \cup_{i=1}^n R_1^i \in \mathcal{D}$ и $P_2 = \cap_{i=1}^n R_2^i \in \mathcal{D}$, тогда $P_1 \subseteq A \subseteq P_2$ и согласно следствию 3 $A' = A \cap \overline{P_1} \equiv_{\text{SET-1}}^{\mathcal{D}} A$ и $A'' = A \cup \overline{P_2} \equiv_{\text{SET-1}}^{\mathcal{D}} A$.

Следовательно, для любого $i \in \{1,\ldots,n\}$ выполнено $A' = A \cap \overline{P}_1 = (B_i \cup R_1^i) \cap R_2^i \cap \overline{R}_1^1 \cap \cdots \cap \overline{R}_1^n = B_i \cap R_2^i \cap \overline{R}_1^1 \cap \cdots \cap \overline{R}_1^n = T^i$, где $T^i = R_2^i \cap \overline{R}_1^1 \cap \cdots \cap \overline{R}_1^n \in \mathcal{D}$, $1 \leq i \leq n$. Имеем $A' = B_i \cap T^1 \cap \cdots \cap T^n = B_i \cap T$, где $T = \cap_{i=1}^n T^i \in \mathcal{D}$.

Аналогично, существует такое множество $T' \in \mathcal{D}$, что $A'' = A \cup T'$. $\square$

Следствие 4. Пусть $\mathcal{D}$ — алгебра множеств. Для любых множеств A и B выполнено $A \leq_{\text{SET-1}}^{\mathcal{D}} B$ тогда и только тогда, когда существуют такие множества $R_1, R_2 \in \mathcal{D}$, что $A \equiv_{\text{SET-1}}^{\mathcal{D}} B \cap R_1$ и $A \equiv_{\text{SET-1}}^{\mathcal{D}} B \cup R_2$.

Доказательство ($\Rightarrow$) следует из теоремы 3 при $n = 1$.

($\Leftarrow$). Очевидно.

Предложение 3. *Пусть $\mathcal{D}$ является алгеброй множеств и $A \subseteq B$, тогда эквивалентны условия*:

1) $A \equiv_{\text{SET-1}}^{\mathcal{D}} B$,
2) $A \equiv_{\text{SET-2}}^{\mathcal{D}} B$,
3) $B - A \in \mathcal{D}$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 3), 2) $\Rightarrow$ 3). Если $A \equiv_{\text{SET-}i}^{\mathcal{D}} B$, то $A \leq_{\text{SET-}i}^{\mathcal{D}} B$ и $B \leq_{\text{SET-}i}^{\mathcal{D}} A$, где $i \in \{1,2\}$. Так как $A \subseteq B$, то по предложению 3 существуют такие множества $R_1, R_2 \in \mathcal{D}$, что $A = B \cap R_1$ и $B = A \cup R_2$.

Имеем $B - A = B \cap \overline{A} = B \cap (A \cup R_2) \cap \overline{A} = B \cap R_2 \cap \overline{A} = B \cap R_2 \cap (\overline{B} \cup \overline{R}_1) = (R_2 \cap \overline{R}_1) \in \mathcal{D}$, т. к. $\mathcal{D}$ — алгебра множеств.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть $B - A \in \mathcal{D}$, тогда $B = A \cup (B - A)$ и $A = B \cap \overline{B - A}$, т. к. $\overline{B - A} \in \mathcal{D}$. Следовательно, $B \leq_{\text{SET-1}}^{\mathcal{D}} A$ и $A \leq_{\text{SET-1}}^{\mathcal{D}} B$. Таким образом, $A \equiv_{\text{SET-1}}^{\mathcal{D}} B$.

1) $\Rightarrow$ 2) очевидно. $\square$

Предложение 4 (о почти нормальной форме для SET-2-сводимости). *Предположим, что $\mathcal{D}$ — алгебра множеств. Если $A \leq_{\text{SET-2}}^{\mathcal{D}} B$, то существуют такие множества $R_1, R_2 \in \mathcal{D}$, что $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ и $A \equiv_{\text{SET-1}}^{\mathcal{D}} (B \cup R_1) \cap (\overline{B} \cup R_2)$.*

Доказательство. Пусть $A \leq_{\text{SET-2}}^{\mathcal{D}} B$, тогда по теореме 2 существуют такие множества $P_1, P_2 \in \mathcal{D}$, что $A = (B \cup P_1) \cap (\overline{B} \cup P_2) = (B \cap P_2) \cup (\overline{B} \cap P_1)$.

Пусть $P = P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$ и $A' = A - P$, тогда $P \subseteq A$ и $A = A' \cup P$, т. е. $A \leq_{\text{SET-1}}^{\mathcal{D}} A'$. Более того, $A' = A \cap \overline{P}$ ($\overline{P} \in \mathcal{D}$, т. к. $\mathcal{D}$ — алгебра множеств), т. е. $A' \leq_{\text{SET-1}}^{\mathcal{D}} A$. Таким образом, $A \equiv_{\text{SET-1}}^{\mathcal{D}} A'$, где $A' = A \cap \overline{P} = ((B \cap P_2) \cup (\overline{B} \cap P_1)) \cap \overline{P} = (B \cap R_2) \cup (\overline{B} \cap R_1) = (B \cup R_1) \cap (\overline{B} \cup R_2)$, $R_1 = P_1 \cap \overline{P}$, $R_2 = P_2 \cap \overline{P}$ и $R_1 \cap R_2 = \emptyset$. $\square$

3. Верхние и нижние грани

В этом разделе получим точные верхние и нижние грани для SET-1- и SET-2-сводимостей. В теореме 4 опишем все начальные сегменты по SET-1-сводимости.

Лемма 5. *Если $B \leq_{\text{SET-}i}^{\mathcal{D}} A$ и $C \leq_{\text{SET-}i}^{\mathcal{D}} A$, то $(B \cup C) \leq_{\text{SET-}i}^{\mathcal{D}} A$ и $(B \cap C) \leq_{\text{SET-}i}^{\mathcal{D}} A$, где $\mathcal{D}$ — решетка множеств и $1 \leq i \leq 2$.*

Доказательство. Пусть $B \leq_{\text{SET-1}}^{\mathcal{D}} A$ и $C \leq_{\text{SET-1}}^{\mathcal{D}} A$, тогда $B = \Phi'(A, R_1^1, \ldots, R_s^1)$ и $C = \Phi''(A, R_1^2, \ldots, R_t^2)$. Следовательно,

$$B \cup C = \Phi(A, R_1^1, \ldots, R_s^1, R_1^2, \ldots, R_t^2) = \Phi'(A, R_1^1, \ldots, R_s^1) \cup \Phi''(A, R_1^2, \ldots, R_t^2).$$

Все остальные случаи леммы доказываются аналогично. $\square$

Следствие 5. Если $B \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-}i} B \cup C$ (или $B \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-}i} B \cap C$) и $C \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-}i} B \cup C$ (или $C \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-}i} B \cap C$), то существует точная верхняя грань $[B]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-}i} \vee [C]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-}i}$ для SET-i-сводимости и $[B]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-}i} \vee [C]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-}i} = [B \cup C]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-}i}$ (или $[B]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-}i} \vee [C]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-}i} = [B \cap C]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-}i}$ соответственно), где $\mathcal{D}$ — решетка множеств и $1 \leq i \leq 2$.

Предложение 5. *Если $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$ и $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} C$, то $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} (B \cup C)$ и $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} (B \cap C)$, где $\mathcal{D}$ — решетка множеств.*

Доказательство. Если $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$ и $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} C$, то по теореме 1 существуют такие множества $R_1, R_3 \in \mathcal{D} \cup \{\emptyset\}$ и $R_2, R_4 \in \mathcal{D} \cup \{\omega\}$, что $R_1 \subseteq R_2$, $R_3 \subseteq R_4$, $A = (B \cup R_1) \cap R_2 = (B \cap R_2) \cup R_1$ и $A = (C \cup R_3) \cap R_4 = (C \cap R_4) \cup R_3$. Следовательно, $R_1, R_3, B \cap R_2, B \cap R_4 \subseteq A \subseteq R_2, R_4, B \cup R_1, C \cup R_3$.

Имеем $A = A \cup A = (B \cap R_2) \cup R_1 \cup (C \cap R_4) \cup R_3 = (B \cup C \cup R_1 \cup R_3) \cap (B \cup R_4) \cap (R_2 \cup C) \cap (R_2 \cup R_4) = (B \cup C \cup R_1 \cup R_3) \cap ((B \cap R_2) \cup R_4) \cap ((C \cap R_4) \cup R_2) = (B \cup C \cup R_1 \cup R_3) \cap R_4 \cap R_2$, причем $R_1 \cup R_3 \in \mathcal{D} \cup \{\emptyset\}$ и $R_2 \cap R_4 \in \mathcal{D} \cup \{\omega\}$. Следовательно, $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} (B \cup C)$. Аналогично доказывается, что $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} (B \cap C)$. $\square$

Следствие 6. Пусть $\mathcal{D}$ — решетка множеств. Если $B \cup C \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$ (или $B \cap C \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$) и $B \cup C \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} C$ (или $B \cap C \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} C$), то существует точная нижняя грань $[B]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} \wedge [C]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}}$ для SET-1-сводимости и $[B]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} \wedge [C]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} = [B \cup C]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}}$ (или $[B]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} \wedge [C]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} = [B \cap C]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}}$ соответственно).

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{D}$ — решетка множеств. Тогда для любого множества A начальный сегмент $[\leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A] = \{[B]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} \mid B \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A\}$ является дистрибутивной решеткой с наименьшим и наибольшим элементами относительно взятия точных верхних и нижних граней, причем если $\mathcal{D}$ — алгебра множеств, то $[\leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A]$ является булевой алгеброй.*

Доказательство. Очевидно, $[\emptyset]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}}$ и $[A]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}}$ являются наименьшим и наибольшим элементами соответственно. В п. 1 докажем, что для любых двух элементов из $[\leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A]$ существуют точные верхняя и нижняя грани. В п. 2 проверим выполнение условия дистрибутивности. В случае, когда $\mathcal{D}$ является алгеброй множеств, в п. 3 для любого элемента укажем его дополнение.

1) Если $A'_1 \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A$ и $A'_2 \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A$, то по теореме 3 существуют такие множества $A_1 \equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A'_1$ и $A_2 \equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A'_2$, что $A_1 = A \cup R_1$ и $A_2 = A \cup R_2$.

Пусть $C_1 = A_1 \cup A_2 = A \cup R_1 \cup R_2$, тогда $C_1 = A_1 \cup R_2$ и, следовательно, $C_1 \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A_1$. Аналогично имеем $C_1 \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A_2$. Тогда из следствия 6 получим $[C_1]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} = [A_1]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} \wedge [A_2]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}}$.

Пусть $C_2 = A_1 \cap A_2 = A \cup (R_1 \cap R_2)$, тогда $A_1 = C_2 \cup R_1$ и, следовательно, $A_1 \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} C_2$. Аналогично, $A_2 \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} C_2$. Тогда из следствия 5 будем иметь $[C_2]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} = [A_1]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} \vee [A_2]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}}$.

2) Если $A'_1, A'_2, A'_3 \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A$, то по теореме 3 существуют такие $R_1, R_2, R_3 \in \mathcal{D}$, что $A_i = A \cap R_i \equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A'_i$ для любого $i \in \{1, 2, 3\}$. Согласно п. 1 этой теоремы получаем

$$\begin{aligned}([A_1]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} \vee [A_2]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}}) \wedge [A_3]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} &= [A_1 \cap A_2]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} \wedge [A_3]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} = \\ = [(A_1 \cap A_2) \cup A_3]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} = [(A_1 \cup A_3) \cap (A_2 \cup A_3)]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} &= [A_1 \cup A_3]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} \vee [A_2 \cup A_3]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} = \\ &= ([A_1]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} \wedge [A_3]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}}) \vee ([A_2]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} \wedge [A_3]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}}).\end{aligned}$$

Аналогично имеем $([A_1]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} \wedge [A_2]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}}) \vee [A_3]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} = ([A_1]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} \vee [A_3]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}}) \wedge ([A_2]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} \vee [A_3]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}})$.

3) Предположим, что $\mathcal{D}$ — алгебра множеств. Если $A'_0 \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A$, то по теореме 3 существует такой $R \in \mathcal{D}$, что $A \cup R = A' \equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A'_0$. Пусть $A'' = A \cup \overline{R}$, тогда $A'' \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A$, т. к. $\overline{R} \in \mathcal{D}$.

Поскольку $A' \cup A'' = \omega$ и $A' \cap A'' = A$, то ввиду п. 1 этой теоремы имеем $[A']^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} \wedge [A'']^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} = [\omega]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} = [\emptyset]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}}$ и $[A']^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} \vee [A'']^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} = [A]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}}$. Таким образом, элемент $[A'']^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}}$ является дополнением элемента $[A']^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} = [A'_0]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}}$. $\square$

4. Минимальные элементы

В данном разделе опишем все конечные начальные сегменты по SET-1-сводимости (теорема 7), дадим критерий плотности (теорема 6), а также в теореме 5 приведем критерий минимальности для SET-1- и SET-2-сводимостей.

Определение 2. Пусть $\mathcal{D}$ — решетка множеств, тогда множество $A \notin \mathcal{D}$ называется $\mathcal{D}$-минимальным, если не существует такого множества $B \notin \mathcal{D}$, что $B <^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A$.

Теорема 5 (критерий минимальности). *Для алгебры множеств $\mathcal{D}$ и $A \notin \mathcal{D}$ следующие условия эквивалентны*:

1) *A является $\mathcal{D}$-минимальным*;
2) *для любого множества $B \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-2}} A$ либо $B \in \mathcal{D}$, либо $B \equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-2}} A$*;
3) *для любого множества $R \in \mathcal{D}$ либо $A \cap R \in \mathcal{D}$, либо $A \cap \overline{R} \in \mathcal{D}$*;
4) *для любого множества $R \in \mathcal{D}$ либо $\overline{A} \cap R \in \mathcal{D}$, либо $\overline{A} \cap \overline{R} \in \mathcal{D}$.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 3). Пусть A является $\mathcal{D}$-минимальным и существует такое множество $R \in \mathcal{D}$, что $A \cap R \notin \mathcal{D}$ и $A \cap \overline{R} \notin \mathcal{D}$, тогда для множества $B = A \cap R \notin \mathcal{D}$ имеем $\emptyset <^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A$ ($\emptyset \in \mathcal{D}$, т. к. $\mathcal{D}$ — алгебра множеств).

Поскольку $A - B = A \cap (\overline{A} \cup \overline{R}) = A \cap \overline{R} \notin \mathcal{D}$ и $B \subseteq A$, то по предложению 3 имеем $\emptyset <^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B <^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A$, что противоречит $\mathcal{D}$-минимальности множества A.

2) $\Rightarrow$ 3) и 1) $\Rightarrow$ 4) аналогично.

3) $\Rightarrow$)1. Предположим, что для любого множества $R \in \mathcal{D}$ выполнено $A \cap R \in \mathcal{D}$ или $A \cap \overline{R} \in \mathcal{D}$. Пусть для некоторого множества A' выполнено $A' \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A$, тогда по теореме 3 существует такое множество $R \in \mathcal{D}$, что $A' \equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A \cap R$.

Если $A \cap R \in \mathcal{D}$, то $A' \equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} \emptyset$. Если же $R' = A \cap \overline{R} \in \mathcal{D}$, то $A = (A \cap R) \cup (A \cap \overline{R}) = A' \cup R'$, т. е. $A' \equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A$. Следовательно, множество A является $\mathcal{D}$-минимальным.

4) $\Rightarrow$ 1) аналогично 3) $\Rightarrow$ 1).

Таким образом, установлена эквивалентность 1), 3) и 4), а также имеем 2) $\Rightarrow$ 3). Для завершения доказательства достаточно показать 1) $\Rightarrow$ 2).

1) $\Rightarrow$ 2). Если A является $\mathcal{D}$-минимальным, то в силу эквивалентности 1), 3) и 4) $\overline{A}$ также $\mathcal{D}$-минимально. Пусть $A' \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-2}} A$, тогда по теореме 2 существуют такие $R_1, R_2 \in \mathcal{D}$, что

$$A' = (A \cap R_1) \cup (\overline{A} \cap R_2) = (A \cup R_2) \cap (\overline{A} \cup R_1).$$

Так как $\overline{A}$ $\mathcal{D}$-минимально, то для множества $B = \overline{A} \cap R_2$ выполнено либо a) $B \in \mathcal{D}$, либо b) $\overline{A} \leq_{\text{SET-1}} B$.

a) Тогда $A' = (A \cap R_1) \cup (\overline{A} \cap R_2) = (A \cap R_1) \cup B$. Следовательно, $A' \leq_{\text{SET-1}} A$. По определению $\mathcal{D}$-минимальности множества A имеем $A' \in \mathcal{D}$ или $A' \equiv_{\text{SET-1}} A$. Следовательно, $A' \equiv_{\text{SET-2}} A$.

b) Тогда по предложению 2 имеем $\overline{A} = (\overline{A} \cap R_2) \cup R'$, где $R' \in \mathcal{D}$. Очевидно, $A \cup R_2 = \overline{R}' \cup R_2$. Следовательно, $A' = (A \cup R_2) \cap (\overline{A} \cup R_1) = (\overline{R}' \cup R_2) \cap (\overline{A} \cup R_1)$. Таким образом, $A' \leq_{\text{SET-1}} \overline{A}$. По определению $\mathcal{D}$-минимальности множества $\overline{A}$, имеем $A' \in \mathcal{D}$ или $A' \equiv_{\text{SET-2}} A$. $\square$

Теорема 6 (критерий плотности). *Пусть $\mathcal{D}$ — алгебра множеств, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ и $\mathcal{T}$ — решетка множеств, тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *$\widetilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T}/_{\equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}}}$ является плотным частично-упорядоченным множеством, т. е. для любых таких $A, B \in \mathcal{T}$, что $A <^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$, существует такой $C \in \mathcal{T}$, что*

$$A <^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} C <^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B;$$

2) *$\mathcal{T}$ не содержит $\mathcal{D}$-минимальных множеств*;
3) *для любого множества $A \in \mathcal{T} - \mathcal{D}$ существует такое множество $R \in \mathcal{D}$, что $A \cap R \notin \mathcal{D}$ и $A \cap \overline{R} \notin \mathcal{D}$*;

4) *для любого множества $A \in \mathcal{T} - \mathcal{D}$ существует такое множество $R \in \mathcal{D}$, что $\overline{A} \cap R \notin \mathcal{D}$ и $\overline{A} \cap \overline{R} \notin \mathcal{D}$.*

Доказательство. По теореме 5 имеем 2) $\Leftrightarrow$ 3) $\Leftrightarrow$ 4). Очевидно, если решетка $\widetilde{\mathcal{T}}$ плотна, то $\mathcal{T}$ не содержит $\mathcal{D}$-минимальных множеств. Таким образом, осталось доказать 3) $\Rightarrow$ 1).

Пусть $A, B \in \mathcal{T}$ — такие множества, что $A <^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$, тогда по следствию 3 существует такое множество $R \in \mathcal{D}$, что $A \equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B \cap R = A'$. Так как $A' \subseteq B$, то по предложению 3 имеем $B - A' \notin \mathcal{D}$, где $B - A' = B \cap (\overline{B} \cup \overline{R}) = B \cap \overline{R}$.

По условию существует такое множество $R' \in \mathcal{D}$, что $B \cap \overline{R} \cap R' \notin \mathcal{D}$ и $B \cap \overline{R} \cap \overline{R}' \notin \mathcal{D}$. Пусть $C = B \cap (R \cup \overline{R}') \in \widetilde{\mathcal{T}}$, тогда $C \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$. Так как $C \cap R = B \cap R = A'$, то $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} C$.

Имеем $C - A = B \cap (R \cup \overline{R}') \cap (\overline{B} \cup \overline{R}) = B \cap (R \cup \overline{R}') \cap \overline{R} = B \cap \overline{R} \cap \overline{R}' \notin \mathcal{D}$. Следовательно, по предложению 3 $C \not\leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A$, т. е. $A <^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} C$.

Аналогично, имеем $B - C = B \cap (\overline{B} \cup (\overline{R}_1 \cap R')) = B \cap \overline{R}_1 \cap R' \notin \mathcal{D}$. Следовательно, по предложению 3 $C <^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$. Таким образом, $\widetilde{\mathcal{T}}$ плотна. □

Следствие 7. Пусть $\mathcal{D}$ — алгебра множеств, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ и $\mathcal{T}$ — решетка множеств, $\widetilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T}/_{\equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}}}$ является плотным частично-упорядоченным множеством, т. е. выполнено хотя бы одно из условий теоремы 6. Тогда Σ_1-теория $\widetilde{\mathcal{T}}$ разрешима.

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{D} \neq \mathcal{T}$ (иначе — очевидно). Пусть $\widetilde{\mathcal{T}}$ — плотное частично-упорядоченное множество и существует некоторое множество $A \in \mathcal{T} - \mathcal{D}$, тогда по теореме 4 начальный сегмент $[\leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A]$ является безатомной (т. к. $\widetilde{\mathcal{T}}$ плотна) булевой алгеброй. Таким образом, в начальный сегмент $[\leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A]$ вложимо любое конечное частично-упорядоченное множество.

Теперь, чтобы проверить, верно ли некоторое Σ_1-предложение в $\widetilde{\mathcal{T}}$, достаточно проверить удовлетворяет ли это предложение аксиомам частичного порядка. □

Далее, опишем все конечные начальные сегменты по SET-1-сводимости по алгебре множеств $\mathcal{D}$. Из теоремы 4 следует, что любой конечный начальный сегмент является конечной булевой алгеброй. Конечные булевы алгебры полностью характеризуются с точностью до изоморфизма числом своих атомов [4]. Обозначим через $\mathcal{B}_n$ конечную булеву алгебру с n атомами. Например, начальный сегмент $\mathcal{D}$-минимального множества является тривиальной (двухэлементной) булевой алгеброй $\mathcal{B}_1$.

Будем говорить, что множество A удовлетворяет условию P_n, $n \geq 1$, если не существует таких множеств $R_1, \ldots, R_n \in \mathcal{D}$, что $A \cap R_1 \notin \mathcal{D}$, $A \cap \overline{R}_1 \cap R_2 \notin \mathcal{D}$, $A \cap \overline{R}_1 \cap \overline{R}_2 \cap R_3 \notin \mathcal{D}, \ldots, A \cap \overline{R}_1 \cap \cdots \cap \overline{R}_{n-1} \cap R_n \notin \mathcal{D}$ и $A \cap \overline{R}_1 \cap \cdots \cap \overline{R}_{n-1} \cap \overline{R}_n \notin \mathcal{D}$.

Например, при $n = 1$ множество A удовлетворяет условию P_1, если не существует такого множества $R \in \mathcal{D}$, что $A \cap R \notin \mathcal{D}$ и $A \cap \overline{R} \notin \mathcal{D}$. Таким образом, только $\mathcal{D}$-минимальные множества удовлетворяют условию P_1.

Для удобства скажем, что никакое множество не удовлетворяет условию P_0. Легко видеть, что если множество удовлетворяет условию P_n, то оно удовлетворяет условию P_{n+1}.

Определение 3. Множество $A \notin \mathcal{D}$ называется $\mathcal{D}$-n-минимальным ($n \geq 1$), если оно удовлетворяет условию P_n, но не удовлетворяет условию P_{n-1}.

Имеем, что множество $\mathcal{D}$-минимально тогда и только тогда, когда оно $\mathcal{D}$-1-минимально.

Теорема 7. *Пусть $\mathcal{D}$ — алгебра множеств и $A \notin \mathcal{D}$. Множество A $\mathcal{D}$-n-минимально тогда и только тогда, когда начальный сегмент $[\leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A]$ является конечной булевой алгеброй типа $\mathcal{B}_n$.*

Доказательство проведем по индукции. При $n = 1$ утверждение следует из теоремы 5. Предположим, что для любого $k \leq n$ теорема справедлива, докажем ее для $k = n + 1$.

($\Leftarrow$). Пусть $[\leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A]$ — конечная булева алгебра типа $\mathcal{B}_{n+1}$ ($n \geq 1$), тогда A удовлетворяет условию P_{n+1}, т. к. иначе существуют такие множества $R_1, \dots, R_{n+1} \in \mathcal{D}$, что $A \cap R_1 \notin \mathcal{D}, \dots, A \cap \overline{R}_1 \cap \dots \cap \overline{R}_n \cap R_{n+1} \notin \mathcal{D}$ и $A \cap \overline{R}_1 \cap \dots \cap \overline{R}_n \cap \overline{R}_{n+1} \notin \mathcal{D}$. Следовательно, в силу предложений 2 и 3 имеем $\emptyset <^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} (A \cap \overline{R}_1 \cap \dots \cap \overline{R}_n \cap \overline{R}_{n+1}) <^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} (A \cap \overline{R}_1 \cap \dots \overline{R}_n) <^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} \dots <^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} (A \cap \overline{R}_1 \cap \overline{R}_2) <^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} (A \cap \overline{R}_1) <^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A$, тогда $[\leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A]$ не является $\mathcal{B}_{n+1}$, противоречие.

Пусть $A \cap R_1 \notin \mathcal{D}$ является $\mathcal{D}$-минимальным множеством для некоторого $R_1 \in \mathcal{D}$ и $A' = A \cap \overline{R}_1$, тогда $[\leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A']$ является конечной булевой алгеброй типа $\mathcal{B}_n$. Следовательно, по предположению индукции A' является $\mathcal{D}$-n-минимальным, а именно, не удовлетворяет условию P_{n-1}. Поэтому существуют такие $R_2, \dots, R_n \in \mathcal{D}$, что $A \cap \overline{R}_1 \cap R_2 \notin \mathcal{D}, \dots, A \cap \overline{R}_1 \cap \dots \cap \overline{R}_n \notin \mathcal{D}$. Так как $A \cap R_1 \notin \mathcal{D}$, то A не удовлетворяет условию P_n. Таким образом, A является $\mathcal{D}$-n+1-минимальным.

($\Rightarrow$). Пусть множество A $\mathcal{D}$-n+1-минимально, тогда A удовлетворяет условию P_{n+1} и не удовлетворяет условию P_n. Таким образом, имеем

$$\exists R_1, \dots, R_n \in \mathcal{D} : A \cap R_1 \notin \mathcal{D}, \ \ A \cap \overline{R}_1 \cap R_2 \notin \mathcal{D}, \dots, A \cap \overline{R}_1 \cap \dots \cap \overline{R}_n \notin \mathcal{D}. \tag{5}$$

Пусть $A' = A \cap \overline{R}_1$, где R_1 из (5), тогда из формулы (5) следует, что A' не удовлетворяет условию P_{n-1}. Так как A удовлетворяет условию P_{n+1}, то A' удовлетворяет условию P_n. Таким образом, множество A' является $\mathcal{D}$-n-минимальным. Тогда по предположению индукции имеем, что $[\leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A']$ — конечная булева алгебра типа $\mathcal{B}_n$.

Осталось доказать, что $[A'']^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}}$ является атомом, т. е. множество A'' является $\mathcal{D}$-минимальным, где $A'' = A \cap R_1$, т. к. $[A]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} = [A']^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} \vee [A'']^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}}$ и, следовательно, $[A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}}]$ является конечной булевой алгеброй типа $\mathcal{B}_{n+1}$.

Пусть A'' не является $\mathcal{D}$-минимальным, тогда по теореме 5 существует такое множество $R_0 \in \mathcal{D}$, что $A \cap R_1 \cap R_0 \notin \mathcal{D}$ и $A \cap R_1 \cap \overline{R}_0 \notin \mathcal{D}$. Пусть $R'_1 = R_1 \cap \overline{R}_0 \in \mathcal{D}$, $R'_2 = R_1 \in \mathcal{D}$, $R'_3 = R_2 \in \mathcal{D}, \dots, R'_{n+1} = R_n \in \mathcal{D}$, где $R_1, \dots, R_n$ из формулы (5), тогда $A \cap R'_1 = A \cap R_1 \cap \overline{R}_0 \notin \mathcal{D}$, $A \cap \overline{R}'_1 \cap R'_2 = A \cap (\overline{R}_1 \cup R_0) \cap R_1 = A \cap R_0 \cap R_1 \notin \mathcal{D}$. Имеем $\overline{R}'_1 \cap \overline{R}'_2 = \overline{R}_1$. Следовательно, согласно (5) имеем $A \cap \overline{R}'_1 \cap \overline{R}'_2 \cap R'_3 = A \cap \overline{R}_1 \cap R_2 \notin \mathcal{D}, \dots, A \cap \overline{R}'_1 \cap \dots \cap \overline{R}'_n \cap R'_{n+1} = A \cap \overline{R}_1 \cap \dots \cap \overline{R}_{n-1} \cap R_n \notin \mathcal{D}$ и $A \cap \overline{R}'_1 \cap \dots \cap \overline{R}'_{n+1} = A \cap \overline{R}_1 \cap \dots \cap \overline{R}_n \notin \mathcal{D}$. Таким образом, множество A не удовлетворяет условию P_{n+1}. Получили противоречие. $\square$

Рассмотрим условие P_3. В определении этого условия присутствуют три множества R_1, R_2 и R_3 из $\mathcal{D}$. Покажем, что это условие эквивалентно другому, в котором присутствуют только два множества из $\mathcal{D}$. Нахождение такого нового условия позволяет более просто в конкретных случаях проверить, выполняется это условие или нет.

Покажем, что множество A удовлетворяет условию P_3 тогда и только тогда, когда не существует таких множеств $R_1, R_2 \in \mathcal{D}$, что $A \cap R_1 \cap R_2 \notin \mathcal{D}$, $A \cap R_1 \cap \overline{R}_2 \notin \mathcal{D}$, $A \cap \overline{R}_1 \cap R_2 \notin \mathcal{D}$ и $A \cap \overline{R}_1 \cap \overline{R}_2 \notin \mathcal{D}$.

($\Rightarrow$). Предположим, что существуют такие множества $R_1, R_2 \in \mathcal{D}$, что $A \cap R_1 \cap R_2 \notin \mathcal{D}$, $A \cap R_1 \cap \overline{R}_2 \notin \mathcal{D}$, $A \cap \overline{R}_1 \cap R_2 \notin \mathcal{D}$ и $A \cap \overline{R}_1 \cap \overline{R}_2 \notin \mathcal{D}$. Пусть $R'_1 = R_1 \cap R_2 \in \mathcal{D}$, $R'_2 = R_1 \in \mathcal{D}$ и $R'_3 = R_2 \in \mathcal{D}$, тогда $A \cap R'_1 = A \cap R_1 \cap R_2 \notin \mathcal{D}$, $A \cap \overline{R}'_1 \cap R'_2 = A \cap (\overline{R}_1 \cup R_2) \cap R_1 = A \cap R_1 \cap \overline{R}_2 \notin \mathcal{D}$, $A \cap \overline{R}'_1 \cap \overline{R}'_2 \cap R'_3 = A \cap \overline{R}_1 \cap R_2 \notin \mathcal{D}$ и $A \cap \overline{R}'_1 \cap \overline{R}'_2 \cap \overline{R}'_3 = A \cap \overline{R}_1 \cap \overline{R}_2 \notin \mathcal{D}$. Таким образом, множество A не удовлетворяет условию P_3. Получили противоречие.

($\Leftarrow$). Предположим, что множество A не удовлетворяет условию P_3, т. е. существуют такие множества $R_1, R_2, R_3 \in \mathcal{D}$, что $A \cap R_1 \notin \mathcal{D}$, $A \cap \overline{R}_1 \cap R_2 \notin \mathcal{D}$, $A \cap \overline{R}_1 \cap \overline{R}_2 \cap R_3 \notin \mathcal{D}$ и $A \cap \overline{R}_1 \cap \overline{R}_2 \cap \overline{R}_3 \notin \mathcal{D}$. Пусть $R'_1 = R_1 \cup (R_3 \cap \overline{R}_2) \in \mathcal{D}$ и $R'_2 = R_1 \cup R_2 \in \mathcal{D}$, тогда $A \cap R'_1 \cap R'_2 = A \cap R_1 \notin \mathcal{D}$, $A \cap \overline{R}'_1 \cap R'_2 = A \cap \overline{R}_1 \cap R_2 \notin \mathcal{D}$, $A \cap R'_1 \cap \overline{R}'_2 = A \cap \overline{R}_1 \cap \overline{R}_2 \cap R_3 \notin \mathcal{D}$ и $A \cap \overline{R}'_1 \cap \overline{R}'_2 = A \cap \overline{R}_1 \cap \overline{R}_2 \cap \overline{R}_3 \notin \mathcal{D}$. Получили противоречие.

Используя рассуждения, описанные выше для условия P_3, опишем все условия P_{2^n-1}. Пусть число n фиксировано, тогда для любого $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ сопоставим такую строку $\delta = \delta(k) =$

$\delta_n \dots \delta_1$ длины n, состоящую только из 0 и 1 (т. е. $\delta_i = 0$ или $= 1$ для $1 \leq i \leq n$), что $k = \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i \cdot 2^{i-1}$. Таким образом, чтобы получить δ, надо записать число k в двоичной системе счисления, затем добавить слева необходимое число нулей, чтобы длина δ стала равной n.

Пусть $R_1, \dots, R_n \in \mathcal{D}$, тогда определим множества $R_j^k \in \mathcal{D}$ следующим образом. Пусть $R_j^k = R_j$, если $\delta_j = 0$, и $R_j^k = \overline{R}_j$, если $\delta_j = 1$, для $1 \leq j \leq n$, а $\delta(k) = \delta_n \dots \delta_1$.

Теорема 8. *Пусть $\mathcal{D}$ — алгебра множеств и $A \notin \mathcal{D}$. Множество A удовлетворяет условию P_{2^n-1} тогда и только тогда, когда не существует таких множеств $R_1, \dots, R_n \in \mathcal{D}$, что $A \cap R_1^k \cap \dots \cap R_n^k \notin \mathcal{D}$ для любого $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$.*

Литература

1. Мальцев А.И. *Алгоритмы и рекурсивные функции.* – М.: Наука, 1986. – 367 с.
2. Soare R.I. *Recursively enumerable sets and degrees.* – Heidelberg: Springer-Verlag, 1987. – 243 p.
3. Дегтев А.Н. *Рекурсивно перечислимые множества и сводимости табличного типа.* – М.: Наука, 1998. – 176 с.
4. Гончаров С.С. *Счетные булевы алгебры и разрешимость.* – Новосибирск: Научная книга, 1996. – 364 с.

Казанский государственный университет

Поступила
09.09.2003