ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 9 (484)

УДК 512.554

Ю.Б. ЕРМОЛАЕВ

О ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ ЛИЕВЫХ СЛОВ В КЛАССИЧЕСКИХ АЛГЕБРАХ ЛИ

1. *Формулировка основных результатов.* Под корневой системой R будем понимать только *приведенную* систему с неделимыми корнями (см. [1]).

Пусть R — корневая система ранга r в евклидовом пространстве E со скалярным произведением $(\cdot \mid \cdot)$, $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ — некоторая ее подсистема простых корней и $R = R^+ \cup R^-$ — разбиение R на отрицательную и положительную части относительно Π.

Алгебру Ли $L = L^+$ над произвольным полем K назовем *алгеброй типа* R^+, если она имеет разложение

$$L = \bigoplus_{\alpha \in R^+} L_\alpha,$$

удовлетворяющее условиям

1) $\dim L_\alpha \geq 1 \quad \forall \alpha \in R^+$;

2) $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta} \quad \forall \alpha, \beta \in R^+$ ($[L_\alpha, L_\beta] = 0$, если $\alpha + \beta \notin R$);

3) $\dim L_i = 1$ и L порождена подпространством $\oplus_{i=1}^r L_i$, где $L_i = L_{\alpha_i}$, $i = 1, \dots, r$.

Аналогично, используя R^- вместо R^+, можно определить алгебру Ли L^- типа R^- над K.

Пусть L — алгебра Ли над полем K типа R^+. Для каждого простого корня $\alpha_i \in \Pi$ выберем и зафиксируем некоторый ненулевой вектор f_i корневого подпространства: $L_i = K f_i$, $i = 1, \dots, r$.

Пусть $a = (i_1, i_2, \dots, i_m)$, $1 \leq i_s \leq r$, — упорядоченная последовательность индексов; через φ_a будем обозначать вес $\varphi_a = \alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_m}$ (определяемый a), а через f_a — элемент[1]

$$f_a = f_{i_1, i_2, \dots, i_m} = [f_{i_1}, f_{i_2}, f_{i_3}, \dots, f_{i_m}].$$

Последовательность $a = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ назовем *правильной*, если $\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_s} \in R$ для всякого $s = 1, \dots, m$. По определению алгебры Ли типа R^+ имеем $f_a = 0$, если a не является правильной, и (если для данных R и K алгебра типа R^+ существует) для каждого $\varphi \in R^+$ корневое подпространство L_φ линейно порождается элементами f_a, у которых a — правильная последовательность такая, что $\varphi_a = \varphi$.

Множеству $R^0 = R \cup \{0\}$ сопоставим ориентированный граф с раскрашенными (посредством индексов $1 \leq i \leq r$) дугами следующим образом: вершины графа отождествим с элементами R^0, две вершины α и β соединим дугой с началом α, концом β и индексом i тогда и только тогда, когда $\beta = \alpha + \alpha_i$. Полученный граф назовем *схемой корневой системы* R *относительно* Π.[2] Будем рассматривать только ту часть такой схемы, вершины которой состоят из весов $R^+ \cup \{0\}$ (остальная, отрицательная, часть симметрична положительной относительно 0 с изменением направления стрелок). Каждую правильную последовательность $a = (i_1, \dots, i_m)$ будем отождествлять с путем от 0 до φ_a по дугам в положительном направлении и с номерами в порядке, заданном a. В качестве примера приведем схемы для B_4, C_4 и F_4 (рис. 1, 2 и 3 соответственно).

---

[1] Здесь и всюду ниже для право-направленных лиевых слов используем обозначение $[x_1, x_2, x_3, \dots, x_m] = [\dots[[x_1, x_2], x_3], \dots, x_m]$.

[2] Вместо "корневой системы" точнее было бы сказать "весовой системы присоединенного представления"; аналогичный граф можно определить для весовой системы с любым старшим весом.

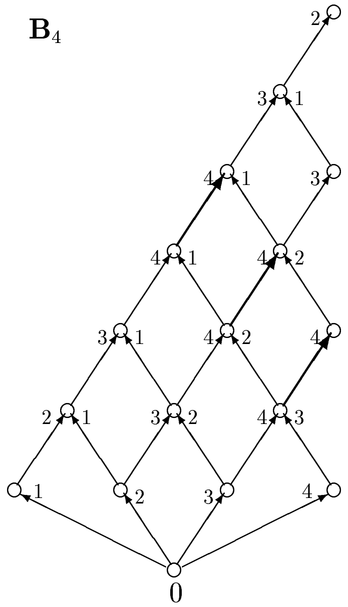

Рис. 1

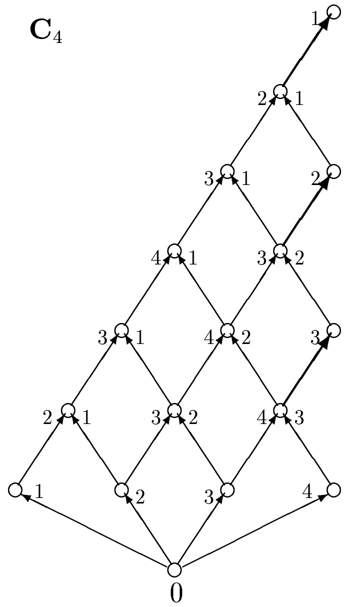

Рис. 2

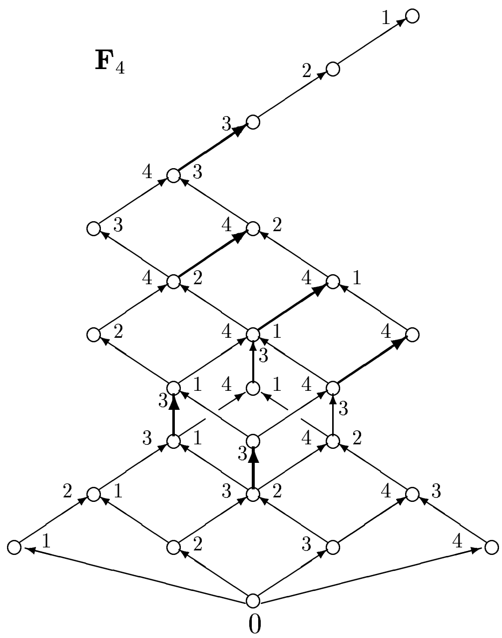

Рис. 3

Дугу в схеме корней назовем *особой*, если соответствующий ей простой корень (т. е. с тем же номером) ортогонален корню, из которого исходит данная дуга. В приведенных схемах особые дуги изображаются жирными стрелками. Соответственно, в правильной последовательности $a = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ индекс i_t, $t = 3, \dots, m$, назовем *особым*, если он удовлетворяет условию $(\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_{t-1}} \mid \alpha_{i_t}) = 0$. Обозначим через $u(a)$ число особых индексов в последовательности a.

Если корневая система R не распадается (т. е. неприводима по [1]), то для $1 \le i, j \le r$ через $d(i,j)$ обозначим расстояние между вершинами α_i и α_j (по кратчайшему пути) в схеме Дынкина, так что $d(i,i) = 0$ и $d(i,j) = 1$, если $(\alpha_i \mid \alpha_j) \ne 0$.

Правильный путь назовем *регулярным*, если среди путей, определяющих тот же корень, он содержит минимальное число особых дуг. Очевидно, регулярный путь до любого корня $\alpha \in R^+$ всегда существует.

Главным результатом данной работы является

Теорема 1. *Пусть R — неприводимая корневая система ранга r, L — алгебра Ли типа R^+ над произвольным полем K и $f_1, \dots, f_r$ — ее образующие элементы ($L_i = Kf_i$). Если $\operatorname{char} K = p \neq 2$, то для любых двух правильных путей $a = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ и $b = (j_1, j_2, \dots, j_m)$, определяющих один корень (т. е. $\varphi_a = \varphi_b$), в L имеет место равенство*

$$2^{-u(a)} f_a = (-1)^{d(i_1, j_1)}\, 2^{-u(b)} f_b \tag{1}$$

или, когда a — регулярный путь,

$$f_b = (-1)^{d(i_1, j_1)}\, 2^{u(b)-u(a)} f_a. \tag{2}$$

Последнее равенство справедливо и в случае $p = 2$. В частности, в любом случае для всех $\alpha \in R^+$ имеем $\dim L_\alpha = 1$.

Замечание 1. В формулировке теоремы 1 можно не требовать неприводимости R, т. к. правильные пути могут содержать индексы простых корней, принадлежащих только одному неприводимому слагаемому R.

Замечание 2. В схемах корневых систем A_r, D_r, E_r и G_2 особых дуг нет, т. е. имеем $u(a) = 0$ для любого правильного a. В случае B_r (и C_2) для любых двух правильных путей a, b, сходящихся в одном корне, имеем $u(a) = u(b)$ ($= 0$ или 1). Таким образом, множитель 2^u в (2) присутствует только при $R = C_r$, $r \geq 3$, и $R = F_4$.

Приведем несколько следствий, которые легко получаются из (1).

Следствие 1. Если в условиях теоремы 1 $p \neq 2$, то $f_a \neq 0$ тогда и только, когда a — правильная последовательность. Если $p = 2$, то $f_a \neq 0$ тогда и только тогда, когда a — регулярный путь, и для двух регулярных путей a и b, определяющих один корень, формула (2) принимает вид $f_a = f_b$.

Таким образом, если a — регулярный путь, то $f_a \neq 0$ при любой характеристике поля K.

Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x_1, \dots, x_r)$ — свободная алгебра Ли над полем K, порожденная $x_1, \dots, x_r$, и Q^+ — полугруппа в группе Q радикальных весов корневой системы R, порожденная Π, т. е. $Q^+ = \{k_1\alpha_1 + \dots + k_r\alpha_r \mid k_i \in \mathbb{Z},\ k_i \geq 0\}$. Имеем градуировку $\mathcal{L} = \bigoplus\limits_{\alpha \in Q^+} \mathcal{L}_\alpha$, где для $\alpha = k_1\alpha_1 + \dots + k_r\alpha_r \in Q^+$ подпространство $\mathcal{L}_\alpha$ порождено лиевыми словами состава $(k_1, \dots, k_r)$ и $\mathcal{L}_0 = 0$. Правонаправленное лиево слово $x_a = [x_{i_1}, \dots, x_{i_s}]$ назовем *правильным* (соответственно *регулярным*), если правильной (соответственно регулярной) является последовательность $a = (i_1, \dots, i_s)$, и лиево слово x_a назовем *граничным*, если оно неправильное, но слово $[x_{i_1}, \dots, x_{i_{s-1}}]$ является правильным. Пусть $\mathcal{J}$ — идеал в $\mathcal{L}$, порожденный всеми граничными словами и $L^K = L^K(R) = \mathcal{L}/J$. Идеал $\mathcal{J}$ является однородным относительно Q^+, т. к. однородны образующие. Поэтому на L^K индуцируется градуировка $L^K = \bigoplus\limits_{\alpha \in R^+} \mathcal{L}^K_\alpha$.

Следствие 2. 1. Алгебра Ли L^K является алгеброй типа R^+.

2. При обозначениях теоремы 1 для любых правильных слов $x_a, x_b \in \mathcal{L}_\alpha$, $\alpha \in R^+$ имеем

$$2^{-u(a)} x_a - (-1)^{d(i_1, j_1)}\, 2^{-u(b)} x_b \in \mathcal{J}.$$

3. Для произвольной корневой системы R и любого поля K алгебра типа R^+ существует и с точностью до изоморфизма определена однозначно.

Пусть $R^0 = R \cup \{0\}$; под алгеброй Ли *типа* R над произвольным полем K будем понимать градуированную по R^0 алгебру[1]

$$L = \bigoplus_{\alpha \in R^0} L_\alpha, \tag{3}$$

в которой подалгебры $L^- = \bigoplus\limits_{\alpha \in R^-} L_\alpha$ и $L^+ = \bigoplus\limits_{\alpha \in R^+} L_\alpha$ являются алгебрами типа R^- и R^+ соответственно, а $L_0 = H$ линейно порождена элементами $[L_{-\alpha_i}, L_{\alpha_j}]$, $i, j = 1, \ldots, r$. Кроме того, будем предполагать, что H не содержит ненулевых элементов, действующих как 0 на L^- и L^+, и потому коммутативна (т. к. для любых $u_\alpha \in L_\alpha$, $\alpha \in R$ и $h, h' \in H$ имеем $[u_\alpha, [h, h']] = 0$).

Образующие подалгебр L^- и L^+ будем обозначать через $e_1, \ldots, e_r$ и $f_1, \ldots, f_r$ соответственно, т. е. $L_{-i} = L_{-\alpha_i} = Ke_i$, $L_i = L_{\alpha_i} = Kf_i$, $i = 1, \ldots, r$. В силу градуировки (3)

$$[e_i, h_j] = -a_{ij} e_i, \quad [f_i, h_j] = a_{ij} f_i, \quad [e_i, f_j] = -\delta_{ij} h_j, \quad i, j = 1, \ldots, r, \tag{4}$$

где $A = (a_{ij})$ — некоторая $r \times r$-матрица над K, а $h_1, \ldots, h_r$ — линейные образующие H.

Теорема 2. *Пусть R — неразложимая корневая система. Алгебра $L = L^- \oplus H \oplus L^+$ является алгеброй типа R тогда и только тогда, когда матрица A имеет вид $A = C'T$, где $C' = (c'_{ij})$ — приведенная матрица Картана (над $\mathbb{Z}$) системы R, а $T = \operatorname{diag}\{\theta_1, \ldots, \theta_r\}$ — диагональная матрица над K (и, следовательно, $a_{ij} = \theta_j \otimes c'_{ij} = \theta_j c'_{ij} \in K$). Исключение составляет случай, когда $R = B_2$ (или C_2) и характеристика поля K равна 3, в котором 2×2-матрица A имеет вид*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \nu \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

для любых $\nu, \theta_1, \theta_2 \in K$.

Под *приведенной матрицей Картана* понимаем матрицу $C' = (c'_{ij})$, $c'_{ij} = c_{ij}/\delta_j$, где $\delta_j = (c_{1j}, \ldots, c_{rj})$ — наибольший общий делитель всех элементов j-го столбца в обычной матрице Картана $C = (c_{ij})$, $c_{ij} = \frac{2(\alpha_i|\alpha_j)}{(\alpha_j|\alpha_j)}$. При этом $\delta_j \neq 1$ только в случае, когда $R = B_r$ и $j = r$ (при $(\alpha_r \mid \alpha_r) < (\alpha_i \mid \alpha_i)$ для $i < r$), и введение C' вместо C имеет смысл только при $\operatorname{char} K = 2$.

Если $\theta_i = 0$ и R' — множество корней $\gamma = m_1\alpha_1 + \cdots + m_i\alpha_i + \cdots + m_r\alpha_r \in R$, у которых $m_i \neq 0$, то подалгебра $I = \oplus_{\gamma \in R'} L_\gamma$ является идеалом в L и L/I — алгебра Ли типа $R \setminus R'$. Поэтому естественно наложить на алгебры Ли типа R еще требование $\det T \neq 0$.

Следствие 3. Алгебра Ли типа R с условием $\det T \neq 0$ с точностью до изоморфизма определена однозначно (для данных R и K) за исключением случая $R = C_2$, $p = 3$, когда имеется параметрическое семейство алгебр (см. [2] и [3]).

Именно эта однозначность служит оправданием требования $\det T \neq 0$, накладываемого на алгебры типа R. Если потребовать только корневое разложение по R, то в малых характеристиках однозначности в общем случае не будет.

Базис $\{y_\beta,\ \beta \in R^+\}$ алгебры Ли типа R^+ назовем *регулярным*, если $y_\beta = f_b$, где b — регулярный путь для всех $\beta \in R^+$. Базис $\{x_\alpha,\ \alpha \in R^-;\ h_i,\ i = 1, \ldots, r;\ y_\beta,\ \beta \in R^+\}$ алгебры Ли типа R назовем *регулярным*, если он составлен из регулярных базисов L^- и L^+ (т. е. $x_\alpha = e_a$, где e_a определен так же, как и f_a с заменой f_i на e_i), а $h_i = [e_i, f_i]$, $i = 1, \ldots, r$. Регулярные базисы определяются с точностью до выбора регулярных путей a, b для каждого α, β соответственно, т. е. в силу (2) с точностью до знаков.

Следствие 4. Регулярный базис в алгебрах Ли типа R^+ и R над полем характеристики 0 является целочисленным (т. е. все его структурные константы лежат в $\mathbb{Z}$).

---

[1] Точнее, по группе радикальных весов $Q = Q(R)$ с носителем R^0.

Заметим, что в общем случае регулярный базис не совпадает с базисом Шевалле и редукции к полям малых характеристик относительно этих базисов могут приводить к неизоморфным алгебрам[1]. Существуют и другие целочисленные базисы, которые приводят к другим неизоморфным алгебрам, но перечисление получаемых таким образом возможностей требует отдельного рассмотрения.

2. *Некоторые свойства корневой системы.* Будем обозначать через $\theta_{\alpha\beta}$ угол между векторами α и β в E ($\theta_{\alpha\beta} \le \pi$) и, если R' — произвольное подмножество в корневой системе R, то $R_0 = \langle R' \rangle_{\mathbb{Z}} \cap R$ будем называть *подсистемой в R, порожденной R'.*

Лемма 1. *Пусть α, β, γ — корни из R такие, что все $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$, $\alpha+\beta+\gamma$ принадлежат R. Тогда*

1) $\{\theta_{\alpha\beta}, \theta_{\beta\gamma}, \theta_{\gamma\alpha}\} = \{\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\}$;
2) *если $\theta_{\gamma\alpha} = \frac{\pi}{2}$, то при соответствующей нормировке имеем*

$$(\alpha \mid \alpha) = (\beta \mid \beta) = (\gamma \mid \gamma) = 1, \tag{6}$$

$$(\alpha \mid \gamma) = 0, \quad (\alpha \mid \beta) = (\beta \mid \gamma) = -\frac{1}{2}; \tag{7}$$

3) *корневая подсистема R_0 в R, порожденная α, β, γ, имеет тип C_3 и (при $\theta_{\gamma\alpha} = \frac{\pi}{2}$) состоит из корней*

$$\pm\alpha,\ \pm\beta,\ \pm\gamma,\ \pm(\alpha+\beta),\ \pm(\alpha+\gamma),\ \pm(\beta+\gamma),\ \pm(\alpha+\beta+\gamma),\ \pm(-\alpha+\gamma),\ \pm(\alpha+2\beta+\gamma); \tag{8}$$

4) *в частности,*

$$\psi = \gamma - \alpha \in R, \quad a \quad \psi+\beta,\ 2\alpha+\beta \notin R. \tag{9}$$

Доказательство. 1°. Прежде всего заметим, что если в корневую систему R входят два корня φ и ψ, угол между которыми равен $\theta_{\varphi\psi} = \frac{5\pi}{6}$, то подсистема, порожденная φ и ψ, есть G_2. Действительно, ранг этой подсистемы, очевидно, равен 2. Но среди всех существующих четырех корневых систем ранга 2 только G_2 содержит такую пару векторов.

2°. Условия, наложенные в лемме на корни α, β, γ, в частности, означают, что среди корней α, β, γ, $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$, $\alpha+\beta+\gamma$ нет ни нулевых, ни пропорциональных.

3°. Пусть R_0 — подсистема в R, порожденная α, β, γ. Тогда ее ранг равен трем, она неприводима и

$$\theta_{\alpha\beta} + \theta_{\beta\gamma} + \theta_{\gamma\alpha} < 2\pi. \tag{10}$$

Действительно, непосредственной проверкой легко убедиться, что ни одна из корневых систем ранга ≤ 2 не содержит тройки корней, удовлетворяющей условиям леммы. Далее, если $R_0 = R_1 \oplus R_2$, то каждое слагаемое должно содержать хотя бы один корень из α, β, γ. Это противоречит условию $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha \in R$.

4°. Среди $\theta_{\alpha\beta}$, $\theta_{\beta\gamma}$, $\theta_{\gamma\alpha}$ не может быть углов 30°, 45°, 60°, 150°. В самом деле, если $\theta_{\varphi\psi} = 30^\circ$ или 45°, то $\varphi+\psi \notin R$. Так как ранг R_0 равен 3 и эта подсистема неприводима, то в силу 1° в R_0 не может быть двух корней с углом 150° (поскольку неприводимая корневая система не может содержать подсистему G_2). По этой же причине не может быть угла 60°. Если, например, $\theta_{\alpha\beta} = 60^\circ$, то $\theta_{\alpha,\alpha+\beta} = 30^\circ$, а $\theta_{-\alpha,\alpha+\beta} = 150^\circ$.

5°. Таким образом, среди $\theta_{\alpha\beta}$, $\theta_{\beta\gamma}$, $\theta_{\gamma\alpha}$ могут быть только углы 90°, 120°, 135°, т. е. имеет место одна из следующих возможностей:

$$\text{(a) } \{90^\circ, 90^\circ, 90^\circ\}, \quad \text{(b) } \{90^\circ, 90^\circ, 120^\circ\}, \quad \text{(c) } \{90^\circ, 90^\circ, 135^\circ\},$$
$$\text{(d) } \{90^\circ, 120^\circ, 120^\circ\}, \quad \text{(e) } \{90^\circ, 120^\circ, 135^\circ\},$$

т. к. остальные тройки из указанных углов не удовлетворяют неравенству (10).

[1]Например, в случаях G_2 при $p = 2$ и 3, C_r при $p = 2$.

6°. Если $\theta_{\varphi,\psi} = 90°$ и $\varphi + \psi \in R$, то $(\varphi \mid \varphi) = (\psi \mid \psi) = 1$ (при соответствующей нормировке). Действительно, если $\varphi, \psi \notin G_2$, то среди возможных систем ранга 2 остается только B_2, в которой это условие имеет место.

7°. Исследуем каждый из случаев (a)–(e).

(a) $(\alpha \mid \alpha) = (\beta \mid \beta) = (\gamma \mid \gamma) = 1 \Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma \mid \alpha+\beta+\gamma) = 3$, что в нашем случае невозможно.

(b) Если $(\alpha \mid \gamma) = 0$, $(\beta \mid \gamma) = 0, (\alpha \mid \beta) = -\frac{1}{2}$; $(\alpha \mid \alpha) = (\beta \mid \beta) = (\gamma \mid \gamma) = 1$, то $(\alpha + \gamma \mid \beta + \gamma) = \frac{1}{2} = 2\cos\theta_{\alpha+\gamma,\beta+\gamma}$. Отсюда $\cos\theta_{\alpha+\gamma,\beta+\gamma} = \frac{1}{4}$, чего не может быть.

Случай (c) отпадает, т. к. если два угла из трех равны 90°, то по доказанному все векторы α, β, γ имеют единичную длину. Однако два корня одинаковой длины не могут иметь угол в 135°.

Случай (e) отпадает по той же причине.

Остается только случай (d): $\{90°, 120°, 120°\}$. При этом имеем $(\alpha \mid \alpha) = (\beta \mid \beta) = (\gamma \mid \gamma) = 1$, и, если $(\alpha \mid \gamma) = 0$, то $(\beta \mid \gamma) = (\alpha \mid \beta) = -\frac{1}{2}$, т. е. имеем (6) и (7).

8°. Пусть целые неотрицательные числа $p_{\varphi\psi}$ и $q_{\varphi\psi}$ определены ψ-серией, содержащей φ (т. е. $\varphi + i\psi \in R$ тогда и только тогда, когда $-p_{\varphi\psi} \le i \le q_{\varphi\psi}$). Заметим, что если $(\varphi \mid \psi) = 0$, то $p_{\varphi\psi} = q_{\varphi\psi} < 2$, т. к. иначе ψ-серия, содержащая φ, состояла бы не менее чем из пяти членов. Поэтому либо $p_{\varphi\psi} = q_{\varphi\psi} = 1$ и $\varphi + \psi$, $\varphi - \psi \in R$, а $\varphi + 2\psi$, $\varphi - 2\psi \notin R$, либо $p_{\varphi\psi} = q_{\varphi\psi} = 0$ и $\varphi + \psi$, $\varphi - \psi \notin R$.

9°. Непосредственно из условий леммы подсистема R_0 должна содержать 14 корней: $\pm\alpha, \pm\beta, \ldots, \pm(\alpha + \beta + \gamma)$. Кроме того, в силу замечания 8° и первого равенства (7) R_0 должна содержать еще два корня $\pm(\alpha - \gamma)$. Затем, в силу (6) и (7) имеем $(\alpha + \beta + \gamma \mid \beta) = 0$. Поэтому опять ввиду условий и замечания 1° $\pm(\alpha + 2\beta + \gamma) \in R_0$. В результате R_0 должна содержать все 18 корней (8). Так как корни α, β, γ линейно независимы, то все 18 корней (8) различны и других корней в R_0 быть не может, поскольку корневой системы ранга 3 с числом корней больше 18 не существует.

10°. Положим $\alpha_1 = \beta$, $\alpha_2 = \alpha$, $\alpha_3 = -\alpha + \gamma$. Тогда нетрудно проверить, что эти корни составляют простую подсистему в корневой системе R_0 типа C_3. Причем все корни (8) со знаком $+$ суть положительные целочисленные линейные комбинации корней α_1, α_2, α_3.

Последнее утверждение леммы следует из (8). □

Лемма 2. *Если корень φ такой, что $\varphi = \beta + \alpha_i$ и $\varphi = \gamma + \alpha_j$, где α_i, α_j — простые неравные корни, а β, γ — произвольные корни, то существует такой корень ψ, что $\psi + \alpha_j = \beta$ и $\psi + \alpha_i = \gamma$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что если $\alpha, \beta, \gamma \in R$ и $\alpha + \beta + \gamma \in R$, то случай, когда $\alpha + \beta \in R$, а $\beta + \gamma$, $\gamma + \alpha \notin R$, не может иметь места. Действительно, пусть R — корневая система, содержащая такие корни, и G — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$ с данной корневой системой. Тогда векторы e_α, e_β, e_γ, где $e_\varphi \ne 0$ означает соответствующий корневой вектор, не удовлетворяют тождеству Якоби: $[[e_\alpha, e_\beta], e_\gamma] + [[e_\beta, e_\gamma], e_\alpha] + [[e_\gamma, e_\alpha], e_\beta] \ne 0$.

В условиях леммы имеем $\beta = \gamma + \alpha_j + (-\alpha_i)$. Так как $\gamma + \alpha_j$ — корень, а $\alpha_j + (-\alpha_i)$ — не корень (как разность простых), то в силу только что сделанного замечания $\psi = \gamma + (-\alpha_i)$ — корень, который и будет искомым. □

Предложение 1. *Если a и b — правильные пути, определяющие один и тот же корень $\varphi = \varphi_a = \varphi_b$, то существует последовательность правильных путей $a_0, a_1, \ldots, a_s$, в которой все пути определяют тоже корень φ, $a_0 = a$, $a_s = b$, и каждые два соседних пути a_t и a_{t+1}, $t = 0, \ldots, s-1$, отличаются только одной транспозицией двух рядом стоящих индексов.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по длине m путей a и b, основание $(m = 1, 2)$ которой очевидно. Пусть $a = (i_1, \ldots, i_m)$, $b = (j_1, \ldots, j_m)$ и для путей длины $< m$ $(m \ge 3)$ утверждение предложения справедливо. Положим $a' = (i_1, \ldots, i_{m-1})$, $b' = (j_1, \ldots, j_{m-1})$ и $i = i_m$, $j = j_m$ (таким образом, $a = (a', i)$, $b = (b', j)$). Если $i = j$, то предположение индукции применимо к a' и b', которые в этом случае определяют один корень и имеют длину $m - 1$.

Пусть $i \neq j$ и $\beta = \varphi_{a'}$, $\gamma = \varphi_{b'}$. По лемме 2 существует корень ψ такой, что $\psi + \alpha_j = \beta$ и $\psi + \alpha_i = \gamma$. Пусть c — некоторый правильный путь, определяющий корень ψ (его длина равна $m-2$). Тогда (c,j) и a' определяют β, а (c,i) и b' определяют γ. Все эти пути имеют длину $m-1$, и к ним применимо предположение индукции. Следовательно, существуют две последовательности путей $a' = a'_0, a'_1, \ldots, a'_s = (c,j)$ и $(c,i) = b'_0, b'_1, \ldots, b'_t = b'$, в которых все пути первой определяют β, а второй — γ, и в которых соседние пути различаются только одной транспозицией рядом стоящих индексов. В таком случае последовательность $a = (a'_0, i), (a'_1, i), \ldots, (a'_s, i) = (c,j,i), (c,i,j) = (b'_0, j), (b'_1, j), \ldots, (b'_t, j) = b$ является искомой для a и b. $\square$

3. *Доказательство теоремы* 1.

Лемма 3. *Пусть a, b, c — три правильных пути, определяющих один и тот же корень, с первыми индексами i_1, j_1, k_1 соответственно. Если имеют место равенства*

$$2^{-u(a)} f_a = (-1)^{d_1}\, 2^{-u(c)} f_c, \quad 2^{-u(c)} f_c = (-1)^{d_2} 2^{-u(b)} f_b, \tag{11}$$

то справедливо и равенство

$$2^{-u(a)} f_a = (-1)^{d}\, 2^{-u(b)} f_b, \tag{12}$$

где $d_1 = d(i_1, k_1)$, $d_2 = d(k_1, j_1)$ и $d = d(i_1, j_1)$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что если i, j, k — номера трех различных вершин (простых корней) в связной схеме Дынкина, то число

$$d(i,j) + d(j,k) + d(k,i) \tag{13}$$

всегда четное. Действительно, пусть сначала все три вершины i, j, k находятся на одной ветви и пусть вершина j находится между i и k. Тогда очевидно, что $d(i,k) = d(i,j) + d(j,k)$, отсюда следует четность (13). Так как все вершины входят в (13) симметрично, то случай одной ветви доказан.

Пусть вершины i, j, k находятся на разных ветвях (случай D или E) и s — вершина разветвления для них. Пусть $d(i,s) = x$, $d(j,s) = y$, $d(k,s) = z$. Тогда $d(i,j) = x + y$, $d(i,k) = x + z$, $d(j,k) = y + z$, отсюда число (13) равно $2x + 2y + 2z$, т. е. оно вновь четно. Других случаев нет.

Из первых двух равенств (11) имеем $2^{-u(a)} f_a = (-1)^{d_1 + d_2} 2^{-u(b)} f_b$, где $d_1 + d_2$ можно заменить на d ввиду четности (13), что и доказывает (12). $\square$

Лемма 4. *Пусть L — алгебра Ли с разложением $L = H \oplus (\oplus_{\alpha \in R} L_\alpha)$ и ψ, α, β — корни в R такие, что $\psi + \beta \notin R$, $2\alpha + \beta \notin R$, и пусть $e_\psi \in L_\psi$, $e_\alpha \in L_\alpha$, $e_\beta \in L_\beta$. Тогда*

$$[e_\psi, e_\alpha, e_\alpha, e_\beta] = 2[e_\psi, e_\alpha, e_\beta, e_\alpha]. \tag{14}$$

Доказательство. Имеем $[e_\psi, e_\alpha, e_\beta, e_\alpha] \stackrel{1}{=} [[e_\psi, [e_\alpha, e_\beta]], e_\alpha] \stackrel{2}{=} [[e_\psi, e_\alpha], [e_\alpha, e_\beta]]$, где $(\stackrel{1}{=})$ имеет место в силу равенства $[e_\psi, e_\alpha, e_\beta] = [e_\psi, e_\beta, e_\alpha] + [e_\psi, [e_\alpha, e_\beta]] = [e_\psi, [e_\alpha, e_\beta]]$, т. к. $\psi + \beta \notin R$, а $(\stackrel{2}{=})$ в силу условия $2\alpha + \beta \notin R$. Далее, $[[e_\psi, e_\alpha], [e_\alpha, e_\beta]] = [e_\psi, e_\alpha, e_\alpha, e_\beta] + [e_\alpha, [e_\psi, e_\alpha, e_\beta]] = [e_\psi, e_\alpha, e_\alpha, e_\beta] - [e_\psi, e_\alpha, e_\beta, e_\alpha]$. В результате $[e_\psi, e_\alpha, e_\beta, e_\alpha] = [e_\psi, e_\alpha, e_\alpha, e_\beta] - [e_\psi, e_\alpha, e_\beta, e_\alpha]$, т.е. имеем (14). $\square$

Лемма 5. *Алгебра Ли $L^{\mathbb{Q}} = \mathcal{L}/J$ над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ является алгеброй типа R^+ (или R^-).*

Доказательство. Каждое неправильное слово $[x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}]$ лежит в $\mathcal{J}$ (т. к. всегда найдется такое $1 < t \leq s$, что $[x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}]$ — граничное слово). Поэтому имеем $L^{\mathbb{Q}} = \bigoplus\limits_{\alpha \in R^+} \mathcal{L}^{\mathbb{Q}}_\alpha$. С другой стороны, каждое правильное слово не лежит в $\mathcal{J}$. Действительно, пусть G — полупростая алгебра Ли ранга r над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ с корневой системой R в H^*, где H — некоторая картановская подалгебра в G, $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ — простая система корней в R, R^+ —

множество положительных корней в R относительно Π и $G^+ = \oplus_{\alpha \in R^+} G_\alpha$, где G_α — корневое подпространство для $\alpha \in R^+$. Если g_i — ненулевой элемент G_{α_i} $(= \mathbb{C}g_i)$, то отображение $x_i \mapsto g_i$, $i = 1, \dots, r$ может быть продолжено до гомоморфизма $\theta : \mathcal{L}^{\mathbb{C}} \to G^+$ алгебр Ли, при котором идеал $\mathcal{J}$ перейдет в 0, а потому будем иметь гомоморфизмы $\mathcal{L}^{\mathbb{C}} \to L^{\mathbb{C}} \to G^+$. Остается отметить, что каждое правильное слово $[x_{i_1}, \dots, x_{i_s}] \in \mathcal{L}^{\mathbb{Q}} \subset \mathcal{L}^{\mathbb{C}}$ (естественное вложение) отобразится под действием θ в правильное слово $[g_{i_1}, \dots, g_{i_s}]$, которое в G всегда не равно нулю. $\square$

Доказательство теоремы 1. Предположим, что для данных R и K алгебра L типа R^+ существует. Во-первых, заметим, что если для какого-то $\alpha \in R^+$ формула (1) верна для любых правильных путей a, b, определяющих этот корень, то $\dim L_\alpha = 1$ и $f_c \neq 0$ для всякого регулярного пути c, а если характеристика поля $p \neq 2$, то это выполняется и для всякого правильного пути c (действительно, в силу предположенного существования и определения алгебры типа R^+ по крайней мере один такой регулярный путь есть, а значит, по (2) такими будут все).

Докажем (1) индукцией по длине m путей a и b, которая, очевидно, равна высоте корня, определяемого этими путями. Для $m = 1, 2$ формула тривиальна. Предположим, что она верна для путей длины $< m$, где $m \geq 3$.

Сначала рассмотрим два пути a и b, которые разнятся только порядком двух рядом стоящих индексов. При этом в силу предположения индукции достаточно ограничиться случаем, когда эти индексы стоят в конце пути: $a = (c, i, j)$, $b = (c, j, i)$, где c — общая начальная часть в a и b. Отметим, что, во-первых, число особых индексов в c для обоих путей как в a, так и в b одно и то же. Во-вторых, $i_1 = j_1$, т. е. $d(i_1, j_1) = 0$, т. к. $m > 2$, и индексы i, j не могут быть первыми. Введем обозначения $\gamma = \varphi_c$ и $\varphi = \gamma + \alpha_i + \alpha_j$. Имеем две следующие возможности.

1°. Простые корни α_i и α_j ортогональны между собой. В этом случае $e_a = e_b$ (т. к. $[e_i, e_j] = 0$). А т. к., с другой стороны, $d(i_1, j_1) = 0$ и $u(a) = u(b)$ (поскольку $(\alpha_i \mid \alpha_j) = 0$, то свойство каждого индекса i и j быть особым или нет сохраняется при переходе от a к b и наоборот), то формула (1) в этом случае справедлива.

2°. Пусть корни α_i и α_j не ортогональны между собой. Тогда тройка корней γ, α_i, α_j удовлетворяет условиям леммы 1 и, следовательно, один из корней α_i или α_j должен быть ортогональным к γ. Пусть $(\gamma \mid \alpha_i) = 0$. Тогда по лемме 1 (см. (9)) также имеем $\psi = -\alpha_i + \gamma \in R$, а $\psi + \alpha_j, 2\alpha_i + \alpha_j \notin R$. Если $p \neq 2$ или $p = 2$ и c — регулярный путь, то по предположению индукции $f_c \neq 0$ (см. замечание в начале доказательства). Поэтому по лемме 4 имеем $[f_c, f_i, f_j] = 2[f_c, f_j, f_i]$, т. е.

$$f_a = 2f_b. \tag{15}$$

Если $p = 2$ и c не является регулярным, то $f_c = 0$, но тогда и $f_a = f_b = 0$, а значит, (15) верна в любом случае. С другой стороны, индекс i в a является особым, а в b — нет. Индекс j не является особым ни в a, ни в b (по лемме 1), т. е. $u(a) = u(b) + 1$. А т. к. $d(i_1, j_1) = 0$, то формула (1) совпадает с (15), т. е. справедлива и в этом случае. Таким образом, случай, когда пути a и b разнятся только порядком двух рядом стоящих индексов, доказан.

Рассмотрим общий случай для $p \neq 2$. Пусть $a_0, a_1, \dots, a_s$ — последовательность правильных путей, определяющих один и тот же корень φ, $a_0 = a$, $a_s = b$, в которой каждые два соседних a_t и a_{t+1}, $t = 0, \dots, s-1$, отличаются одной транспозицией двух рядом стоящих индексов. Такая последовательность существует по предложению 1. Если $s = 2$, то для a и b формула (1) только что доказана. Если $s \geq 3$, то применение леммы 3 последовательно к тройкам $a = a_0, a_t, a_{t+1}$, $t = 1, \dots, s-1$, позволяет получить (1) для общего случая.

Последнее рассуждение неприменимо при $p = 2$, т. к. нет гарантии регулярности путей a_i, но из доказанного и леммы 5 следует, что формула (1) (и (2)) верна для алгебры $L^{\mathbb{Q}}(R^+)$ над полем рациональных чисел, и потому $\dim L^{\mathbb{Q}}_\alpha = 1$ для каждого $\alpha \in R^+$. Выберем в $L^{\mathbb{Q}}_\alpha$ регулярный базис. Так как всякое лиево слово линейно выражается через право-направленные с целыми коэффициентами, то в силу (2) все структурные константы регулярного базиса числа целые, а на каждом шаге регулярного пути они равны ± 1 (т. е. $[f_b, f_i] = \pm f_a$, если путь $a = (b, i)$

регулярный). Поэтому линейная оболочка $L^{\mathbb{Z}}$, натянутая на регулярный базис $L^{\mathbb{Q}}$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$, есть кольцо Ли, а $L = K \otimes_{\mathbb{Z}} L^{\mathbb{Z}}$ есть алгебра Ли типа R^+ над произвольным полем K, т. к. $f_a \neq 0$ для любого регулярного пути a, и потому $\dim L_\alpha = 1$ для произвольного $\alpha \in R^+$. Это доказывает существование алгебры Ли типа R^+ над произвольным полем и справедливость (1) (и (2)) теперь и для $p = 2$. $\square$

4. *Доказательства замечаний и следствий.* Первое замечание доказательства не требует, второе вытекает из следующих двух лемм.

Лемма 6. *В схемах корневых систем типов A_r, D_r, E_r не существует особых дуг и, следовательно, все правильные пути регулярны.*

Доказательство. Пусть R — неприводимая корневая система, α — произвольный, а α_i — простой корни системы такие, что $\alpha + \alpha_i \in R$ и $(\alpha \mid \alpha_i) = 0$. Рассмотрим корневую подсистему, порожденную корнями α и α_i. Она не может быть типа $A_1 \oplus A_1$, т. к. $\alpha + \alpha_i \in R$, а в остальных системах ранга 2 ортогональные корни имеют разную длину, тогда как в перечисленных в лемме корневых системах таких корней нет. $\square$

Лемма 7. *В случае $R = B_r$ ($r \geq 2$) все правильные пути в схеме, определяющие один и тот же корень $\alpha \in R^+$, содержат равное число особых индексов $u(\alpha)$. При этом, если $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ — подсистема простых корней в B_r такая, что*

$$(\alpha_i \mid \alpha_{i+1}) = -1, \quad (\alpha_i \mid \alpha_i) = 2, \quad i = 1, \dots, r-1; \quad (\alpha_r \mid \alpha_r) = 1,$$

то для множества положительных корней

$$\alpha_{st} = \sum_{i=s}^{t} \alpha_i; \quad 1 \leq s \leq t \leq r \quad (\alpha_{ss} = \alpha_s),$$

$$\beta_{st} = \sum_{i=s}^{t} \alpha_i + 2 \sum_{i=t+1}^{r} \alpha_i; \quad 1 \leq s \leq t \leq r-1,$$

имеем

$$u(\alpha_{ij}) = 0, \quad 1 \leq i \leq j \leq r, \quad u(\beta_{ij}) = 1, \quad 1 \leq i \leq j \leq r-1. \tag{16}$$

Доказательство. Положим

$$l(\alpha_{ij}) = j, \quad l(\beta_{ij}) = 2r - j, \quad j = 1, \dots, r \quad (\alpha_{ir} = \beta_{ir}),$$

и проверим (16) индукцией по $l(\alpha)$, основание которой очевидно. Если $j < r$ и $\alpha_{ij} + \alpha_t \in R$, то это справедливо не более чем в двух случаях, когда $t = i - 1$ ($i \geq 2$) или $t = j + 1$. В обоих случаях $(\alpha_{ij} \mid \alpha_t) = -1$. Отсюда следует первое равенство (16) (т. к. в любом правильном пути $a = (b, j+1)$, где b определяет корень α_{ij}, последний индекс $t = j + 1$ не является особым, а в силу индукционного предположения особых индексов нет во всем a). Затем, всякий правильный путь a, определяющий корень $\beta_{i,r-1} = \alpha_{ir} + \alpha_r$, должен иметь вид $a = (b, r)$, где b определяет α_{ir} и по доказанному не имеет особых индексов, а т. к. $(\alpha_{ir} \mid \alpha_r) = (\alpha_{r-1} \mid \alpha_r) + (\alpha_r \mid \alpha_r) = 0$, то в a последний индекс особый и $u(a) = 1$ вне зависимости от a, т. е. $u(\beta_{i,r-1}) = 1$. Таким образом, для корней α с $l(\alpha) \leq r + 1$ лемма доказана. Пусть $l(\alpha) > r + 1$, тогда $\alpha = \beta_{ij}$, где $j > r - 1$ и, если $\beta_{ij} + \alpha_t \in R$, то $t = i - 1$ либо $t = j$ (и $i < j$, т. к. $\beta_{jj} + \alpha_j \notin R$), причем $(\beta_{ij} \mid \alpha_j) = (\alpha_{j-1} \mid \alpha_j) + (\alpha_j \mid \alpha_j) + 2(\alpha_{j+1} \mid \alpha_j) = -1$. Отсюда $u(\alpha + \alpha_j) = u(\alpha)$. $\square$

Доказательство следствия 2. Пусть L — алгебра Ли типа R^+ над полем K, существование которой было установлено в конце доказательства теоремы 1, с образующими f_i, $i = 1, \dots, r$. Гомоморфизм $\theta' : (\mathcal{L}/J)^K \to L$, индуцированный соответствием $x_i \mapsto f_i$, является изоморфизмом, т. к. $\dim L_\alpha^K = 1$ в силу формулы (1). Отсюда следует однозначность. $\square$

5. *Алгебры Ли типа R.* Для произвольной $r \times r$-матрицы $A = (a_{ij})$ над K существуют однозначно определенные дифференцирования $h_1, \dots, h_r$ на алгебре Ли L^K такие, что

$$x_i h_j = a_{ij} x_i, \quad i, j = 1, \dots, r, \tag{17}$$

т. к. дифференцирования h_i на $\mathcal{L}$, действующие на образующих по формулам $x_i h_j = a_{ij} x_i$, $i, j = 1, \dots, r$, сохраняют идеал $\mathcal{J}$ и потому переносятся на алгебру L^K (мы сохраняем обозначения для образов элементов x_i и дифференцирований h_j при переходе от $\mathcal{L}$ к L^K). Обозначим через $L^K(A)$ алгебру Ли $L^K + H$ — полупрямую сумму алгебры L^K и коммутативной алгебры $H = \langle h_1, \dots, h_r \rangle$ (с $[x_i, h_j] = x_i h_j$) и определим линейные отображения $g_i : \langle x_1, \dots, x_r \rangle \to H$ равенствами

$$x_i g_j = \delta_{ij} h_i \quad i, j = 1, \dots, r. \tag{18}$$

Теорема 2 есть прямое следствие следующего предложения.

Предложение 2. *Если отображения g_i можно продолжить до дифференциальных операторов $L^K \to L^K(A)$, то матрица A имеет вид $A = C'T$, где $C' = (c'_{ij})$ — приведенная матрица Картана системы R, а T — диагональная матрица над полем K. В нераспадающемся случае исключение составляет только система B_2 (или C_2) над полем характеристики 3, когда 2×2-матрица A над K имеет вид* (5).

Предварительно докажем несколько лемм.

Лемма 8. *Пусть дифференциальные операторы $g_i : L^K \to L^K(A)$, $i = 1, \dots, r$, удовлетворяющие равенствам* (18), *существуют и $C = (c_{ij})$ — матрица Картана системы R. Тогда для $i \neq j$ имеют место утверждения*

A. *если $c_{ij} = 0$, то $a_{ij} = 0$;*

B. *если $c_{ij} = -1$, то $a_{ii} + 2a_{ji} = 0$;*

C. *если $c_{ij} = -2$, то $3(a_{ij} + a_{jj}) = 0$.*

Доказательство. Так как α_i, α_j — простые корни, то радикальный вес $\alpha_i + k\alpha_j$ принадлежит R только при $0 \leq k \leq -c_{ij}$. Поэтому (для краткости квадратные скобки опускаем) имеем:

A) если $c_{ij} = 0$, то $(\alpha_i \mid \alpha_j) = 0$, т. е. $\alpha_i + \alpha_j \notin R$ и последовательность (i, j) граничная, и потому в L^K имеем $x_i x_j = 0 \;\Rightarrow\; (x_i x_j) g_i = h_i x_j = a_{ji} x_j = 0 \;\Rightarrow\; a_{ji} = 0$;

B) если $c_{ij} = -1$, то максимальное значение k равно 1, т. е. $\alpha_i + \alpha_j \in R$, а $\alpha_i + 2\alpha_j \notin R$, и $x_i x_j \neq 0$, а $x_i x_j x_i = 0 \;\Rightarrow\; (x_i x_j x_i) g_i = -(a_{ii} + 2a_{ji}) x_i x_j = 0 \;\Rightarrow\; a_{ii} + 2a_{ji} = 0$;

C) аналогично если $c_{ij} = -2$, то максимальное значение k равно 2, т. е. $x_i x_j x_j \neq 0$, а $x_i x_j x_j x_j = 0 \;\Rightarrow\; (x_i x_j x_j x_j) g_j = -3(a_{ij} + a_{jj}) x_i x_j x_j = 0 \;\Rightarrow\; 3(a_{ij} + a_{jj}) = 0$. $\square$

Используем эту лемму для следующих частных случаев.

Лемма 9. *В случае $R = B_3$ дифференциальные операторы g_1, g_2, g_3 существуют тогда и только тогда, когда элементы матрицы A удовлетворяют соотношениям* (*предполагаем* $(\alpha_1 \mid \alpha_1) = (\alpha_2 \mid \alpha_2) > (\alpha_3 \mid \alpha_3)$):

$$\begin{gathered} a_{11} + 2a_{21} = 0, \quad a_{31} = 0; \\ 2a_{12} + a_{22} = 0, \quad a_{22} + 2a_{32} = 0, \quad a_{13} = 0; \\ a_{12} + a_{32} = 0, \quad a_{23} + a_{33} = 0, \end{gathered} \tag{19}$$

т. е. $A = C'T$, где C' — приведенная матрица Картана для B_3, T — диагональная матрица над K.

Доказательство. В случае $R = B_3$ идеал $\mathcal{J}$ порождается элементами

$$\begin{gathered} [x_1, x_3],\ [x_1, x_2, x_1],\ [x_1, x_2, x_2],\ [x_2, x_3, x_2], \\ [x_1, x_2, x_3, x_2],\ [x_2, x_3, x_3, x_3],\ [x_1, x_2, x_3, x_3, x_2, x_3]. \end{gathered}$$

Необходимость первых двух строк (19) следует из утверждений A, B леммы 8, а из утверждения C имеем $3(a_{23} + a_{33}) = 0$. Кроме того,

$$[x_1, x_2, x_3, x_2]g_2 = (a_{12} + a_{22} + a_{32})[x_1, x_2, x_3] = 0,$$
$$[x_1, x_2, x_3, x_3, x_2, x_3]g_3 = (a_{13} + 2a_{23} + 2a_{33})[x_1, x_2, x_3, x_3, x_2] = 0.$$

Отсюда следует необходимость всех соотношений последней строки (19) при любой характеристике. Нетрудно видеть, что при выполнении (19) все граничные слова дифференциальными операторами g_1, g_2, g_3 обращаются в 0, т. е. (19) и достаточны. □

Лемма 10. *В случае $R = C_3$ дифференциальные операторы g_1, g_2, g_3 существуют тогда и только тогда, когда элементы матрицы A удовлетворяют соотношениям (предполагаем $(\alpha_1 \mid \alpha_1) = (\alpha_2 \mid \alpha_2) < (\alpha_3 \mid \alpha_3)$):*

$$\begin{gathered} a_{11} + 2a_{21} = 0, \quad a_{31} = 0; \\ 2a_{12} + a_{22} = 0, \quad a_{22} + a_{32} = 0; \\ a_{13} = 0, \quad a_{23} + a_{33} = 0, \end{gathered} \tag{20}$$

т. е. $A = CT$, где C — матрица Картана для C_3, T — диагональная матрица над K.

Доказательство аналогично предыдущему. Здесь набор образующих идеала $\mathcal{J}$ состоит из следующих граничных слов

$$[x_1, x_3],\ [x_1, x_2, x_1],\ [x_1, x_2, x_2],\ [x_2, x_3, x_3], [x_2, x_3, x_2, x_2],$$
$$[x_1, x_2, x_3, x_2, x_2],\ [x_1, x_2, x_3, x_2, x_3],\ [x_1, x_2, x_3, x_2, x_1, x_1],\ [x_1, x_2, x_3, x_3, x_1, x_3].$$

Так же, как в лемме 9, все соотношения (20) получаем в силу леммы 8 и

$$[x_2, x_3, x_2, x_2]g_2 = 3(a_{22} + a_{32})[x_2, x_3, x_2] = 0,$$
$$[x_1, x_2, x_3, x_2, x_2]g_2 = (2a_{12} + 3a_{22} + 2a_{32})[x_1, x_2, x_3, x_2] = 0. \qquad \square$$

Лемма 11. *В случае $R = G_2$ дифференциальные операторы g_1, g_2 существуют тогда и только тогда, когда элементы матрицы A удовлетворяют соотношениям (предполагаем, что $(\alpha_1 \mid \alpha_1) < (\alpha_2 \mid \alpha_2)$):*

$$3a_{11} + 2a_{21} = 0, \quad 2a_{12} + a_{22} = 0, \tag{21}$$

т. е. $A = CT$, где C — матрица Картана для G_2, T — диагональная матрица над K.

Доказательство. Граничными словами здесь являются

$$[x_1, x_2, x_1],\ [x_1, x_2, x_1, x_2],\ [x_1, x_2, x_1, x_1, x_1],\ [x_1, x_2, x_3, x_2, x_3],$$
$$[x_1, x_2, x_1, x_1, x_2, x_1],\ [x_1, x_2, x_1, x_1, x_2, x_2].$$

Необходимость второго равенства (21) следует из леммы 8, т. к. $c_{12} = -1$. Затем $x_1x_2x_1x_1x_2 \neq 0$, но $x_1x_2x_1x_1x_2x_i = 0$, и т. к. $(x_1x_2x_1x_1x_2x_1)g_1 = -(3a_{11} + 2a_{21})x_1x_2x_1x_1x_2 = 0$, то отсюда следует необходимость первого равенства (21). Все граничные слова при выполнении (21) операторами g_1, g_2 отображаются в 0, т.е. (21) является и достаточным условием. □

Доказательство предложения 2. Утверждение A леммы 8 позволяет ограничиться рассмотрением только неразложимых корневых систем.

Если $r \geq 3$, то в неприводимой корневой системе каждый простой корень можно включить в тройку α_i, α_j, α_k, которая порождает неприводимую корневую подсистему типа A_3, B_3 или C_3, и потому для $r \geq 3$ предложение справедливо в силу лемм 8 (утверждение B) (в случае A_3), 9 и 10.

Если $p = 2$, то по лемме 8 (утверждение B) все диагональные элементы a_{jj} равны нулю в тех столбцах, в которых содержатся $c_{ij} = -1$ в матрице C (в матрице C все $c_{ii} = 2$). Однако во всех столбцах матриц Картана неприводимых корневых систем содержится -1 за исключением двух случаев: в матрицах систем B_r и G_2 имеется по одному столбцу, не содержащему -1. Для B_r при $r \geq 3$ такой столбец уже рассмотрен. Таким образом, осталось рассмотреть ситуацию, когда $r = 2$.

Случай $R = A_2$ ничем не отличается от A_r при $r > 2$. При $R = B_2$ (т. е. $(\alpha_1 \mid \alpha_1) > (\alpha_2 \mid \alpha_2)$) также по лемме 8 (утверждение B) элементы первого столбца в A связаны соотношением $a_{11} + 2a_{21} = 0$, а второго по лемме 8 (утверждение C) — соотношением $3(a_{12} + a_{22}) = 0$, т. е. для $p \neq 3$ имеем $A = C'T$, где C' — приведенная матрица Картана для B_2, T — диагональная матрица над K. И только при $p = 3$ для второго столбца никакого соотношения нет, а потому матрица A принимает вид (5). Случай $R = C_2$ аналогичен предыдущему (меняются ролями α_1 и α_2), а случай $R = G_2$ рассмотрен в лемме 11. $\square$

Доказательства следствий 3 и 4. Если все $\theta_i \neq 0$, то, полагая $f_i' = \frac{1}{\theta_i} f_i$, получим относительно образующих $\{e_i, f_i',\ i = 1, \ldots, r\}$ матрицу $A' = C'1_r$, где 1_r — единичная матрица над K. Отсюда следует изоморфность всех алгебр Ли типа R при $\det T \neq 0$ с алгеброй, у которой $T = 1_r$, т. е. следствие 3.

Целочисленность регулярного базиса алгебр типа R^+ обоснована в доказательстве теоремы 1. Для типа R доказательство аналогично. $\square$

Литература

1. Бурбаки Н. *Элементы математики. Группы и алгебры Ли.* – М.: Мир, 1972. – 334 с.
2. Кострикин А.И. *Параметрическое семейство простых алгебр Ли* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1970. – Т. 34. – № 4. – С. 744–756.
3. Вейсфейлер Б.Ю., Кац В.Г. *Экспоненциалы в алгебрах Ли характеристики p* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1971. – Т. 35. – № 4. – С. 762–788.

Казанский государственный университет

Поступила 02.10.2001