И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2003 МАТЕМАТИКА № 5 (492)

УДК 517.956.32

О.М. ДЖОХАДЗЕ

ЗАДАЧА ТИПА ДАРБУ В ДВУГРАННОМ УГЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

1. Постановка задачи

В пространстве переменных $x := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R} :=] - \infty, \infty[$ рассмотрим линейное дифференциальное уравнение в частных производных третьего порядка с доминированными младшими членами (напр., [1], с. 103) общего вида

$$u_{x_1x_2x_3} + \sum_{i,j=1,\ i<j}^{3} A_{ij} u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{3} A_i u_{x_i} + Au = F, \tag{1.1}$$

где A_{ij}, A_i, $i, j = 1, 2, 3$, $i < j$, A, F — заданные, а u — искомая действительные функции. Уравнение (1.1) является гиперболическим в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, для которого семейства плоскостей $x_1 = \text{const}$, $x_2 = \text{const}$, $x_3 = \text{const}$ являются характеристическими, а направления, определяемые ортами $e_1 := (1, 0, 0)$, $e_2 := (0, 1, 0)$, $e_3 := (0, 0, 1)$ координатных осей, — бихарактеристическими.

Пусть $S_i^0 : p_i^0(x) := \alpha_i^0 x_1 + \beta_i^0 x_2 + \gamma_i^0 x_3 = 0$, $i = 1, 2$, — произвольно заданные плоскости в пространстве $\mathbb{R}^3$, проходящие через начало координат. Предположим, что $\nu_1^0 \nparallel \nu_2^0$, $|\nu_i^0| \neq 0$, где $\nu_i^0 := (\alpha_i^0, \beta_i^0, \gamma_i^0)$, $i = 1, 2$. Плоскостями S_i^0, $i = 1, 2$, пространство $\mathbb{R}^3$ разбивается на четыре двугранных угла. Уравнение (1.1) будем рассматривать в одном из этих двугранных углов D_0, который без ограничения общности можно считать заданным в виде $D_0 := \{x \in \mathbb{R}^3 : p_i^0(x) > 0,\ i = 1, 2\}$. Относительно области D_0 сделаем следующие два предположения.

Условие а). Ребро $\Gamma_0 := \{x \in \mathbb{R}^3 : p_i^0(x) = 0,\ i = 1, 2\}$ двугранного угла D_0 не параллельно ни одной характеристической плоскости (т. е. в данном случае не лежит ни в одной координатной плоскости). Это равносильно требованию

$$\det \begin{Vmatrix} \alpha_1^0 & \beta_1^0 \\ \alpha_2^0 & \beta_2^0 \end{Vmatrix} \neq 0, \quad \det \begin{Vmatrix} \alpha_1^0 & \gamma_1^0 \\ \alpha_2^0 & \gamma_2^0 \end{Vmatrix} \neq 0, \quad \det \begin{Vmatrix} \beta_1^0 & \gamma_1^0 \\ \beta_2^0 & \gamma_2^0 \end{Vmatrix} \neq 0. \tag{1.2}$$

Отсюда, в частности, следует, что Γ_0 не имеет бихарактеристического направления, т. е. $\nu^0 \nparallel e_i$, $i = 1, 2, 3$, где $\nu^0 := \nu_1^0 \times \nu_2^0$ — векторное произведение векторов ν_1^0 и ν_2^0.

Условие б). Бихарактеристики, проходящие через произвольно фиксированную точку ребра Γ_0 не попадают в область D_0, что равносильно выполнению неравенств $\alpha_1^0 \alpha_2^0 < 0$, $\beta_1^0 \beta_2^0 < 0$, $\gamma_1^0 \gamma_2^0 < 0$.

Для удобства изучения граничних задач для уравнения (1.1) преобразуем область D_0 в область $D_1 := \{y \in \mathbb{R}^3 : y_3 - y_2 > 0,\ y_3 + y_2 > 0\}$ пространства переменных $y := (y_1, y_2, y_3)$. С этой целью введем новые переменные, определяемые равенствами

$$y_1 = x_1, \quad 2y_2 = p_1^0(x) - p_2^0(x), \quad 2y_3 = p_1^0(x) + p_2^0(x). \tag{1.3}$$

Очевидно, в силу (1.2) линейное преобразование (1.3) является невырожденным и устанавливает взаимно однозначное соответствие между областями D_0 и D_1.

В переменных y_1, y_2, y_3, оставляя прежние обозначения для u, A_{ij}, A_i, A, F, $i,j = 1,2,3$, $i<j$, уравнение (1.1) перепишем в виде

$$\frac{\partial^3 u}{\partial\mu_1\partial\mu_2\partial\mu_3} + \sum_{i,j=1,\ i<j}^{3} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial\mu_i\partial\mu_j} + \sum_{i=1}^{3} A_i\frac{\partial u}{\partial\mu_i} + Au = F. \tag{1.4}$$

Здесь

$$\frac{\partial}{\partial\mu_1} := \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{1}{2}(\alpha_1^0 - \alpha_2^0)\frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{1}{2}(\alpha_1^0 + \alpha_2^0)\frac{\partial}{\partial y_3}, \quad \frac{\partial}{\partial\mu_2} := \frac{1}{2}(\beta_1^0 - \beta_2^0)\frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{1}{2}(\beta_1^0 + \beta_2^0)\frac{\partial}{\partial y_3},$$
$$\frac{\partial}{\partial\mu_3} := \frac{1}{2}(\gamma_1^0 - \gamma_2^0)\frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{1}{2}(\gamma_1^0 + \gamma_2^0)\frac{\partial}{\partial y_3}.$$

В области D_1 вместо уравнения (1.4) рассмотрим более общее уравнение

$$\frac{\partial^3 u}{\partial l_1\partial l_2\partial l_3} + \sum_{i,j=1,\ i<j}^{3} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial l_i\partial l_j} + \sum_{i=1}^{3} A_i\frac{\partial u}{\partial l_i} + Au = F. \tag{1.5}$$

Здесь для переменных y_1, y_2, y_3 оставляем прежние обозначения x_1, x_2, x_3 соответственно; $l_i := (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, $|\alpha_i| + |\beta_i| + |\gamma_i| \neq 0$, — произвольные векторы пространства $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{rank}(l_1, l_2, l_3)$=3, $\frac{\partial}{\partial l_i} := \alpha_i\frac{\partial}{\partial x_1} + \beta_i\frac{\partial}{\partial x_2} + \gamma_i\frac{\partial}{\partial x_3}$, $i = 1,2,3$, — производная по направлению. При этом будем считать, что бихарактеристики уравнения (1.5) и область D_1 удовлетворяют условиям а) и б), сформулированным выше для уравнения (1.1) в области D_0.

Пусть $P_0 := P_0(x_0)$, $x_0 := (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ — произвольная фиксированная точка множества $\overline{D}_1 \setminus \Gamma_1$, $\Gamma_1 := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 = x_3 = 0,\ x_1 \in \mathbb{R}\}$, а $S_1 \supset \Gamma_1$ и $S_2 \supset \Gamma_1$ — плоские грани угла D_1, т. е. $\partial D_1 := S_1 \cup S_2$, $S_1 := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 = x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}_+\}$, $S_2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 = -x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}_+\}$, $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$. Из точки P_0 выпустим бихарактеристические лучи $L_i(P_0)$ уравнения (1.5) в сторону убывающих значений аппликаты x_3 текущих точек $L_i(P_0)$ до пересечения с одной из граней S_1 или S_2 в точках O_i, $i = 1,2,3$. Предположим, что эти три точки не лежат на одной грани. Без ограничения общности будем считать, что точки O_1 и O_2 лежат на S_1, а точка O_3 — на S_2, причем O_1 ближе к Γ_1, чем O_2.

В точке P_0 через каждую пару векторов (l_1, l_2), (l_1, l_3) и (l_2, l_3) проведем плоскости P_{l_1,l_2}, P_{l_1,l_3} и P_{l_2,l_3}, точки пересечения которых с ребром Γ_1 обозначим соответственно через O_4, O_5 и O_6. Легко показать, что O_4 всегда лежит вне отрезка O_5O_6 на оси x_1. Замыкание пятигранника с вершинами в точках P_0, O_2, O_4, O_3, O_6 обозначим через $\overline{D}$, а треугольников с вершинами в точках O_4, O_6, O_2 и O_4, O_6, O_3 — соответственно через Δ_1 и Δ_2.

Для уравнения (1.5) рассмотрим задачу типа Дарбу в следующей постановке: в области D найти регулярное решение u уравнения (1.5), удовлетворяющее граничным условиям

$$\left(\sum_{i,j=1,\ i<j}^{3} M_{ij}^k\frac{\partial^2 u}{\partial l_i\partial l_j} + \sum_{i=1}^{3} M_i^k\frac{\partial u}{\partial l_i} + M^k u\right)\Big|_{\Delta_{\varkappa(k)}} = f_k, \quad k = 1,2,3, \tag{1.6}$$

где M_{ij}^k, M_i^k, M^k, f_k, $i,j,k = 1,2,3$, $i<j$, — заданные действительные функции; $\varkappa(k) = 1$ при $k = 1,2$ и $\varkappa(3) = 2$.

Регулярным решением уравнения (1.5) называется функция u, непрерывная в D вместе со своими частными производными $\frac{\partial^{i+j+k}u}{\partial l_1^i\partial l_2^j\partial l_3^k}$, $i,j,k = 0,1$, и удовлетворяющая уравнению (1.5) в D.

Отметим, что задача (1.5), (1.6) представляет собой естественное развитие известных классических постановок задач Гурса и Дарбу на плоскости для линейных гиперболических уравнений второго и третьего порядка (см., напр., [2], [3] (с. 12), [4], [5]). Некоторые многомерные варианты этих задач, а также систем уравнений первого порядка в двугранном угле изучались, например, в [3] (с. 84), [6], [7] (гл. 1, § 13, с. 27) – [11].

Начально-граничным и характеристическим задачам для широкого класса гиперболических уравнений третьего порядка в многомерных областях с доминированными младшими членами посвящены также работы [12]–[14].

Замечание 1. Отметим, что гиперболическая природа рассматриваемой задачи учтена наличием в нем лишь производных более низкого порядка, чем $\frac{\partial^3 u}{\partial l_1 \partial l_2 \partial l_3}$.

Замечание 2. Поскольку бихарактеристики уравнения (1.5), выпущенные из произвольной точки P области D в сторону убывающих значений аппликаты x_3 текущих точек $L_i(P)$, $i=1,2,3$, пересекают грань S_1 два раза, а S_2 — один раз, то соответственно в граничных условиях (1.6) на Δ_1 берутся два условия, а на Δ_2 — одно условие.

Ортогональные проекции треугольников Δ_1 и Δ_2 на плоскости независимых переменных x_1, x_3 обозначим теми же символами. Для следов функций M_{ij}^k, M_i^k, M^k, f_k, $i,j,k=1,2,3$, $i<j$, на соответствующих множествах оставляем прежние обозначения, которыми и воспользуемся ниже.

Введем функциональные пространства

$$\overset{0}{C}_\alpha(\overline{D}) := \{u \in C(\overline{D}) : u\big|_\Gamma = 0,\ \sup_{x\in\overline{D}\setminus\Gamma} \rho^{-\alpha}|u(x)| < \infty\},$$

$$\overset{0}{C}_\alpha(\Delta_i) := \{\varphi \in C(\Delta_i) : \varphi\big|_{\Gamma_2} = 0,\ \sup_{(x_1,x_3)\in\Delta_i\setminus\Gamma_2} x_3^{-\alpha}|\varphi(x_1,x_3)| < \infty\},$$

где $\Gamma := \overline{D}\cap\Gamma_1$, $\Gamma_2 := \Delta_i \cap \Gamma_3$, $i=1,2$, $\Gamma_3 := \{(x_1,x_3)\in\mathbb{R}^2 : x_1\in\mathbb{R},\ x_3=0\}$, ρ — расстояние от точки $x\in\overline{D}\setminus\Gamma_1$ до ребра Γ_1 области D_1, а параметр $\alpha := \mathrm{const} \geq 0$; $C_0 := \overset{0}{C}_0$.

Очевидно, относительно норм

$$\|u\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\overline{D})} := \sup_{x\in\overline{D}\setminus\Gamma} \rho^{-\alpha}|u(x)|, \quad \|\varphi\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\Delta_i)} := \sup_{(x_1,x_3)\in\Delta_i\setminus\Gamma_2} x_3^{-\alpha}|\varphi(x_1,x_3)|$$

пространства $\overset{0}{C}_\alpha(\overline{D})$ и $\overset{0}{C}_\alpha(\Delta_i)$, $i=1,2$, являются банаховыми.

Замечание 3. Ввиду равномерной оценки $1 \leq \frac{\rho}{x_3} \leq \sqrt{2}$, $x\in D_1$ в определении пространства $\overset{0}{C}_\alpha(\overline{D})$ величину ρ можно заменить переменной x_3, чем и воспользуемся ниже.

Легко видеть, что принадлежность функций $u\in C_0(\overline{D})$ и $\varphi\in C_0(\Delta_i)$ соответственно пространствам $\overset{0}{C}_\alpha(\overline{D})$ и $\overset{0}{C}_\alpha(\Delta_i)$ равносильна выполнению неравенств

$$|u(x)| \leq c x_3^\alpha, \quad x\in\overline{D}, \quad |\varphi(x_1,x_3)| \leq c x_3^\alpha, \quad (x_1,x_3)\in\Delta_i, \quad i=1,2.\text{[1]} \tag{1.7}$$

Граничную задачу (1.5), (1.6) будем исследовать в пространстве Банаха

$$\overset{0}{C}{}^{\mathbf{l}}_\alpha(\overline{D}) := \left\{u : \frac{\partial^{i+j+k}u}{\partial l_1^i \partial l_2^j \partial l_3^k} \in \overset{0}{C}_\alpha(\overline{D}),\quad i,j,k=0,1\right\},\quad \mathbf{l} := (l_1,l_2,l_3),$$

относительно нормы

$$\|u\|_{\overset{0}{C}{}^{\mathbf{l}}_\alpha(\overline{D})} := \sum_{i,j,k=0}^{1} \left\|\frac{\partial^{i+j+k}u}{\partial l_1^i \partial l_2^j \partial l_3^k}\right\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\overline{D})}$$

при условиях

$$A_{ij}, A_i, A \in C(\overline{D}), \quad M_{ij}^k, M_i^k, M^k \in C(\Delta_{\varkappa(k)}), \quad f_k \in \overset{0}{C}_\alpha(\Delta_{\varkappa(k)}), \quad i,j,k=1,2,3, \quad i<j, \quad F\in\overset{0}{C}_\alpha(\overline{D}).$$

[1]Здесь и ниже всюду далее через c обозначим положительную постоянную, конкретное значение которой для наших исследований принципиального значения не имеет.

2. Интегральное представление функции через ее смешанные производные второго порядка

В этом параграфе дается формула интегрального представления функции u в двугранном угле D_1 через ее смешанные производные второго порядка и по заданным значениям функции u и ее производных первого порядка на ребре Γ_1 угла D_1.

Лемма 1. *В замкнутом двугранном угле $\overline{D}_1$ существует единственная функция $u \in \{u : \frac{\partial^{i+j+k}u}{\partial l_1^i \partial l_2^j \partial l_3^k} \in C(\overline{D}_1),\ i,j,k = 0,1\}$, удовлетворяющая переопределенной системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial l_i \partial l_j} = v_{ij}, \quad i < j, \tag{2.1}$$

и условиям

$$u\big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial l_i}\Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad i,j = 1,2,3. \tag{2.2}$$

Здесь v_{ij} — заданные функции такие, что $v_{ij}, \frac{\partial v_{ij}}{\partial l_k} \in C(\overline{D}_1)$, $i,j,k = 1,2,3$, $i < j$, $k \neq i,j$; $\frac{\partial v_{12}}{\partial l_3}(x) = \frac{\partial v_{13}}{\partial l_2}(x) = \frac{\partial v_{23}}{\partial l_1}(x)$, $x \in \overline{D}_1$.

Доказательство. Пусть $P := P(x)$ — произвольная фиксированная точка из $\overline{D}_1 \setminus \Gamma_1$. Очевидно, в силу условия а) на Γ_1 плоскость P_{l_i,l_j}, проходящая через точку P параллельно паре векторов l_i, l_j, имеет единственную точку пересечения $P^k := P^k(x^k)$, $x^k := (x_1^k, 0, 0)$, $i,j,k = 1,2,3$, $k \neq i,j$, с ребром Γ_1. Элементарные вычисления дают, что $x_1^k = x_1 + \delta_{ij}x_2 + \tau_{ij}x_3$, где $\delta_{ij} := (\alpha_j\gamma_i - \alpha_i\gamma_j)(\beta_i\gamma_j - \beta_j\gamma_i)^{-1}, \tau_{ij} := (\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i)(\beta_i\gamma_j - \beta_j\gamma_i)^{-1}$, $i,j,k = 1,2,3$, $k \neq i,j$.

Обозначим через $L_k(P, P^k)$ прямую, проходящую через точки P и P^k, и пусть $\nu_k(x) := PP^k = (x_1 - x_1^k, x_2, x_3)$ — его направляющий вектор. В силу единственности разложения вектора $\nu_k(x)$ в системе векторов l_i, l_j по формуле

$$\nu_k(x) = x_3\nu_{ij}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)l_i + x_3\nu_{ji}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)l_j,$$

где $\nu_{ij}(t) := (\gamma_j t - \beta_j)(\beta_i\gamma_j - \beta_j\gamma_i)^{-1}$, $|t| \leq 1$, легко проверить, что

$$\frac{\partial}{\partial \nu_k(x)} = x_3\nu_{ij}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)\frac{\partial}{\partial l_i} + x_3\nu_{ji}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)\frac{\partial}{\partial l_j}.$$

Отсюда, в свою очередь, находим

$$\frac{\partial}{\partial \nu_k(x)}\left(\frac{\partial u}{\partial l_k}(y)\right) = x_3\nu_{ij}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)v_{ik}(y) + x_3\nu_{ji}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)v_{jk}(y), \tag{2.3}$$

где $y := (y_1, y_2, y_3) \in \overline{D}_1 \setminus \Gamma_1$, $i,j,k = 1,2,3$, $k \neq i,j$. Здесь $v_{ij} = v_{ji}$ при $i > j$, $i,j = 1,2,3$.

Интегрируя равенство (2.3) вдоль прямой $L_k(P, P^k)$ в сторону возрастающих значений переменной y_3 от точки P^k до точки P, в силу второго равенства (2.2) находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial l_k}(x) = \nu_{ij}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)\int_0^{x_3} v_{ik}\left[x_1^k - \left(\delta_{ij}\frac{x_2}{x_3} + \tau_{ij}\right)y_3, \frac{x_2}{x_3}y_3, y_3\right]dy_3 + \\ + \nu_{ji}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)\int_0^{x_3} v_{jk}\left[x_1^k - \left(\delta_{ij}\frac{x_2}{x_3} + \tau_{ij}\right)y_3, \frac{x_2}{x_3}y_3, y_3\right]dy_3,\end{aligned} \tag{2.4}$$

где $x \in \overline{D}_1 \setminus \Gamma_1$, $i,j,k = 1,2,3$, $k \neq i,j$.

В силу произвольности выбора точки P формула (2.4) дает представление функции $\frac{\partial u}{\partial l_k}(x)$, $x \in \overline{D}_1 \setminus \Gamma_1$, через заданные функций v_{ik} и v_{jk}, $i,j,k = 1,2,3$, $k \neq i,j$.

Определим теперь значение функции u в точке $P := P(x) \in \overline{D}_1 \setminus \Gamma_1$ при помощи заданных функций v_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, $i < j$. Интегрируя очевидное равенство

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_1(x)}(y) = x_3 \nu_{23}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)\frac{\partial u}{\partial l_2}(y) + x_3 \nu_{32}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)\frac{\partial u}{\partial l_3}(y), \quad y \in \overline{D}_1 \setminus \Gamma_1,$$

вдоль прямой $L_1(P, P^1)$ в сторону возрастающих значений переменной y_3 от точки P^1 до точки P, в силу первого равенства из (2.2) при $x \in \overline{D}_1 \setminus \Gamma_1$ находим

$$u(x) = \nu_{23}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)\int_0^{x_3} \frac{\partial u}{\partial l_2}\left(\frac{x_1}{x_3}y_3, \frac{x_2}{x_3}y_3, y_3\right)dy_3 + \nu_{32}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)\int_0^{x_3} \frac{\partial u}{\partial l_3}\left(\frac{x_1}{x_3}y_3, \frac{x_2}{x_3}y_3, y_3\right)dy_3. \tag{2.5}$$

Окончательно, с учетом (2.4) и (2.5) получаем, что $u(x)$ при $x \in \overline{D}_1 \setminus \Gamma_1$ выражается при помощи заданных функций v_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, $i < j$. $\square$

Замечание 4. Очевидно, однородность условий в равенствах (2.2) является несущественной.

Пусть Ω — подмногообразие из пространства $\mathbb{R}^3 \cap \{x_3 \geq 0\}$, а $X(\Omega)$ — некоторое линейное пространство функций, определенных на Ω. Будем говорить, что линейный оператор $T : X(\Omega) \to X(\Omega)$ является оператором типа Вольтерра класса V в сторону возрастающих значений переменной $x_3 \geq 0$, если из $u\big|_{\Omega \cap \{y_3 \leq x_3\}} = 0$, где $\inf\limits_{y \in \Omega} y_3 \leq x_3 \leq \sup\limits_{y \in \Omega} y_3$, $u \in X(\Omega)$, вытекает, что $Tu\big|_{\Omega \cap \{y_3 \leq x_3\}} = 0$ и для любого $\beta \geq 0$ и $u \in X(\Omega)$ справедлива оценка

$$|(Tu)(x)| \leq \frac{C(T)}{\beta + 1} x_3^{\beta+1} \sup_{y \in \Omega \cap \{y_3 \leq x_3\}} y_3^{-\beta}|u(y)| \tag{2.6}$$

с положительной постоянной $C(T)$, не зависящей от β. В этом случае будем писать, что $T \in V$.

Отметим, что все встречающиеся ниже линейные интегральные операторы обладают указанным выше свойством, т. е. принадлежат классу V.

Замечание 5. Ввиду ограниченности величины $\left|\frac{x_2}{x_3}\right|$ всюду в двугранном угле D_1 легко можно показать, что:

а$'$) представления (2.4) и (2.5) имеют место всюду в $\overline{D}_1$ в указанном классе функций;

б$'$) операторы, определяемые правыми частями равенств (2.4) и (2.5), также принадлежат классу V.

3. Эквивалентная редукция задачи (1.5), (1.6) к интегро-функциональному уравнению

В силу обозначений (2.1) и равенств (2.4), (2.5) задача (1.5), (1.6) в области D эквивалентным образом перепишется в виде граничной задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных функций v_{12}, v_{13}, v_{23}

$$\frac{\partial v_{ij}}{\partial l_k} + \sum_{i,j=1,\, i<j}^{3} A_{ij} v_{ij} + T_k(v_{12}, v_{13}, v_{23}) = F, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad i < j, \quad k \neq i, j, \tag{3.1}$$

$$\left(\sum_{i,j=1,\, i<j}^{3} M_{ij}^k v_{ij} + T_{k+3}(v_{12}, v_{13}, v_{23})\right)\Big|_{\Delta_{\varkappa(k)}} = f_k, \quad k = 1, 2, 3, \tag{3.2}$$

$T_i \in V$, $i = \overline{1, 6}$.

Эквивалентность исходной задачи (1.5), (1.6) и задачи (3.1), (3.2) является очевидным следствием леммы 1.

Из произвольной точки $P := P(x) \in \overline{D}$ выпустим бихарактеристические лучи $L_i(P)$ уравнения (1.5) в сторону убывающих значений аппликаты x_3 текущих точек $L_i(P)$, $i = 1,2,3$. Пусть P_i — точки пересечения лучей $L_i(P)$, $i = 1,2,3$, с гранями S_1 и S_2.

Полагая

$$\varphi_{12}(x_1,x_3) := v_{12}(x)\big|_{x_2=-x_3}, \quad (x_1,x_3) \in \Delta_2, \quad \varphi_{i3}(x_1,x_3) := v_{i3}\big|_{x_2=x_3}, \quad (x_1,x_3) \in \Delta_1, \quad i=1,2,$$

и интегрируя уравнения системы (3.1) вдоль соответствующих бихарактеристик от точки P_i до точки P при $x \in \overline{D}$, получаем

$$\begin{gathered} v_{12}(x) = \varphi_{12}(\sigma(x_1, x_2+x_3, x_3; -\alpha_3(\gamma_3+\beta_3)^{-1}, -\gamma_3(\gamma_3+\beta_3)^{-1})) + T_7(v_{12},v_{13},v_{23})(x) + F_1(x), \\ v_{13}(x) = \varphi_{13}(\sigma(x_1, x_2-x_3, x_3; \alpha_2(\gamma_2-\beta_2)^{-1}, \gamma_2(\gamma_2-\beta_2)^{-1})) + T_8(v_{12},v_{13},v_{23})(x) + F_2(x), \\ v_{23}(x) = \varphi_{23}(\sigma(x_1, x_2-x_3, x_3; \alpha_1(\gamma_1-\beta_1)^{-1}, \gamma_1(\gamma_1-\beta_1)^{-1})) + T_9(v_{12},v_{13},v_{23})(x) + F_3(x), \end{gathered} \tag{3.3}$$

где $\sigma(x;\lambda_1,\lambda_2) := (x_1+\lambda_1 x_2, x_3+\lambda_2 x_2)$, $x \in \overline{D}$, $T_{i+6} \in V$, а F_i, $i=1,2,3$, — известные функции. Подставляя выражения для v_{12}, v_{13}, v_{23} из равенств (3.3) в граничные условия (3.2), будем иметь

$$\begin{gathered} M_{12}^k(x_1,x_3)\varphi_{12}(\sigma(x_1,2x_3,x_3;-\alpha_3(\gamma_3+\beta_3)^{-1},-\gamma_3(\gamma_3+\beta_3)^{-1})) + M_{13}^k(x_1,x_3)\varphi_{13}(x_1,x_3) + \\ +M_{23}^k(x_1,x_3)\varphi_{23}(x_1,x_3) + T_{k+9}(v_{12},v_{13},v_{23})(x_1,x_3) = \widetilde{f}_k(x_1,x_3), \quad (x_1,x_3) \in \Delta_1, \quad k=1,2, \end{gathered} \tag{3.4}$$

$$\begin{gathered} M_{12}^3(x_1,x_3)\varphi_{12}(x_1,x_3) + M_{13}^3(x_1,x_3)\varphi_{13}(\sigma(x_1,-2x_3,x_3;\alpha_2(\gamma_2-\beta_2)^{-1},\gamma_2(\gamma_2-\beta_2)^{-1})) + \\ +M_{23}^3(x_1,x_3)\varphi_{23}(\sigma(x_1,-2x_3,x_3;\alpha_1(\gamma_1-\beta_1)^{-1},\gamma_1(\gamma_1-\beta_1)^{-1})) + \\ +T_{12}(v_{12},v_{13},v_{23})(x_1,x_3) = \widetilde{f}_3(x_1,x_3), \quad (x_1,x_3) \in \Delta_2, \end{gathered} \tag{3.5}$$

где $T_{i+9} \in V$, $i=1,2,3$, а $\widetilde{f}_k \in \overset{0}{C}_\alpha(\Delta_{\varkappa(k)})$, $k=1,2,3$, — известные функции. Уравнения (3.4) перепишем следующим образом:

$$\begin{gathered} M_{13}^k(x_1,x_3)\varphi_{13}(x_1,x_3) + M_{23}^k(x_1,x_3)\varphi_{23}(x_1,x_3) = \widetilde{f}_k(x_1,x_3) - M_{12}^k(x_1,x_3)\varphi_{12}(\sigma(x_1,2x_3,x_3; \\ -\alpha_3(\gamma_3+\beta_3)^{-1},-\gamma_3(\gamma_3+\beta_3)^{-1})) - T_{k+9}(v_{12},v_{13},v_{23})(x_1,x_3), \quad (x_1,x_3) \in \Delta_1, \quad k=1,2. \end{gathered} \tag{3.6}$$

В предположении, что

$$\Delta(x_1,x_3) := \det \begin{Vmatrix} M_{13}^1 & M_{23}^1 \\ M_{13}^2 & M_{23}^2 \end{Vmatrix} (x_1,x_3) \neq 0, \quad (x_1,x_3) \in \Delta_1, \tag{3.7}$$

из системы (3.6) находим

$$\begin{gathered} \varphi_{i3}(x_1,x_3) = a_i(x_1,x_3) - b_i(x_1,x_3)\varphi_{12}(\sigma(x_1,2x_3,x_3;-\alpha_3(\gamma_3+\beta_3)^{-1},-\gamma_3(\gamma_3+\beta_3)^{-1})) + \\ +T_{i+12}(v_{12},v_{13},v_{23})(x_1,x_3), \quad (x_1,x_3) \in \Delta_1, \end{gathered} \tag{3.8}$$

где $T_{i+12} \in V$, а $b_i \in C(\Delta_1)$, $a_i \in \overset{0}{C}_\alpha(\Delta_1)$, $i=1,2$, — известные функции. Пусть

$$M_{12}^3(x_1,x_3) \neq 0, \quad (x_1,x_3) \in \Delta_2. \tag{3.9}$$

Подставляя полученные выражения для функций φ_{i3}, $i=1,2$, из (3.8) в равенство (3.5) и учитывая (3.9), относительно $\varphi_{12} : \Delta_2 \to \Delta_2$ при $(x_1,x_3) \in \Delta_2$ получаем интегро-функциональное уравнение

$$\varphi_{12}(x_1,x_3) - \sum_{i=1}^{2} G_i(x_1,x_3)\varphi_{12}(J_i(x_1,x_3)) + T_{15}(v_{12},v_{13},v_{23})(x_1,x_3) = g(x_1,x_3), \tag{3.10}$$

где $T_{15} \in V$, а $G_i \in C(\Delta_2)$, $i=1,2$, $g \in \overset{0}{C}_\alpha(\Delta_2)$ — вполне определенные функции. Здесь отображения $J_i : \Delta_2 \to \Delta_2$, $i=1,2$, действуют по формулам

$$J_i : (x_1,x_3) \to (x_1+\delta_i x_3, \tau_i x_3), \quad (x_1,x_3) \in \Delta_2,$$

где

$$\delta_i := \frac{2\alpha_i(\beta_3+\gamma_3) - 2\alpha_3(\beta_i+\gamma_i)}{(\beta_i-\gamma_i)(\beta_3+\gamma_3)}, \quad \tau_i := \frac{(\beta_3-\gamma_3)(\beta_i+\gamma_i)}{(\beta_i-\gamma_i)(\beta_3+\gamma_3)}, \quad i = 1,2.$$

Замечание 6. При сделанных выше допущениях относительно бихарактеристических направлений легко установить, что $0 < \tau_i < 1$, $i = 1,2$.

Замечание 7. Очевидно, при выполнении условий (3.7), (3.9) задача (1.5), (1.6) в классе $\overset{0}{C}{}^1_\alpha(\overline{D})$ эквивалентна уравнению (3.10) относительно неизвестной функции $\varphi_{12} \in \overset{0}{C}_\alpha(\Delta_2)$.

4. Исследование интегро-функционального уравнения (3.10)

Введем следующие обозначения:

$$(K\varphi_{12})(x_1,x_3) := \varphi_{12}(x_1,x_3) - \sum_{i=1}^{2} G_i(x_1,x_3)\varphi_{12}(J_i(x_1,x_3)), \quad (x_1,x_3) \in \Delta_2, \tag{4.1}$$

$$h(\rho) := \sum_{i=1}^{2} \eta_i \tau_i^\rho, \quad \eta_i := \sup_{x_1 \in [O_4 O_6]} |G_i(x_1,0)|, \quad i = 1,2, \quad \rho \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Пусть для некоторого значения индекса i число η_i, $i = 1,2$, отлично от нуля. В этом случае в силу замечания 6 функция $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ является непрерывной и строго монотонно убывающей на $\mathbb{R}$, причем $\lim\limits_{\rho\to-\infty} h(\rho) = \infty$ и $\lim\limits_{\rho\to\infty} h(\rho) = 0$. Поэтому существует единственное действительное число ρ_0 такое, что $h(\rho_0) = 1$. Если же все величины $\eta_i = 0$, $i = 1,2$, то положим $\rho_0 = -\infty$.

Лемма 2. *Если $\alpha > \rho_0$, то оператор K, определяемый из* (4.1), *однозначно обратим в пространстве $\overset{0}{C}_\alpha(\Delta_2)$ и для функции $\varphi_{12} = K^{-1}g$ имеет место оценка*

$$|\varphi_{12}(x_1,x_3)| = |(K^{-1}g)(x_1,x_3)| \le C_1 x_3^\alpha \|g\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\Delta_2 \cap \{y_3 \le x_3\})}, \quad (x_1,x_3) \in \Delta_2, \tag{4.3}$$

где положительная постоянная C_1 не зависит от функции g.

Доказательство. Из условия $\alpha > \rho_0$ и определения функции h из (4.2) следует

$$h(\alpha) = \sum_{i=1}^{2} \eta_i \tau_i^\alpha < 1. \tag{4.4}$$

В силу неравенства (4.4) и непрерывности функций G_i, $i = 1,2$, найдутся такие положительные числа ε ($\varepsilon < x_3^0$) и δ, что при $(x_1,x_3) \in \Delta_2 \cap \{0 \le x_3 \le \varepsilon\}$ будут справедливы неравенства

$$|G_i(x_1,x_3)| \le \eta_i + \delta, \quad i = 1,2, \tag{4.5}$$

$$\gamma := \sum_{i=1}^{2} (\eta_i + \delta)\tau_i^\alpha < 1. \tag{4.6}$$

Согласно замечанию 6 существует такое натуральное число r_0, что при $r \ge r_0$ выполняются

$$\tau_{i_r}\tau_{i_{r-1}} \cdots \tau_{i_1} x_3 \le \varepsilon, \quad 0 \le x_3 \le x_3^0, \tag{4.7}$$

где $1 \le i_s \le 2$, $s = 1, \dots, r$.

Введем операторы Λ и K^{-1}, действующие по формулам

$$(\Lambda\varphi_{12})(x_1,x_3) := \sum_{i=1}^{2} G_i(x_1,x_3)\varphi_{12}(J_i(x_1,x_3)), \quad (x_1,x_3) \in \Delta_2, \quad K^{-1} := I + \sum_{r=1}^{\infty} \Lambda^r,$$

где I — тождественный оператор. Очевидно, оператор K^{-1} является формально обратным к оператору K, определенному равенством (4.1). Поэтому достаточно показать непрерывность оператора $K^{-1} : \overset{0}{C}_\alpha(\Delta_2) \to \overset{0}{C}_\alpha(\Delta_2)$.

Действительно, легко видеть, что выражение $\Lambda^r g$ есть сумма, состоящая из слагаемых вида

$$I_{i_1\cdots i_r}(x_1,x_3) := G_{i_1}(x_1,x_3)G_{i_2}(J_{i_1}(x_1,x_3))G_{i_3}\Big(J_{i_2}(J_{i_1}(x_1,x_3))\Big)\cdots\times$$
$$\times G_{i_r}\Big(J_{i_{r-1}}(J_{i_{r-2}}(\cdots(J_{i_1}(x_1,x_3))\cdots))\Big)g\Big(J_{i_r}(J_{i_{r-1}}(\cdots(J_{i_1}(x_1,x_3))\cdots))\Big),$$

где $1 \le i_s \le 2$, $s = 1,\dots,r$.

Пусть $\eta := \max\limits_{1\le i\le 2}\sup\limits_{(x_1,x_3)\in\Delta_2}\big|G_i(x_1,x_3)\big|$. В силу (4.5), (4.7) и замечания 6 при $r > r_0$, $g \in \overset{0}{C}_\alpha(\Delta_2)$ имеем

$$\big|I_{i_1\cdots i_r}(x_1,x_3)\big| = \big|G_{i_1}(x_1,x_3)\big|\cdots\Big|G_{i_{r_0}}\Big(J_{i_{r_0-1}}(J_{i_{r_0-2}}(\cdots(J_{i_1}(x_1,x_3))\cdots))\Big)\Big|\Big|G_{i_{r_0+1}}\Big(J_{i_{r_0}}(J_{i_{r_0-1}}(\cdots(J_{i_1}(x_1,$$
$$x_3))\cdots))\Big)\Big|\cdots\Big|G_{i_r}\Big(J_{i_{r-1}}(J_{i_{r-2}}(\cdots(J_{i_1}(x_1,x_3))\cdots))\Big)\Big|\Big|g\Big(J_{i_r}(J_{i_{r-1}}(\cdots(J_{i_1}(x_1,x_3))\cdots))\Big)\Big| \le$$
$$\le \eta^{r_0}(\eta_{i_{r_0+1}}+\delta)\cdots(\eta_{i_r}+\delta)(\tau_{i_r}\tau_{i_{r-1}}\cdots\tau_{i_1}x_3)^\alpha\|g\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\Delta_2\cap\{y_3\le x_3\})} \le \eta^{r_0}\Big(\prod_{s=r_0+1}^{r}(\eta_{i_s}+\delta)\Big)\times$$
$$\times\Big(\prod_{s=r_0+1}^{r}\tau_{i_s}^\alpha\Big)x_3^\alpha\|g\|_{\overset{0}{C}\alpha(\Delta_2\cap\{y_3\le x_3\})} = \eta^{r_0}\Big(\prod_{s=r_0+1}^{r}(\eta_{i_s}+\delta)\tau_{i_s}^\alpha\Big)x_3^\alpha\|g\|_{\overset{0}{C}\alpha(\Delta_2\cap\{y_2\le x_3\})}, \tag{4.8}$$

а при $1 \le r \le r_0$

$$\big|I_{i_1\cdots i_r}(x_1,x_3)\big| \le \eta^r(\tau_{i_r}\tau_{i_{r-1}}\cdots\tau_{i_1}x_3)^\alpha\|g\|_{\overset{0}{C}\alpha(\Delta_2\cap\{y_3\le x_3\})} \le \eta^r x_3^\alpha\|g\|_{\overset{0}{C}\alpha(\Delta_2\cap\{y_3\le x_3\})}. \tag{4.9}$$

Согласно (4.8), (4.9) и (4.6) при $r > r_0$ получаем

$$|(\Lambda^r g)(x_1,x_3)| = \Big|\sum_{i_1,\dots,i_r} I_{i_1\cdots i_r}(x_1,x_3)\Big| \le \eta^{r_0}\Big(\sum_{i_1,\dots,i_{r_0}}1\Big)^{r_0}\Big[\sum_{i=1}^{2}(\eta_i+\delta)\tau_i^\alpha\Big]^{r-r_0}x_3^\alpha\|g\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\Delta_2\cap\{y_3\le x_3\})} \le$$
$$\le C_2\gamma^r x_3^\alpha\|g\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\Delta_2\cap\{y_3\le x_3\})}, \tag{4.10}$$

а при $1 \le r \le r_0$

$$|(\Lambda^r g)(x_1,x_3)| \le C_3 x_3^\alpha\|g\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\Delta_2\cap\{y_3\le x_3\})}, \tag{4.11}$$

где $C_2 := \eta^{r_0}\gamma^{-r_0}\Big(\sum\limits_{i_1,\dots,i_{r_0}}1\Big)^{r_0}$, $C_3 := \eta^r\Big(\sum\limits_{i_1,\dots,i_r}1\Big)$.

Из (4.10) и (4.11) окончательно находим

$$|\varphi_{12}(x_1,x_3)| \le |g(x_1,x_3)| + \sum_{r=1}^{r_0}|(\Lambda^r g)(x_1,x_3)| + \sum_{r=r_0+1}^{\infty}|(\Lambda^r g)(x_1,x_3)| \le$$
$$\le (1 + C_3r_0 + C_2\gamma^{r_0+1}(1-\gamma)^{-1})x_3^\alpha\|g\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\Delta_2\cap\{y_3\le x_3\})} = C_4x_3^\alpha\|g\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\Delta_2\cap\{y_3\le x_3\})},$$

где

$$C_4 := 1 + C_3r_0 + C_2\gamma^{r_0+1}(1-\gamma)^{-1}.$$

Отсюда следует непрерывность оператора K^{-1} в пространстве $\overset{0}{C}_\alpha(\Delta_2)$ и справедливость леммы 2. □

Замечание 8. Так как в определении функционального пространства $\overset{0}{C}_\alpha$ $\alpha \geq 0$, то при $\rho_0 < 0$ будем считать, что оператор K из (4.1) однозначно обратим в пространстве $\overset{0}{C}_\alpha(\Delta_2)$ при любом $\alpha \geq 0$.

Замечание 9. Величина ρ_0 зависит только от функции M_{ij}^k, $i, j, k = 1, 2, 3$, $i < j$.

5. Основной результат

Теорема. *Пусть выполнены условия* (3.7) *и* (3.9). *Тогда задача* (1.5), (1.6) *однозначно разрешима в пространстве* $\overset{0}{C}{}^1_\alpha(\overline{D})$ *при* $\alpha > \rho_0$.

Доказательство. Будем решать систему уравнений (3.3), (3.8), (3.10) относительно неизвестных v_{ij}, φ_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, $i < j$, методом последовательных приближений.

Положим

$$v_{ij}^0 \equiv 0, \quad \varphi_{ij}^0 \equiv 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i < j, \tag{5.1}$$

$$v_{12}^n = \varphi_{12}^n + T_7(v_{12}^{n-1}, v_{13}^{n-1}, v_{23}^{n-1}) + F_1, \tag{5.2}$$

$$v_{i3}^n = \varphi_{i3}^n + T_{i+7}(v_{12}^{n-1}, v_{13}^{n-1}, v_{23}^{n-1}) + F_{i+1}, \quad i = 1, 2, \tag{5.3}$$

а функции φ_{ij}^n, $i, j = 1, 2, 3$, $i < j$, будем определять из уравнений

$$K\varphi_{12}^n + T_{15}(v_{12}^{n-1}, v_{13}^{n-1}, v_{23}^{n-1}) = g, \tag{5.4}$$

$$\varphi_{i3}^n = a_i - b_i\varphi_{12}^n + T_{i+12}(v_{12}^{n-1}, v_{13}^{n-1}, v_{23}^{n-1}), \quad n \geq 1, \quad i = 1, 2, \tag{5.5}$$

где оператор K действует по формуле (4.1).

Принимая во внимание лемму 2, замечание 6 и (2.6), покажем, что справедливы оценки

$$|(v_{ij}^{n+1} - v_{ij}^n)(x)| \leq M^* \frac{M_*^n}{n!} x_3^{n+\alpha}, \quad |(\varphi_{ij}^{n+1} - \varphi_{ij}^n)(x_1, x_3)| \leq M^* \frac{M_*^n}{n!} x_3^{n+\alpha}, \tag{5.6}$$

где $M_* = M_*(A_{ij}, A_i, A, M_{ij}^k, M_i^k, M^k, C_1) > 0$, $M^* = M^*(F, f_i, M_{ij}^k, M_i^k, M^k, C_1) > 0$, $i < j$, $i, j, k = 1, 2, 3$, $n = 0, 1, \ldots$, а C_1 — постоянная из (4.3).

В силу требований на F, f_i, $i = 1, 2, 3$, имеем $g \in \overset{0}{C}_\alpha(\Delta_2)$, $\alpha \geq 0$. Поэтому с учетом (1.7) справедлива следующая оценка: $|g(x_1, x_3)| \leq \Theta x_3^\alpha$ или $x_3^{-\alpha}|g(x_1, x_3)| \leq \Theta$, $\alpha \geq 0$, $\Theta := \mathrm{const} \geq 0$, $(x_1, x_3) \in \Delta_2$. Если же в этом неравенстве возьмем вместо x_3 переменную $y_3 \in [0, x_3]$, то согласно определению нормы в пространстве $\overset{0}{C}_\alpha(\Delta_2 \cap \{y_3 \leq x_3\})$ получим

$$\|g\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\Delta_2 \cap \{y_3 \leq x_3\})} \leq \Theta, \quad 0 \leq x_3 \leq x_3^0. \tag{5.7}$$

В силу (5.1) и (4.3), из (5.4), (5.7) будем иметь

$$|(\varphi_{12}^1 - \varphi_{12}^0)(x_1, x_3)| = |\varphi_{12}^1(x_1, x_3)| = |(K^{-1}g)(x_1, x_3)| \leq C_1 x_3^\alpha \|g\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\Delta_2 \cap \{y_3 \leq x_3\})} \leq \Theta C_1 x_3^\alpha. \tag{5.8}$$

С учетом (5.1) и (5.8) из равенства (5.5) находим

$$|(\varphi_{i3}^1 - \varphi_{i3}^0)(x_1, x_3)| = |\varphi_{i3}^1(x_1, x_3)| \leq (a_i + \Theta b_i C_1) x_3^\alpha, \tag{5.9}$$

где $a_i := \|a_i\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\Delta_1)}$, $b_i := \max\limits_{(x_1, x_3) \in \Delta_1} |b_i(x_1, x_3)|$, $i = 1, 2$. Далее, из (5.2) в силу (5.1) и (5.8) в свою очередь следует

$$|(v_{12}^1 - v_{12}^0)(x)| = |v_{12}^1(x)| \leq (\Theta C_1 + \Theta_1) x_3^\alpha. \tag{5.10}$$

Аналогичным образом из равенств (5.3) с учетом (5.1) и (5.9) будем иметь

$$|(v_{i3}^1 - v_{i3}^0)(x)| = |v_{i3}^1(x)| \leq (a_i + \Theta b_i C_1 + \Theta_i) x_3^\alpha; \tag{5.11}$$

в неравенствах (5.10), (5.11) $\Theta_1 := \|F_1\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\Delta_2)}$, $\Theta_i := \|F_i\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\Delta_1)}$, $i = 2, 3$.

В предположении, что оценки (5.6) справедливы при $n = 1, 2, \ldots$ докажем их справедливость при $n + 1$ для достаточно больших M^* и M_*.

Из (5.4) имеем

$$K(\varphi_{12}^{n+2} - \varphi_{12}^{n+1})(x_1, x_3) = -T_{15}(v_{12}^{n+1} - v_{12}^n, v_{13}^{n+1} - v_{13}^n, v_{23}^{n+1} - v_{23}^n)(x_1, x_3), \quad (x_1, x_3) \in \Delta_2. \tag{5.12}$$

Далее, для правой части равенства (5.12) в силу (2.6) при $\beta = n + \alpha$ и (5.6) при $(x_1, x_3) \in \Delta_2$ справедлива оценка

$$|T_{15}(v_{12}^{n+1} - v_{12}^n, v_{13}^{n+1} - v_{13}^n, v_{23}^{n+1} - v_{23}^n)(x_1, x_3)| \leq$$

$$\leq \frac{C(T_{15})}{\beta + 1} x_3^{\beta+1} \sum_{i,j=1, i<j}^{3} \left(\sup_{y \in D \cap \{y_3 \leq x_3\}} y_3^{-\beta} |(v_{ij}^{n+1} - v_{ij}^n)(y)| \right) \leq 3C(T_{15}) M^* \frac{M_*^n}{(n+1)!} x_3^{n+1+\alpha}. \tag{5.13}$$

Так же, как и при получении неравенства (5.7), из (5.13) будем иметь

$$\|T_{15}(v_{12}^{n+1} - v_{12}^n, v_{13}^{n+1} - v_{13}^n, v_{23}^{n+1} - v_{23}^n)\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\Delta_2 \cap \{y_3 \leq x_3\})} \leq 3C(T_{15}) M^* \frac{M_*^n}{(n+1)!} x_3^{n+1}. \tag{5.14}$$

Теперь из (4.3), (5.12) и (5.14) при $(x_1, x_3) \in \Delta_2$ находим

$$|(\varphi_{12}^{n+2} - \varphi_{12}^{n+1})(x_1, x_3)| = |\{K^{-1} T_{15}(v_{12}^{n+1} - v_{12}^n, v_{13}^{n+1} - v_{13}^n, v_{23}^{n+1} - v_{23}^n)\}(x_1, x_3)| \leq C_1 x_3^\alpha \|T_{15}(v_{12}^{n+1} -$$
$$-v_{12}^n, v_{13}^{n+1} - v_{13}^n, v_{23}^{n+1} - v_{23}^n)\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\Delta_2 \cap \{y_3 \leq x_3\})} \leq 3C_1 C(T_{15}) M^* \frac{M_*^n}{(n+1)!} x_3^{n+1+\alpha}. \tag{5.15}$$

Далее, из равенства (5.5) с учетом (5.13) и (5.15) при $(x_1, x_3) \in \Delta_1$ непосредственно следует

$$|(\varphi_{i3}^{n+2} - \varphi_{i3}^{n+1})(x_1, x_3)| \leq 3\{b_i C_1 C(T_{15}) + C(T_{i+12})\} M^* \frac{M_*^n}{(n+1)!} x_3^{n+1+\alpha}, \quad i = 1, 2. \tag{5.16}$$

В силу (5.13), (5.15) и (5.16) из (5.2), (5.3) при $x \in \overline{D}$ будем иметь

$$|(v_{12}^{n+2} - v_{12}^{n+1})(x)| \leq 3\{C_1 C(T_{15}) + C(T_7)\} M^* \frac{M_*^n}{(n+1)!} x_3^{n+1+\alpha}, \tag{5.17}$$

$$|(v_{i3}^{n+2} - v_{i3}^{n+1})(x)| \leq 3\{b_i C_1 C(T_{15}) + C(T_{i+12}) + C(T_{i+7})\} M^* \frac{M_*^n}{(n+1)!} x_3^{n+1+\alpha}, \quad i = 1, 2. \tag{5.18}$$

На основании (5.8)–(5.11), (5.15)–(5.18) заключаем, что оценки (5.6) будут справедливы при любом $n = 0, 1, 2, \ldots$, если положить $M^* := \max\limits_{2 \leq i \leq 3} \{\Theta C_1 + \Theta_1,\ a_i + \Theta b_i C_1 + \Theta_i\}$, $M_* := \max\limits_{1 \leq i \leq 2} \{3(C_1 C(T_{15}) + C(T_7)),\ 3(b_i C_1 C(T_{15}) + C(T_{i+12}) + C(T_{i+7}))\}$.

Из (5.6) следует, что ряды $v_{ij}(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} (v_{ij}^{n+1} - v_{ij}^n)(x)$, $\varphi_{ij}(x_1, x_3) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\varphi_{ij}^{n+1} - \varphi_{ij}^n)(x_1, x_3)$, $i, j = 1, 2, 3$, $i < j$, сходятся соответственно в пространствах $\overset{0}{C}_\alpha(\overline{D})$, $\overset{0}{C}_\alpha(\Delta_i)$, $i = 1, 2$, при $\alpha > \rho_0$ и в силу (5.2)–(5.5) предельные функции v_{ij}, φ_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, $i < j$, удовлетворяют системе уравнений (3.3), (3.8), (3.10).

Поскольку в результате операции взятия следа вдоль некоторого направления $\widetilde{l}$ получается функция, которая постоянна вдоль прямых, параллельных $\widetilde{l}$, то эта функция обладает производной по направлению $\widetilde{l}$, равной нулю. Поэтому построенные функции v_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, $i < j$, обладают непрерывными производными $\frac{\partial v_{ij}}{\partial l_k}$, $i, j, k = 1, 2, 3$, $i < j$, $k \neq i, j$. Отсюда в силу леммы 1 и замечания 7 следует, что функция u, представленная формуламы (2.4), (2.5), является решением задачи (1.5), (1.6) класса $\overset{0}{C}{}_\alpha^{1}(\overline{D})$, $\alpha > \rho_0$.

Теперь покажем, что задача (1.5), (1.6) в классе $\overset{0}{C}{}^1_\alpha(\overline{D})$, $\alpha > \rho_0$, других решений не имеет. Действительно, предположим, что функция $\widetilde{u} \in \overset{0}{C}{}^1_\alpha(\overline{D})$, $\alpha > \rho_0$, является решением соответствующей (1.5), (1.6) однородной задачи. Тогда функции $\widetilde{v}_{ij} := \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial l_i \partial l_j}$, $\widetilde{\varphi}_{12} := \widetilde{v}_{12}\big|_{\Delta_2}$, $\widetilde{\varphi}_{13} := \widetilde{v}_{13}\big|_{\Delta_1}$, $\widetilde{\varphi}_{23} := v_{23}\big|_{\Delta_1}$, $i,j = 1,2,3$, $i < j$, удовлетворяют однородной ситеме уравнений

$$\begin{gathered} \widetilde{v}_{12} = \widetilde{\varphi}_{12} + T_7(\widetilde{v}_{12}, \widetilde{v}_{13}, \widetilde{v}_{23}), \quad \widetilde{v}_{i3} = \widetilde{\varphi}_{i3} + T_{i+7}(\widetilde{v}_{12}, \widetilde{v}_{13}, \widetilde{v}_{23}), \\ K\widetilde{\varphi}_{12} + T_{15}(\widetilde{v}_{12}, \widetilde{v}_{13}, \widetilde{v}_{23}) = 0, \quad \widetilde{\varphi}_{i3} + b_i \widetilde{\varphi}_{12} - T_{i+12}(\widetilde{v}_{12}, \widetilde{v}_{13}, \widetilde{v}_{23}) = 0, \quad i = 1,2. \end{gathered} \tag{5.19}$$

Применим к системе уравнений (5.19) метод последовательных приближений, приняв за нулевые приближения сами эти функции $\widetilde{v}_{ij}$, $\widetilde{\varphi}_{ij}$, $i,j = 1,2,3$, $i < j$. Так как они удовлетворяют системе уравнений (5.19), то каждое следующее приближение будет совпадать с ними, т. е. $\widetilde{v}^n_{ij} \equiv \widetilde{v}_{ij}$, $\widetilde{\varphi}^n_{ij} \equiv \widetilde{\varphi}_{ij}$, $i,j = 1,2,3$, $i < j$. Принимая во внимание, что эти функции удовлетворяют оценкам вида (1.7), аналогичными рассуждениями, как и при выводе неравенств (5.6), получаем $|\widetilde{v}_{ij}(x)| = |\widetilde{v}^{n+1}_{ij}(x)| \le \widetilde{M}^* \frac{\widetilde{M}^n_*}{n!} x_3^{n+\alpha}$, $|\widetilde{\varphi}_{ij}(x_1,x_3)| = |\widetilde{\varphi}^{n+1}_{ij}(x_1,x_3)| \le \widetilde{M}^* \frac{\widetilde{M}^n_*}{n!} x_3^{n+\alpha}$, откуда в пределе, когда $n \to \infty$, находим $\widetilde{v}_{ij} \equiv 0$, $\widetilde{\varphi}_{ij} \equiv 0$, $i,j = 1,2,3$, $i < j$.

Из приведенных выше рассуждений и замечания 7 следует, что справедлива сформулированная выше теорема, причем для решения u задачи (1.5), (1.6) имеет место оценка

$$\|u\|_{\overset{0}{C}{}^1_\alpha(\overline{D})} \le c\left(\sum_{i=1}^{2} \|f_i\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\Delta_1)} + \|f_3\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\Delta_2)} + \|F\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\overline{D})} \right) \tag{5.20}$$

с постоянной c, не зависящей от f_i, $i = 1,2,3$, и F.

Замечание 10. Из оценки (5.20) непосредственно следует устойчивость решения задачи (1.5), (1.6) в классе $\overset{0}{C}{}^1_\alpha(\overline{D})$ при $\alpha > \rho_0$.

Приведенные ниже случаи и соответствующие примеры показывают, что сформулированные выше достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1.5), (1.6) являются существенными. В качестве иллюстрации рассмотрим случай, когда условие a) нарушается. Покажем, что в этом случае единственность решения рассмотренной задачи, вообще говоря, может не иметь места.

Случай 1. Ребро Γ_0 лежит в одной из характеристических плоскостей (напр., в $x_2 = 0$) и не имеет бихарактеристического направления (т. е. $\nu^0 \nparallel e_i$, $i = 1,3$).

В этом случае легко показать, что функция $u(x) = \psi(x_2)$, $x \in \overline{D}$, при произвольном $\psi \in C^1$, $\psi(0) = \psi'(0) = 0$, является регулярным решением задачи (1.5), (1.6) при $A_2 = A = F = 0$, $M^i = M^i_2 = f_i = 0$, $l_i = e_i$, $i = 1,2,3$.

Случай 2. Ребро Γ_0 имеет бихарактеристическое направление (напр., $\nu^0 \| e_1$).

И в этом случае легко показать, что функция $u(x) = \psi(x_2) + \chi(x_3)$, $x \in \overline{D}$, при произвольных $\psi, \chi \in C^1$, $\psi'(0) = \chi'(0) = 0$, $\psi(0) + \chi(0) = 0$, является регулярным решением задачи (1.5), (1.6) при $A_2 = A_3 = A = F = 0$, $M^i = M^i_2 = M^i_3 = f_i = 0$, $l_i = e_i$, $i = 1,2,3$.

Литература

1. Хёрмандер Л. *Линейные дифференциальные операторы с частными производными.* – М.: Мир, 1965. – 379 с.
2. Darboux G. *Lecons sur la théorie générale des surfaces, troisiéme partie.* – Paris, Gauthier-Villars, 1894. – 512 p.
3. Kharibegashvili S. *Goursat and Darboux type problems for linear hyperbolic partial differential equations and systems* // Memoirs on Diff. Equations and Math. Physics, Georgian Academy Sci. – Tbilisi, 1995. – V. 4. – P. 127.

4. Jokhadze O. *On a Darboux problem for a third order hyperbolic equation with multiple characteristics* // Georgian Math. J. – 1995. – V. 2. – № 5. – P. 469–490.
5. Джохадзе О.М. *Задача типа Дарбу для уравнения третьего порядка с доминирующими младшими членами* // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32. – № 4. – С. 523–535.
6. Beudon M.Jules. *Sur les caracteristiques des equations aux dérivées partielles* // Bull. Soc. Math. Fr. – 1897. – V. XXV. – P. 108–120.
7. Адамар Ж. *Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа.* – М.: Наука, 1978. – 352 с.
8. Tolen J. *Probléme de Cauchy sur deux hypersurfaces caracteristique sécantes* // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. A. – 1980. – № 1. – P. A49–A52.
9. Jokhadze O. *Spatial problem of Darboux type for one model equation of third order* // Georgian Math. J. – 1996. – V. 3. – № 6. – P. 543–560.
10. Jokhadze O. *On the boundary value problems for normally hyperbolic systems of first order equations in the space* // Rendiconti di Matematica. Serie 7. – 1998. – V. 18. – Fasc. 3, Roma. – P. 497–528.
11. Jokhadze O. *On the boundary value problems in a dihedral angle for normally hyperbolic systems of first order* // Georgian Math. J. – 1998. – V. 5. – № 2. – P. 121–138.
12. Di Vincenzo R., Villani A. *Sopra un problema ai limiti per uńequazione lineare del terzo ordine di tipo iperbolico. Esistenza, unicitáe rappresentazione della soluzione* // Le Matematiche, Seminario matematico delĺ Universita di Catania. – 1977. – V. XXXII. – P. 211–238.
13. Жегалов В.И. *Трехмерный аналог задачи Гурса.* – Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. – Новосибирск: ИМ СО АН, 1990. – С. 94 -98.
14. Севастьянов В.А. *Метод Римана для трехмерного гиперболического уравнения третьего порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 69–73.

Математический институт
Академии наук Грузии

Поступила
25.04.2001