ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 12 (463)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.10

М.К. КРАВЦОВ, В.М. КРАВЦОВ, Е.В. ЛУКШИН

О ЧИСЛЕ r-НЕЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ВЕРШИН МНОГОГРАННИКА ТРЕХИНДЕКСНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ВЫБОРА

В [1] доказана теорема об оценке снизу числа $f_0^u(M(p,n))$ нецелочисленных вершин многогранника $M(p,n)$ p-индексной ($p \geq 3$) аксиальной задачи выбора порядка n

$$f_0^u(M(p,n)) \geq (n!)^{p-1}\left(\frac{n^2-n}{4}\right)\left(\frac{n^2+3n+2}{6}\right)^{p-3}. \tag{1}$$

Тем самым получено опровержение гипотезы 18, сформулированной в [2]. В данной работе эта оценка существенно улучшена для случая, когда $p=3$. Для любого числа $r \in \{4,6,7,\dots,q(n)\}$ доказано существование у многогранника $M(3,n) = \Big\{x = \|x_{ijt}\|_n : x_{ijt} \geq 0 \ \forall (i,j,t) \in N_n^3,$ $\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n x_{ijt} = 1 \ \forall t \in N_n, \ \sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{t=1}^n x_{ijt} = 1 \ \forall j \in N_n, \ \sum\limits_{j=1}^n\sum\limits_{t=1}^n x_{ijt} = 1 \ \forall i \in N_n\Big\}$ трехиндексной аксиальной задачи выбора r-нецелочисленных вершин (r-вершин), т.е. вершин, число дробных компонент у которых равно r, где $N_n = \{1,2,\dots,n\}$, $N_n^3 = N_n \times N_n \times N_n$, а число $q(n)$ определяется по формуле

$$q(n) = \begin{cases} 3n-2, & \text{если} \ \ 2 \leq n \leq 7; \\ 2n+4, & \text{если} \ \ n = 8; \\ 2n+5, & \text{если} \ \ n = 9; \\ 2n+6, & \text{если} \ \ n = 10; \\ 2n+7, & \text{если} \ \ n \geq 11. \end{cases} \tag{2}$$

Получены также оценки снизу, а в некоторых случаях и формулы для определения r-вершин такого многогранника.

1. Свойства r-вершин. Совокупность элементов матрицы $x = \|x_{ijt}\|_n$ с фиксированным значением одного индекса, например, i будем называть двумерным сечением ориентации (jt) матрицы x. Двумерное сечение матрицы x назовем нецелочисленным сечением, если оно содержит хотя бы одну дробную компоненту. Очевидна

Лемма 1. *Всякая нецелочисленная матрица x многогранника $M(3,n)$ обладает двумя свойствами:* а) *каждое нецелочисленное двумерное сечение матрицы x содержит по крайней мере две дробных компоненты*; б) $I(x) = J(x) = T(x) \geq 2$, *где* $I(x)$, $J(x)$ *и* $T(x)$ — *число всех нецелочисленных двумерных сечений соответственно ориентации* (jt), (it) *и* (ij) *матрицы* x.

Известно [3], что вершина многогранника $M(3,n)$ содержит не более чем $3n-2$ положительных компонент.

Пусть $r \in N_{3n-2}$. Через $\sigma(n,r)$ будем обозначать число всех r-вершин многогранника $M(3,n)$.

Работа поддержана фондом фундаментальных исследований Республики Беларусь (проект № Ф97-266).

Из леммы 1 следует, что $\sigma(n,r)=0\ \forall r\in\{1,2,3,5\}$, $n>2$.

Пусть $n\geq 3$, $l\in\{2,3,\ldots,n\}$ и натуральные числа $m_1,m_2,\ldots,m_l$ удовлетворяют условию $\sum\limits_{s=1}^{l}m_s=n$, а I_s, J_s, T_s, $s\in N_l$, — подмножества мощности m_s множества N_n, подчиненные условиям $I_p\cap I_q=\emptyset$, $J_p\cap J_q=\emptyset$, $T_p\cap T_q=\emptyset\ \forall p,q\in N_l$, $p\neq q$. Очевидно, $\cup_{s=1}^{l}I_s=\cup_{s=1}^{l}J_s=\cup_{s=1}^{l}T_s=N_n$. Для любой тройки подмножеств (I_s,J_s,T_s), $s\in N_l$, определим многогранник $M(I_s,J_s,T_s)=\Big\{x=\|x_{ijt}\|_{I_s\times J_s\times T_s}:x_{ijt}\geq 0\ \forall(i,j,t)\in I_s\times J_s\times T_s,\ \sum\limits_{i\in I_s}\sum\limits_{j\in J_s}x_{ijt}=1\ \forall t\in T_s,\ \sum\limits_{i\in I_s}\sum\limits_{t\in T_s}x_{ijt}=1\ \forall j\in J_s,$ $\sum\limits_{j\in J_s}\sum\limits_{t\in T_s}x_{ijt}=1\ \forall i\in I_s\Big\}$.

Замечание. Многогранник $M(I_s,J_s,T_s)$, $s\in N_l$, отличается от многогранника $M(3,m_s)$ лишь нумерацией элементов их матриц.

Методом от противного легко доказывается

Лемма 2. *Пусть $y^s=\|y^s_{ijt}\|_{I_s\times J_s\times T_s}$ — вершина многогранника $M(I_s,J_s,T_s)$, $s\in N_l$. Тогда матрица $x^0=\|x^0_{ijt}\|_n$ с элементами*

$$x^0_{ijt}=\begin{cases}y^s_{ijt}, & \text{если}\ \ (i,j,t)\in I_s\times J_s\times T_s,\ s\in N_l;\\ 0 & \text{для остальных}\ \ (i,j,t)\ \text{из}\ N_n^3\end{cases}\tag{3}$$

является вершиной многогранника $M(3,n)$.

Пусть $r\in\{4,6,7,\ldots,3n-2\}$. Через $m(r)$ будем обозначать наименьшее натуральное число k, для которого выполняется неравенство $\sigma(k,r)>0$. Ясно, что $m(r)\geq 2$ и $\sigma(n,r)=0\ \forall n<m(r)$.

Лемма 3. *Пусть натуральные числа m и r удовлетворяют условию $\sigma(m,r)>0$. Тогда $\sigma(n,r)>0\ \forall n>m$.*

Доказательство леммы 3 проводится с помощью леммы 2.

Теорема 1. *Для любого числа $r\in\{4,6,7,\ldots,q(n)\}$, где $q(n)$ вычисляется по формуле (2), у многогранника $M(3,n)$ существуют r-вершины.*

Схема доказательства. Сначала доказываем теорему для $n=2,3,4,5,6,7$, т. е. строим для любых чисел $r\in\{4,6,7,\ldots,3n-2\}$ и $n\in\{2,3,4,5,6,7\}$ у многогранника $M(3,n)$ конкретные r-вершины. Затем доказываем теорему 1 для $n\geq 8$. На основании теоремы для $n=2,3,4,5,6,7$ и леммы 3 заключаем, что многогранник $M(3,n)$, $n\geq 8$, имеет r-вершины, где $r\in N_{19}\setminus\{1,2,3,5\}$.

Пусть $n=2m$, где m — натуральное число. Тогда $n=2k+6$, где $k=m-3$. Положим $I_s=J_s=T_s=\{2s-1,2s\}\ \forall s\in N_k$, $I_{k+1}=J_{k+1}=T_{k+1}=\{2k+1,2k+2,2k+3,2k+4,2k+5,2k+6\}$.

Пусть $y^s=\|y^s_{ijt}\|_{I_s\times J_s\times T_s}$, $s\in N_h$, $h\leq k$, — 4-вершина многогранника $M(I_s,J_s,T_s)$, $y^s=\|y^s_{ijt}\|_{I_s\times J_s\times T_s}$, $s=h+1,\ldots,k$, при $h+1\geq k$, — целочисленная вершина многогранника $M(I_s,J_s,T_s)$, $y^{k+1}=\|y^{k+1}_{ijt}\|_{I_{k+1}\times J_{k+1}\times T_{k+1}}$ — r_1-вершина многогранника $M(I_{k+1},J_{k+1},T_{k+1})$, где $r_1\in\{12,13,14,15,16\}$. Тогда по лемме 2 (здесь $l=k+1$) матрица x^0, построенная согласно формуле (3), является r-вершиной многогранника $M(3,n)$, где $r=4h+r_1$, $h\in N_k$, $r_1\in\{12,13,14,15,16\}$. Итак, доказано, что для любого числа $r\in\{16,17,\ldots,2n+4\}$ у многогранника $M(3,n)$, $n=2k+6$, существуют r-вершины.

Если вместо многогранников $M(I_1,J_1,T_1)$ и $M(I_2,J_2,T_2)$ рассмотреть многогранник $M(I_1',J_1',T_1')$, где $I_1'=J_1'=T_1'=N_4$, и взять у него 9- и 10-вершины, то, повторяя рассуждения, использованные выше, приходим к выводу, что у многогранника $M(3,n)$, $n=2k+6$, $k\geq 2$, существуют $(2n+5)$- и $(2n+6)$-вершины.

Пусть теперь $n=2m+1$, где m — натуральное число. Тогда $n=2k+7$, где $k=m-3$. Положим $I_s=J_s=T_s=\{2s-1,2s\}\ \forall s{\in}N_k$, $I_{k+1}=J_{k+1}=T_{k+1}=\{2k+1,2k+2,2k+3,2k+4,2k+5,2k+6,2k+7\}$. Пусть $y^s=\|y^s_{ijt}\|_{I_s\times J_s\times T_s}$, $s\in N_h$, $h\leq k$, — 4-вершина многогранника $M(I_s,J_s,T_s)$, $y^s=\|y^s_{ijt}\|_{I_s\times J_s\times T_s}$, $s=h+1,\ldots,k$, при $h+1\geq k$, — целочисленная вершина многогранника

$M(I_s,J_s,T_s)$, $y^{k+1} = \|y_{ijt}^{k+1}\|_{I_{k+1}\times J_{k+1}\times T_{k+1}}$ — r_2-вершина многогранника $M(I_{k+1},J_{k+1},T_{k+1})$, где $r_2 \in \{14,15,16,17,18,19\}$. Тогда по лемме 2 (здесь $l = k+1$) матрица x^0, элементы которой определяются по формуле (3), является r-вершиной многогранника $M(3,n)$, где $r = 4h + r_2$, $h \in N_k$, $r_2 \in \{14,15,16,17,18,19\}$. Тем самым для любого числа $r \in \{18,19,\dots,\ 2n+5\}$ у многогранника $M(3,n)$, $n = 2k+7$, установлено существование r-вершин.

С помощью аналогичных рассуждений можно показать, что у многогранника $M(3,n)$ при $n = 2k+7$, $k \geq 2$, существуют $(2n+6)$- и $(2n+7)$-вершины. Для этого вместо многогранников $M(I_1,J_1,T_1)$ и $M(I_2,J_2,T_2)$ достаточно рассмотреть многогранник $M(I_1',J_1',T_1')$, где $I_1' = J_1' = T_1' = N_4$, взяв в нем 9- и 10-вершины.

Ранее утверждение теоремы 1 было известно лишь для $r = 4$ [1], [4].

Положим $R_n = \{r \in \{4,6,7,\dots,3n-2\} : m(r) \leq n\}$. Согласно теореме 1 справедливо включение $\{4,6,7,\dots,q(n)\} \subset R_n$.

С помощью леммы 1 доказывается

Теорема 2. *Пусть $r \in R_n$. Тогда любая r-вершина x^0 многогранника $M(3,m(r))$ обладает двумя свойствами*: а) *каждое двумерное сечение матрицы x^0 содержит по крайней мере две дробных компоненты*; б) *среди двумерных сечений одной ориентации матрицы x^0 найдется по крайней мере два сечения, каждое из которых имеет по две дробных компоненты.*

2. Оценки снизу числа r-вершин. Известно [3], что число $f_0^z(M(3,n))$ целочисленных вершин многогранника $M(3,n)$ выражается формулой

$$f_0^z(M(3,n)) = (n!)^2.$$

С помощью этой формулы на основании лемм 1, 2 и теоремы 2 доказывается

Теорема 3. *Для любых натуральных чисел $n \geq 3$ и $r \in R_{n-1}$ справедливо неравенство*

$$\sigma(n,r) \geq \binom{n}{m(r)}^3 ((n-m(r))!)^2 \sigma(m(r),r),$$

причем равенство достигается в случае, когда $r \in \{2m(r), 2m(r)+1\}$.

Из теорем 1 и 3 вытекает

Следствие. Для числа $f_0^u(M(3,n))$ нецелочисленных вершин многогранника $M(3,n)$ справедливо неравенство

$$f_0^u(M(3,n)) \geq \sum_{\substack{r=4\\ r\neq 5}}^{q(n)} \binom{n}{m(r)}^3 ((n-m(r))!)^2 \sigma(m(r),r),$$

где число $q(n)$ определяется по формуле (2).

Так как $m(4) = 2$, $m(6) = 3$, $m(7) = 3$, $m(8) = 4$, $m(9) = 4$, $m(10) = 4$, $m(11) = 5$, $m(12) = 5$, $m(13) = 5$, $m(14) = 6$, $m(15) = 6$, $m(16) = 6$, $m(17) = 7$, $m(18) = 7$ и $m(19) = 7$ (см. теорему 1), то в силу теоремы 3 получаем следующие результаты:

$$\sigma(n,4) = \binom{n}{2}^3 ((n-2)!)^2 \sigma(2,4), \qquad n > 2, \tag{4}$$

$$\sigma(n,r) = \binom{n}{3}^3 ((n-3)!)^2 \sigma(3,r), \qquad r = 6,7, \quad n > 3, \tag{5}$$

$$\sigma(n,r) = \binom{n}{4}^3 ((n-4)!)^2 \sigma(4,r), \qquad r = 8,9, \quad n > 4,$$

$$\sigma(n,10) \geq \binom{n}{4}^3 ((n-4)!)^2 \sigma(4,10), \quad n > 4,$$

$$\sigma(n,11) = \binom{n}{5}^3 ((n-5)!)^2 \sigma(5,11), \quad n > 5,$$

$$\sigma(n,r) \geq \binom{n}{5}^3 ((n-5)!)^2 \sigma(5,r), \quad r = 12, 13, \quad n > 5,$$

$$\sigma(n,r) \geq \binom{n}{6}^3 ((n-6)!)^2 \sigma(6,r), \quad r = 14, 15, 16, \quad n > 6,$$

$$\sigma(n,r) \geq \binom{n}{7}^3 ((n-7)!)^2 \sigma(7,r), \quad r = 17, 18, 19, \quad n > 7.$$

С помощью леммы 6 из [5] можно установить, что $\sigma(2,4) = 2$, $\sigma(3,6) = 432$, $\sigma(3,7) = 648$. Поэтому в силу (4) и (5) справедливы следующие явные формулы:

$$\begin{aligned} \sigma(n,4) &= \frac{n(n-1)}{4}(n!)^2, && n \geq 2, \\ \sigma(n,6) &= 2n(n-1)(n-2)(n!)^2, && n \geq 3, \\ \sigma(n,7) &= 3n(n-1)(n-2)(n!)^2, && n \geq 3. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом следствия получаем оценку снизу числа $f_0^u(M(3,n))$ нецелочисленных вершин многогранника $M(3,n)$, которая значительно (по меньшей мере в $20n - 39$ раз, где $n \geq 3$) улучшает оценку (1) при $p = 3$.

Литература

1. Кравцов М.К., Лукшин Е.В. *О нецелочисленных вершинах многогранника многоиндексной аксиальной задачи выбора* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 12. – С. 65–70.
2. Емеличев В.А., Кравцов М.К. *Полиэдральные аспекты многоиндексных аксиальных транспортных задач* // Дискретн. матем. – 1991. – Т. 3. – Вып. 2. – С. 3–24.
3. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. *Многогранники, графы, оптимизация.* – М.: Наука, 1981. – 342 с.
4. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В. *О нецелочисленных вершинах многогранника многоиндексной аксиальной задачи выбора* // Тез. докл. XII международн. конф. “Проблемы теоретической кибернетики”. Ч. 1. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – С. 119.
5. Кравцов М.К., Крачковский А.П. *Асимптотика многоиндексных аксиальных транспортных многогранников* // Дискретн. матем. – 1998. – Т. 10. – № 4. – С. 61–81.

Научно-исследовательский экономический институт Министерства экономики Республики Беларусь

Белорусский государственный университет

Поступили
полный текст 10.01.2000
краткое сообщение 18.10.2000