ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 1 (488)

УДК 517.9

П.П. ВОЛОСЕВИЧ, Е.И. ЛЕВАНОВ

АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПЕРЕНОСА С УЧЕТОМ В СРЕДЕ РЕЛАКСАЦИИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА И ОБЪЕМНЫХ ИСТОЧНИКОВ ЭНЕРГИИ

Исследование переноса тепла с помощью представления плотности теплового потока W в виде произведения градиента температуры T на коэффициент теплопроводности K_* (закон Фурье)

$$W = -K_* \operatorname{grad} T \tag{1}$$

не всегда применимо. Оно ограничено требованием малости длины и времени свободного пробега частиц по сравнению с характерными пространственно-временными масштабами изменения температуры.

Наряду с (1) известно гиперболическое уравнение теплопроводности вида

$$W = -K_* \operatorname{grad} T - \tau \frac{\partial W}{\partial t}, \tag{2}$$

где в правую часть входит производная от W по времени, τ — время релаксации плотности потока тепла. При постоянных значениях параметров K_* и τ модель (2) широко используется с давних времен во многих областях физики (см., напр., [1]–[3]). В работах [4]–[6] (см. также библиографию в них) анализ процессов теплопереноса с учетом релаксации теплового потока проводится в высокотемпературных средах с учетом нелинейной зависимости коэффициентов K_* и τ от термодинамических величин.

В данной статье перенос тепла с помощью представления потока тепла в виде (2) исследуется с учетом в среде объемных источников или стоков энергии.

Одним из отличительных свойств описания теплопереноса с использованием гиперболической модели (2) является наличие разрывных решений. Температура и плотность потока на фронте температурной волны имеют сильный разрыв.

Учет влияния объемных источников или стоков энергии вносит определенную специфику на характер распределения искомых величин.

1. Рассмотрим перенос тепла в неподвижной среде в приближении плоской симметрии. Пусть ρ — плотность среды. Выберем за пространственную координату переменную $m = \rho x$. Соответствующее уравнение энергии можно записать в виде

$$C_v \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial W}{\partial m} + Q, \tag{3}$$

где $C_v = \text{const}$ — теплоемкость среды, Q — либо объемный источник ($Q > 0$), либо сток ($Q < 0$) энергии. Изменение плотности потока тепла описывается уравнением

$$W = -K \frac{\partial T}{\partial m} - \tau \frac{\partial W}{\partial t}, \quad K = K_* \rho. \tag{4}$$

В общем случае параметры K, τ и Q являются функциями температуры, вид которых будет рассмотрен при конкретном решении задачи. При $\tau \equiv 0$ решение системы (3),(4) является непрерывным. При $\tau \neq 0$ функции T и W имеют сильный разрыв.

Для получения условий, которым должно удовлетворять искомое решение при переходе через сильный разрыв при произвольных выражениях функций τ и K, уравнение (4) можно представить, например, в виде

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\tau}{K}W\right) - \frac{W}{K} + W\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\tau}{K}\right). \tag{5}$$

Проинтегрируем уравнения (3) и (5) по малой, сжимающейся до нулевого объема области изменения независимых переменных (m, t), включающей в себя линию разрыва. Обозначим индексом "2" значения за фронтом разрыва, индексом "1" — значения впереди разрыва. Соответствующие алгебраические соотношения (аналог условий Гюгонио в газовой динамике) будут иметь вид

$$C_v(T_2 - T_1)D = -(W_1 - W_2), \tag{6}$$

$$T_1 - T_2 = -\left(\frac{\tau_2}{K_2}W_2 - \frac{\tau_1}{K_1}W_1\right)D, \tag{7}$$

где D – "массовая" скорость фронта разрыва.

Отметим, что при $\tau \equiv 0$ из (6), (7) автоматически получим непрерывность искомых функций на фронте волны $T_2 = T_1$, $W_2 = W_1$.

Сформулируем конкретную задачу. Предположим, что при граничном условии вида

$$T(0, t) = T_*(t) \tag{8}$$

в неподвижной среде распространяется классическая бегущая волна, т. е. искомые функции зависят от m и t в комбинации

$$F(m, t) = \widetilde{F}(y), \ y = Dt - m, \tag{9}$$

где $D = \mathrm{const}$ — скорость бегущей волны. Пусть при $t = 0$ и в случае $t > 0$ впереди фронта волны выполняются условия

$$T \equiv 0, \quad W \equiv 0. \tag{10}$$

Используя замену переменных (9) и опуская тильду у искомых функций, систему уравнений (3), (4) запишем в виде

$$C_vD\frac{dT}{dy} - \frac{dW}{dy} = Q, \tag{11}$$

$$\tau D\frac{dW}{dy} - K\frac{dT}{dy} + W = 0. \tag{12}$$

Так как система уравнений (11), (12) допускает инвариантное преобразование сдвига $y' = y + y_0$, где y_0 — постоянная, будем считать для определенности, что в переменных y фронт волны находится в точке $y = 0$ и, следовательно, определяется формулой $m = Dt$. Возмущенной области среды ($m < Dt$) соответствуют значения величин в интервале $y \geq 0$. Условия (10) должны выполняться при $y \leq 0$. В точке $y = 0$ искомые функции имеют сильный разрыв. Это значит, что в случае $\tau \neq 0$ при $y = 0$ температура и плотность должны удовлетворять не нулевым условиям (10), а соответствующим значениям за фронтом разрыва (6),(7). При "нулевом фоне" впереди разрыва (10) из (6), (7) получим

$$W(0) = W_2 = C_vDT_2, \quad T(0) = T_2 = \frac{\tau_2}{K_2}W_2D.$$

Подчеркнем следующее обстоятельство, которое является общим при решении краевых задач методом бегущих волн [7]–[10]. Координата, характеризующая положение поршня, определяется значением $m = 0$ и, следовательно, в переменных y — значением $y = Dt$. Отсюда можно сделать вывод, что функция (8), ответственная за образование впереди поршня бегущей волны, в общем случае определяется непосредственно из решения системы уравнений (11),(12) при соответствующих граничных условиях. Полагая $y = Dt$, функцию (8) можно записать в виде

$$T_*(t) = T(Dt).$$

Примеры конкретных решений исследуемой задачи рассмотрим, аппроксимируя параметры K, τ и Q степенными функциями температуры

$$K = K_0 T^a, \quad \tau = \tau_0 T^{a_1}, \quad Q = Q_0 T^{a_2}. \tag{13}$$

Пусть $a > 0$, $a_1 > 0$, $a_1 < a$, $a_2 > 0$. Для удобства исследования выберем за независимую переменную температуру T. Систему (11), (12) с учетом (13) можно записать в виде

$$\frac{dy}{dT} = \frac{K_0 T^a - \tau_0 C_v D^2 T^{a_1}}{-\tau_0 Q_0 D T^{a_1+a_2} + W}, \tag{14}$$

$$\frac{dW}{dT} = \frac{-K_0 Q_0 T^{a+a_2} + C_v D W}{-\tau_0 Q_0 D T^{a_1+a_2} + W}. \tag{15}$$

I) При $\tau_0 = 0$, $Q_0 \neq 0$ анализ рассматриваемого решения приведен в [10]. В окрестности точки $y = 0$ (фронт температурной волны), в которой искомые функции удовлетворяют нулевым условиям (10), асимптотическое решение системы (14), (15) с точностью до главных членов описывается формулами

$$W = C_v D T + \cdots, \quad y = \frac{K_0}{C_v D a} T^a + \cdots \tag{16}$$

Формулы (16) при $Q_0 = 0$ дают точное решение задачи во всей области $y \geq 0$ ([8], с. 59, 60).

а) При $Q_0 < 0$ (имеют место объемные потери энергии) с увеличением T функция W возрастает. Анализ показывает, что в случаях 1) $a_2 \leq a + 1$ имеем $y \to \infty$ при $T \to \infty$; 2) $a_2 > a + 1$ переменная y при $T \to \infty$ стремится к некоторому конечному значению $y = y_0$, $0 < y_0 < \infty$. Это означает, что в случае 1) искомое решение существует во всей области изменения независимой переменной $0 \leq y \leq \infty$ и, следовательно, при любом $t \geq 0$; в случае 2) рассматриваемое решение при $Q_0 < 0$ "метастабильно": решение существует лишь при $0 \leq y \leq y_0$, $y_0 \neq \infty$ и, следовательно, конечное время.

б) При $Q_0 > 0$ (источник энергии) анализ показывает [10], что независимо от соотношения между параметрами a и a_2 искомое решение типа классической бегущей волны существует лишь конечное время.

II) Пусть теперь $\tau_0 \neq 0$, $Q_0 \neq 0$.

а) При $Q_0 < 0$ из (15) следует, что производная $\frac{dW}{dT}$ всегда положительна: функция W возрастает с увеличением T. При этом, однако, начиная с некоторого значения температуры T возможна смена знака производной $\frac{dy}{dT}$, что будет означать переход через "точку поворота" кривой $y = y(T)$ и появление неоднозначности решения.

Непосредственная проверка показывает, что при $y = 0$, $T = T_2$ имеем $K_0 T_2^a - \tau_0 C_v D^2 T_2^{a_1} = 0$ и, следовательно, $\left.\frac{dy}{dT}\right|_{y=0,\, T=T_2} = 0$.

Рассмотрим уравнение (14) в ближайшей окрестности $T = T_2$, $y = 0$. Пусть $T = T_2 + \widetilde{T}$, где $\widetilde{T}$ — малая величина. Из (14) после преобразований и соответствующего интегрирования получим

$$y = \frac{1}{2} G_0 \widetilde{T}^2 + \cdots, \tag{17}$$

где $G_0 = \frac{(a-a_1) K_0 T_2^{a-1}}{C_v D T_2^2 - \tau_0 Q_0 D T_2^{a+a_1}} > 0$ — постоянная. Из (17) следует, что в окрестности $y = 0$ с ростом T увеличивается переменная y. Дальнейшее распределение искомых величин зависит от соотношения между показателями зависимости от температуры параметров K, τ и Q_0. В случаях 1) $a + 1 - 2a_1 - a_2 < 0$ искомое решение существует лишь на конечном интервале

$0 \le y \le y_0$ и, следовательно, конечное время; 2) $a+1-2a_1-a_2 \ge 0$ при $T \to \infty$ получаем $y \to \infty$: решение рассматриваемой задачи существует при любом $0 \le y \le \infty$, т. е. любом $t \ge 0$.

б) При $Q_0 > 0$ анализ показывает, что характер решения рассматриваемой задачи определяет качественная картина распределения интегральных кривых уравнения (15) в плоскости (T, W).

Уравнение (15) имеет две особые точки. Точка $O(0,0)$ является седлом: единственными кривыми (сепаратриссами), проходящими через O, являются кривые, образующие тривиальное решение уравнения $T \equiv 0$, $W \equiv 0$. Особая точка $E(T_K, W_K)$ имеет следующие координаты:

$$T = T_K = (\tau_0 C_v D^2/K_0)^{\frac{1}{a-a_1}}, \quad W = W_K = \tau_0 Q_0 D T_2^{a_1+a_2}.$$

Непосредственная проверка показывает, что значение координаты $T = T_K$ совпадает со значением температуры за фронтом разрыва в точке $y = 0$: $T_K = T_2 = \frac{\tau_2}{K_2} W_2 D = (\tau_0 C_v D^2/K_0)^{\frac{1}{a-a_1}}$. Для каждых заданных W_2 и T_2 при фиксированных значениях параметров C_v и D прямая $W_2 = C_v D T_2$ в плоскости (T, W) обязательно пересекается с прямой $T = T_2$. Значение координаты W_2 может находиться выше или ниже W_K, возможно также $W_2 = W_K$.

Положим $T = T_K + \widetilde{T}$, $W = W_K + \widetilde{W}$, где $\widetilde{T}$ и $\widetilde{W}$ — малые величины. Линеаризируя уравнение (15) в окрестности особой точки $E(T_K, W_K)$, получим

$$\frac{d\widetilde{W}}{d\widetilde{T}} = \frac{-K_0 Q_0 (a+a_2) T_K^{a+a_2-1} \widetilde{T} + C_v D \widetilde{W}}{-\tau_0 Q_0 D (a_1+a_2) T_K^{a_1+a_2-1} \widetilde{T} + \widetilde{W}}. \tag{18}$$

Анализ решения уравнения (18) показывает, что в зависимости от значений параметров задачи особая точка $E(T_K, W_K)$ может быть либо узлом, либо фокусом. В обоих случаях ветви интегральных кривых в плоскости (T, W), соответствующие решению нашей задачи, будут иметь "похожий" качественный характер. Действительно, каждая из интегральных кривых $W = W(T)$, выходя, например, из заданной точки $A = A(T_2, W_2^{(1)})$, где начальное значение плотности потока тепла $W_2^{(1)}$ удовлетворяет условию $W_2^{(1)} > W_K$ (точка A расположена выше особой точки E), или из точки $A' = A'(T_2, W_2^{(2)})$, где $W_2^{(2)} < W_K$ (точка A' находится ниже точки E), или, наконец, при дальнейшем возрастании T обязательно в некоторой точке пересечет изоклину бесконечностей, где $W_2^{(2)} = W_K$. Очевидно, что точки пересечения будут являться "точками поворота" рассматриваемых интегральных кривых $W = W(T)$: решение окажется неоднозначным. Неоднозначным при дальнейшем изменении T окажется и решение уравнения (14), определяющее изменение функции $y = y(T)$. Следовательно, при $Q_0 > 0$ искомое решение аналогично случаю $\tau \equiv 0$ при любом соотношении между параметрами a, a_1 и a_2 существует лишь на конечном интервале изменения независимой переменной y, $0 \le y \le y_0$, $0 < y_0 < \infty$, т. е. конечное время.

2. Рассмотрим теперь примеры переноса тепла механизмом гиперболической теплопроводности с учетом движения (скорость v не тождественно равна нулю). Для этого рассмотрим уравнения газовой динамики в приближении плоской симметрии и предположим справедливыми уравнения состояния идеального газа $p = R\rho T$, $\varepsilon = (RT)/(\gamma - 1)$, где p — давление, ε — удельная внутренняя энергия, ρ — плотность среды, $R = (\gamma-1)C_v$ — газовая постоянная, γ — постоянное отношение удельных теплоемкостей. В массовых переменных Лагранжа m и t упомянутая выше система будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\partial v}{\partial m}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial m}, \quad \frac{R}{\gamma-1}\frac{\partial T}{\partial t} = -p\frac{\partial v}{\partial m} - \frac{\partial W}{\partial m} + Q, \quad W = -K\frac{\partial T}{\partial m} - \tau\frac{\partial W}{\partial t}. \tag{19}$$

Система (19) допускает разрывные решения, и при $\tau \not\equiv 0$ сильные разрывы должны иметь не только газодинамические, но и тепловые величины T и W.

При обозначениях, аналогичных изложенным выше, алгебраические соотношения на фронте сильного разрыва можно записать в виде

$$D\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_1}\right)=v_1-v_2, \tag{20}$$

$$D(v_2-v_1)=-p_1+p_2=-R\rho_1T_1+R\rho_2T_2, \tag{21}$$

$$D\left[\frac{R}{\gamma-1}(T_2-T_1)+\frac{1}{2}(v_2^2-v_1^2)\right]=-p_1v_1-W_1+p_2v_2+W_2, \tag{22}$$

$$T_1-T_2=-\left(\frac{\tau_2}{K_2}W_2-\frac{\tau_1}{K_1}W_1\right)D. \tag{23}$$

Заметим, что при $\tau\equiv 0$, используя (23), непосредственно из (20)–(22) получим соотношения, справедливые для изотермического разрыва ([8], с. 20; [9], с. 54),

$$T_2=T_1,\quad \frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{D^2}{RT_1\rho_1^2},\quad v_2=v_1+\frac{D}{\rho_1}\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right),\quad W_2=W_1-\frac{1}{2}\frac{D^3}{\rho_1^2}\left[1-\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\right].$$

Пусть $\tau\not\equiv 0$. Выпишем условия на разрыве для случая, когда впереди разрыва искомые функции имеют нулевые значения, полагая при этом $\rho_1=\rho_0$, где ρ_0 — начальная плотность среды,

$$v_1=0,\quad T_1=0,\quad W_1=0,\quad \rho_1=\rho_0,\quad p_1=0. \tag{24}$$

Из (20)–(22) получим с учетом (24)

$$\begin{gathered}v_2=\frac{D}{\rho_0}\left(1-\frac{\rho_0}{\rho_2}\right),\quad T_2=\frac{p_2}{R\rho_2}=\frac{1}{R}\frac{D^2}{\rho_0^2}\frac{\rho_0}{\rho_2}\left(1-\frac{\rho_0}{\rho_2}\right),\\ W_2=\frac{D^3}{2\rho_0^2}\left(1-\frac{\rho_0}{\rho_2}\right)\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{\rho_0}{\rho_2}-1\right),\quad T_2=\frac{\tau_2}{K_2}W_2D.\end{gathered} \tag{25}$$

Используя формулы (25), определим отношение плотностей на фронте разрыва при $\tau_2\neq 0$

$$\frac{\rho_2}{\rho_0}=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}-\frac{2K_2}{R\tau_2D^2}. \tag{26}$$

Разрыв должен быть волной сжатия: $\rho_2>\rho_0$. В этом случае из (26) получим $D>\sqrt{\frac{(\gamma-1)K_2}{R\tau_2}}$. Правая часть в последнем неравенстве представляет собой известную массовую скорость распространения тепла C_T в случае релаксации теплового потока $\tau\neq 0$

$$C_T=\sqrt{\frac{(\gamma-1)K}{R\tau}}.$$

Из предыдущего неравенства следует, что скорость разрыва больше скорости C_{T_2} за своим фронтом. С другой стороны, что следует из соображений эволюционности сильного разрыва, скорость фронта разрыва должна быть меньше скорости звука за своим фронтом, т. е. $D<C_2=\sqrt{RT_2}\cdot\rho_2$.

Сформулируем теперь автомодельную задачу о поршне в предположении, что параметры K, τ, Q являются степенными функциями температуры и плотности

$$K=K_0T^a\rho^{b+1},\quad \tau=\tau_0T^{a_1}\rho^{b_1},\quad Q=Q_0T^{a_2}\rho^{b_2}$$

при условиях $a>0$, $a>a_1>0$, $a_2>0$.

Пусть тепловой режим на поршне и скорость поршня, заданные в плоскости $m=0$, имеют вид

$$T(0,t)=T_0t^{n_0},\quad v(0,t)=v_0t^{n_1}. \tag{27}$$

Анализ размерностей показывает, что решение рассматриваемой задачи является автомодельным, если выполняются соотношения [6]

$$n_1 = 0.5n_0, \quad a = 1 + \frac{1}{n_0}, \quad a_1 = \frac{1}{n_0}, \quad a_2 = 1 - \frac{1}{n_0}, \quad n_0 \neq 0. \tag{28}$$

При выполнении условий (28) исходную систему в частных производных (19) заменой переменных вида

$$\begin{gathered} s = \frac{m}{\rho_0 \sqrt{RT_0}\, t^n}, \quad \alpha(s) = \frac{v(m,t)}{\sqrt{RT_0}\, t^{0.5n_0}}, \quad \delta(s) = \frac{\rho(m,t)}{\rho_0}, \quad f(s) = \frac{T(m,t)}{T_0 t^{n_0}}, \\ \beta(s) = \delta(s) f(s) = \frac{p(m,t)}{\rho_0 R T_0 t^{n_0}}, \quad \omega(s) = \frac{W(m,t)}{\rho_0 \sqrt{RT_0}\, RT_0 t^g}, \end{gathered} \tag{29}$$

где $n = 0.5n_0 + 1$, $g = 1.5n_0$, можно свести к соответствующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно s. После преобразований, обозначая производную по s штрихом, указанную систему представим в виде

$$\begin{gathered} \alpha' = \frac{ns}{\delta^2}\delta', \quad \beta' = -0.5n_0\alpha + \frac{n^2 s^2}{\delta^2}\delta', \quad \omega' = \frac{1}{\gamma - 1}[-n_0 f + nsf'] + (\gamma - 1) f \frac{ns}{\delta}\delta' + \widetilde{Q}, \\ f' = \frac{\widetilde{\tau}\left(1.5n_0\omega + \frac{n_0 ns}{\gamma-1} f - ns\widetilde{Q}\right) + \omega + \frac{n^2 s^2 \widetilde{\tau}}{\delta} f \delta'}{\widetilde{K}\left(\frac{n^2 s^2}{\widetilde{C}_T^2} - 1\right)}, \quad \delta' = \psi/\Delta, \\ \text{где} \quad \psi = -\delta^2\left[0.5n_0\alpha\widetilde{K}\left(\frac{n^2 s^2}{\widetilde{C}_T^2} - 1\right) + \delta\widetilde{\tau}\left(1.5n_0\omega + \frac{n_0 ns}{(\gamma - 1) f} - ns\widetilde{Q}\right) + \widetilde{\delta}\omega\right], \\ \Delta = \widetilde{K}\left(\frac{n^2 s^2}{\widetilde{C}_T^2} - 1\right)(\delta^2 f - n^2 s^2) + n^2 s^2 \widetilde{\tau}\delta^2 f, \end{gathered} \tag{30}$$

$$\widetilde{K} = \widehat{K}_0 f^a \delta^{b+1}, \quad \widetilde{\tau} = \widehat{\tau}_0 f^{a_1}\delta^{b_1}, \quad \widetilde{Q} = \widehat{Q}_0 f^{a_2}\delta^{b_2}, \quad \widetilde{C}_T = \sqrt{\frac{(\gamma-1)\widetilde{K}}{\widetilde{\tau}}}.$$

Безразмерные постоянные $\widehat{K}_0$, $\widehat{\tau}_0$ и $\widehat{Q}_0$ определяются формулами: $\widehat{K}_0 = K_0 R^{-2} T_0^{a-1}\rho_0^{b-1}$, $\widehat{\tau}_0 = \tau_0 T_0^{a_1}\rho_0^{b_1}$, $\widehat{Q}_0 = Q_0 R^{-1} T_0^{a_2 - 1}\rho_0^{b_2}$. В переменных (29) граничные условия поршня (27) при $s = 0$ будут иметь вид

$$f(0) = 1, \quad \alpha(0) = \alpha_0 = v_0/(\sqrt{RT_0}).$$

Условия "начального фона" (24) должны выполняться в некоторой конечной точке $s = s_0$, $0 < s_0 < \infty$, впереди фронта разрыва

$$\alpha(s_0) = 0, \quad f(s_0) = 0, \quad \beta(s_0) = 0, \quad \omega(s_0) = 0, \quad \delta(s_0) = 1. \tag{31}$$

Искомые функции при $s = s_0$ должны удовлетворять своим значениям позади фронта разрыва. В переменных (29) эти условия имеют вид

$$\begin{gathered} \alpha(s_0) = \alpha_2 = ns_0(1 - 1/\delta_2), \quad \beta(s_0) = \beta_2 = n^2 s_0^2 (1 - 1/\delta_2), \\ f(s_0) = \beta_2/\delta_2, \quad \omega(s_0) = \omega_2 = \frac{1}{2} n^3 s_0^3 (1 - 1/\delta_2)\left[\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)/\delta_2 - 1\right], \\ \delta(s_0) = \delta_2 = \frac{1}{\gamma - 1}\left(\gamma + 1 - 2\frac{\widetilde{C}_{T_2}^2}{n^2 s_0^2}\right), \quad \widetilde{C}_T = \sqrt{(\gamma - 1)\frac{\widehat{K}_0}{\widehat{\tau}_0} f^{a-a_1}\delta^{b+1-b_1}}. \end{gathered}$$

На фронте температурной волны, расположенной в конечной точке $s = s_0$, $0 < s_0 < \infty$, искомые величины имеют сильный разрыв.

По аналогии со случаем $\tau \equiv 0$ [8], [9] можно оценить возможный качественный характер общей структуры рассматриваемой задачи.

Исходя из свойств искомых величин при переходе через сильный разрыв, имеем $ns_0 > \widetilde{C}_{T_2}$, $\widetilde{C}_2 = \delta_2\sqrt{f_2} > ns_0$, и, следовательно, в точке $s = s_0$ выполняется условие $\Delta(s_0) > 0$. (В частности, при $\tau \equiv 0$ получим $\Delta = \widetilde{K}(n^2s^2 - \delta^2 f)$ и, следовательно, $\Delta(s_0) > 0$ при $f(s_0) = 0$.) На поршне получим $\Delta(0) = -\delta^2 f\widetilde{K} < 0$. По гипотетическому предположению (подтвержденному многими численными расчетами) решение в области $0 < s < s_0$ непрерывно, тогда существует точка $s = s_K$, в которой $\Delta(s_K) = 0$, но $\psi(s_K) \neq 0$. Анализ показывает, что эта точка есть точка поворота интегральной кривой $\delta = \delta(s)$ и других искомых величин. При дальнейшем изменении s решение окажется неоднозначным.

Поэтому можно сделать вывод, что в области $0 < s < s_0$ должен существовать разрыв. Разрыв расположен в некоторой точке $s = s_1 \neq s_K$, $0 < s_1 < s_0$. При $\tau \equiv 0$ этот разрыв является изотермическим, находящимся в глубине фронта непрерывной температурной волны, движущейся по фону (31). В рассматриваемом случае, когда $\tau \not\equiv 0$, будет иметь место второй "внутренний" разрыв газодинамических и тепловых величин. Значение координаты $s = s_1$, характеризующей положение фронта внутреннего разрыва, так же, как и значение координаты $s = s_0$, характеризующей положение разрыва фронта «передней» температурной волны, заранее неизвестны. Они являются параметрами, которые определяются непосредственно из решения рассматриваемой задачи.

Литература

1. Осокин А.Е., Суворов Ю.В. *Некоторые задачи теплопроводности для наследственно-упругих материалов* // Изв. АН СССР. Машиноведение. – 1983. – № 1. – С. 82–87.
2. Хонькин А.Д. *О парадоксе бесконечной скорости распространения возмущений в гидродинамике вязкой теплопроводной среды и уравнениях гидродинамики быстрых процессов* // Аэромеханика. – М.: Наука, 1976. – С. 289–299.
3. Гутфельд Р. *Распространение тепловых импульсов* // Физ. акустика. Под ред. У. Мезона. – М.: Мир, 1973. – Т. 5. – С. 267–329.
4. Косарев В.И., Леванов Е.И., Сотский С.Н. *Об одном способе описания процесса электронной теплопроводности в высокотемпературной плазме* / ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. Препринт № 142. – М., 1981. – 25 с.
5. Леванов Е.И., Сотский С.Н. *Теплоперенос с учетом релаксации теплового потока* // Матем. моделир. Нелинейные дифференц. уравнения матем. физ. – М.: Наука, 1987. – С. 155–190.
6. Леванов Е.И. *Теплоперенос с учетом релаксации теплового потока и источников (стоков) энергии* // Матем. моделир. – 1997. – Т. 9. – № 2. – С. 53–56.
7. Самарский А.А., Курдюмов С.П., Волосевич П.П. *Бегущие волны в среде с нелинейной теплопроводностью* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1965. – Т. 5. – № 2. – С. 199–217.
8. Волосевич П.П., Леванов Е.И. *Автомодельные решения задач газовой динамики и теплопереноса.* – М.: Изд-во МФТИ, 1997. – 240 с.
9. Волосевич П.П., Леванов Е.И., Фетисов С.А. *Автомодельные решения задач нагрева и динамики плазмы.* – М.: Изд-во МФТИ, 2001. – 256 с.
10. Волосевич П.П., Ларионов Е.А., Леванов Е.И. *Бегущие тепловые волны в высокотемпературной среде* // Тр. 4-й международн. конф. по матем. моделированию / Под ред. Л.А. Уваровой. – М.: Изд-во "Станкин", 2001. – Т. 1. – С. 112–120.

Институт математического моделирования
Российской Академии наук

Поступила
25.06.2002