И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

1997 МАТЕМАТИКА № 11 (426)

УДК 517.929

А.А. КЕЛЬЗОН

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОМ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ ФУНКЦИЙ m-ГАРМОНИЧЕСКОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

В работе доказывается сходимость тригонометрического интерполяционного процесса Лагранжа по равноотстоящим узлам для функций m-гармонической ограниченной вариации в точках их непрерывности.

Напомним вначале соответствующее определение, введенное в [1] (см. также [2], [3]). Пусть функция f задана на отрезке $[a,b]$, m — натуральное число. Через $\{I_n\}$, $n=1,2,\dots$, обозначим последовательность непересекающихся интервалов $I_n=(a_n,b_n)\subseteq[a,b]$.

Положим

$$V_{m,H}(f;a,b)=\sup\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\Delta^m f(I_n)|}{n}, \tag{1}$$

где

$$\Delta^m f(I_n)\equiv\Delta^m f(a_n,b_n)=\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^{m-\nu}C_m^\nu f(a_n+\nu h_n),$$
$$h_n=(b_n-a_n)/m,$$

а верхняя грань в (1) берется по всевозможным последовательностям интервалов $\{I_n\}=\{(a_n,b_n)\}$, удовлетворяющим описанным условиям.

Величина $V_{m,H}(f;a,b)$ называется m-гармонической вариацией функции f на отрезке $[a,b]$ и, если $V_{m,H}(f;a,b)<\infty$, то говорят, что f имеет m-гармоническую ограниченную вариацию на $[a,b]$.

В частном случае $m=1$ определение функции m-гармонической ограниченной вариации совпадает с определением функции гармонической ограниченной вариации, введенным Д.Ватерманом [4].

Пусть далее ξ — произвольное вещественное число. Положим

$$x_{k,n}\equiv x_{k,n}(\xi)=\xi+2k\pi/(2n+1),\quad k=0,\pm1,\dots;\quad n=0,1,2,\dots,$$

$$t_{k,n}(x)=\frac{\sin((n+1/2)(x-x_{k,n}))}{(2n+1)\sin((x-x_{k,n})/2)}=\frac{(-1)^k\sin((n+1/2)(x-\xi))}{(2n+1)\sin((x-x_{k,n})/2)},\quad k=0,\pm1,\dots;\quad n=0,1,2,\dots \tag{2}$$

Через $L_n(f;x)\equiv L_{n,\xi}(f;x)$, $n=1,2,\dots$, обозначим тригонометрический полином порядка не выше n, совпадающий с заданной 2π-периодической функцией f в узлах $x_{k,n}$, $k=0,\pm1,\dots$ (тригонометрический интерполяционный полином Лагранжа). Как известно (напр., [5], гл. X, § 1, с. 10)

$$L_n(f;x)=\sum_{k=-n}^{n}f(x_{k,n})t_{k,n}(x).$$

Для доказательства основного результата потребуется

Лемма. *Пусть m и N — натуральные числа, причем $N > m$, α_k, $k = \overline{1, N}$ — произвольные числа.*

Тогда справедливо тождество

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k = \frac{1}{2^m} \left\{ \sum_{k=1}^{N-m} \sum_{\nu=0}^{m} C_m^{\nu} \alpha_{k+\nu} + \sum_{j=1}^{m} D_{m,j} \alpha_j + \sum_{j=N-m+1}^{N} D_{m,N-j+1} \alpha_j \right\},$$

где $D_{m,j} = \sum\limits_{i=j}^{m} C_m^i$.

Доказательство леммы приведено в [3].

Сформулируем и докажем теперь основной результат работы.

Теорема. *Пусть 2π-периодическая функция f интегрируема по Риману на периоде, непрерывна в точке x' и на некотором отрезке, содержащем внутри себя эту точку, имеет m-гармоническую ограниченную вариацию (при некотором натуральном m). Тогда при любом вещественном ξ справедливо соотношение*

$$\lim_{n \to \infty} L_{n,\xi}(f; x') = f(x').$$

Доказательство. Не уменьшая общности, считаем $x' \in [x_{-1,n}, x_{0,n})$ (если бы $x' \in [x_{k,n}, x_{k+1,n})$, то нужно перейти к функции $\varphi(x) = f(x - x_{-1,n} + x_{k,n})$). Поскольку $L_n(f; x_{k,n}) = f(x_{k,n})$, то далее будем считать

$$x' \in (x_{-1,n}, x_{0,n}). \tag{3}$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$, и пусть $\delta > 0$ выбрано из условия

$$V_{m,H}(f; x' - \delta, x' + \delta) < \varepsilon. \tag{4}$$

Такой выбор δ возможен в силу непрерывности m-гармонической вариации [3]. При этом будем считать $\delta < \pi/2$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - f(x'), & x \in [x' - \delta, x' + \delta]; \\ 0, & x \in [-\pi, \pi] \setminus [x' - \delta, x' + \delta], \end{cases}$$

$g(x + 2\pi) = g(x)$. Поскольку функция f интегрируема по Риману то для нее справедлив принцип локализации. В силу этого принципа и с учетом линейности интерполяционного оператора достаточно доказать сходимость интерполяционного процесса в точке x' для функции g. Кроме того, ясно, что

$$V_{m,H}(g; x' - \delta, x' + \delta) = V_{m,H}(f; x' - \delta, x' + \delta),$$

и в силу (4)

$$V_{m,H}(g; x' - \delta, x' + \delta) < \varepsilon. \tag{5}$$

Поскольку функция f, а следовательно и g, непрерывна в точке x' и $g(x') = 0$, то, уменьшив в случае необходимости δ, можем считать, что

$$|g(x)| < \varepsilon \text{ при } x \in [x' - \delta, x' + \delta]. \tag{6}$$

При сделанных допущениях имеем

$$L_{n,\xi}(g; x') - g(x') = L_{n,\xi}(g; x') = \sum_{k=-M}^{-1} g(x_{k,n}) t_{k,n}(x') + \sum_{k=0}^{N} g(x_{k,n}) t_{k,n}(x'), \tag{7}$$

где $M = M(n, x')$ и $N = N(n, x')$ определены из неравенств

$$x_{-M-1,n} < x' - \delta \le x_{-M,n}, \quad x_{N,n} \le x' + \delta < x_{N+1,n}.$$

Докажем, что правая часть (7) стремится к нулю при $n \to \infty$. Для этого оценим вторую сумму в правой части (7). Из хорошо известного неравенства (напр., [6], ч. I, гл. IV. § 2, с.114)

$$|\sin nt| \le n|\sin t| \quad (-\infty < t < +\infty)$$

следует

$$|t_{k,n}(x')| \le 1, \quad k = 0, \pm 1, \dots ; \quad n = 1, 2, \dots \tag{8}$$

Отсюда и из непрерывности функции f, а значит, и g в точке x' получим

$$\sum_{k=0}^{N} g(x_{k,n}) t_{k,n}(x') = \sum_{k=1}^{N} g(x_{k,n}) t_{k,n}(x') + o(1).$$

Воспользовавшись леммой, преобразуем сумму, стоящую в правой части последнего равенства (при этом считаем $N > m$, что будет иметь место при достаточно больших n)

$$\sum_{k=1}^{N} g(x_{k,n}) t_{k,n}(x') = \frac{1}{2^m} \Big\{ \sum_{k=1}^{N-m} \sum_{\nu=0}^{m} C_m^{\nu} g(x_{k+\nu,n}) t_{k+\nu,n}(x') +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} D_{mj} g(x_{j,n}) t_{j,n}(x') + \sum_{j=N-m+1}^{N} D_{m,N-j+1} g(x_{j,n}) t_{j,n}(x') \Big\}. \tag{9}$$

В силу (6) и (8) каждое слагаемое в двух последних суммах из правой части (9) бесконечно мало, и т.к. число слагаемых в каждой их эти сумм фиксировано (равно m), то обе эти суммы бесконечно малы. Поэтому надо оценить двойную сумму из правой части (9).

Из (2) с учетом (3) и того, что $\delta < \pi/2$, имеем

$$\operatorname{sign} t_{k,n}(x') = (-1)^k, \quad k = \overline{1, N}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{N-m} \sum_{\nu=0}^{m} C_m^{\nu} g(x_{k+\nu,m}) t_{k+\nu,n}(x') = \\ &\quad = \sum_{k=1}^{N-m} (-1)^k \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^{\nu} C_m^{\nu} g(x_{k+\nu,n}) |t_{k+\nu,n}(x')| = \\ &\quad = \sum_{k=1}^{N-m} t_{k,n}(x') \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^{\nu} C_m^{\nu} g(x_{k+\nu,n}) - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{N-m} (-1)^k \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^{\nu} C_m^{\nu} g(x_{k+\nu,n}) (|t_{k,n}(x')| - |t_{k+\nu,n}(x')|) \equiv S_1 - S_2. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$S_1 = (-1)^m \sum_{k=1}^{N-m} t_{k,n}(x') \Delta^m g(x_{k,n}, x_{k+m,n}).$$

Но при $k = \overline{1, N-m}$ из (2) с учетом (3) следует

$$|t_{k,n}(x')| \le \frac{1}{(2n+1)\sin((x_{k,n} - x_{0,n})/2)} = \frac{1}{(2n+1)\sin(k\pi/(2n+1))} \le 1/(2k)$$

и, следовательно, в силу выбора N

$$|S_1| \le \sum_{k=1}^{N-m} \frac{|\Delta^m g(x_{k,n}, x_{k+m,n})|}{2k} \le \frac{m}{2} V_{m,H}(g; x', x' + \delta).$$

Отсюда, ввиду очевидного неравенства $V_{m,H}(g;x',x'+\delta) \le V_{m,H}(g;x'-\delta,x'+\delta)$ и (5) получим

$$|S_1| < m\varepsilon/2. \tag{10}$$

Для оценки S_2 заметим, что при $k=\overline{1,N-m}$, $\varphi=\overline{0,m}$ из (2) с учетом (3) будем иметь

$$\begin{aligned}
&|t_{k,n}(x')| - |t_{k+\nu,n}(x')| = \\
&\quad = \frac{|\sin((n+1/2)(x'-\xi))|}{2n+1}\left|\frac{2\sin((x_{k+\nu,n}-x_{k,n})/4)\cos((2x'-x_{k,n}-x_{k+\nu,n})/4)}{\sin((x_{k,n}-x')/2)\sin((x_{k+\nu,n}-x')/2)}\right| \le \\
&\quad\quad \le \frac{2\sin((x_{k+\nu,n}-x_{k,n})/4)}{(2n+1)\sin((x_{k,n}-x_{0,n})/2)\sin((x_{k+\nu,n}-x_{0,n})/2)} \le \\
&\quad\quad\quad \le \Big(\frac{\nu\pi}{2n+1}\Big)\Big/\Big[(2n+1)\Big(\frac{2}{\pi}\frac{k\pi}{2n+1}\Big)\Big(\frac{2}{\pi}\frac{(k+\nu)\pi}{2n+1}\Big)\Big] \le \frac{m\pi}{4k^2}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^\nu C_m^\nu g(x_{k+\nu,n})(|t_{k,n}(x')| - |t_{k+\nu,n}(x')|)\right| \le \frac{m\pi}{4k^2}\sup_{x'\le x\le x'+\delta}|g(x)|\sum_{\nu=0}^{m} C_m^\nu < \frac{\pi m\, 2^m}{4k^2}\varepsilon$$

(мы воспользовались (6)). Из этого неравенства видим, что

$$|S_2| < \frac{\pi m\, 2^m}{4}\varepsilon\sum_{k=1}^{N-m}\frac{1}{k^2} < \frac{\pi m\, 2^m}{4}\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^3 m\, 2^m}{24}\varepsilon.$$

Отсюда и из (10) следует, что двойная сумма в правой части (9) бесконечно мала, и в сочетании с ранее сказанным это дает, что бесконечно мала и левая часть (9). Таким образом, доказано стремление к нулю при $n\to\infty$ второй суммы в правой части (7). Аналогично показывается, что стремится к нулю и первая сумма. Отсюда следует утверждение теоремы. $\square$

Отметим, что при $m=1$ теорема была установлена ранее [7].

Литература

1. Кельзон А.А. *О функциях (m,Φ)-ограниченной вариации* // ДАН СССР. – 1991. – Т. 321. – № 4. – С. 670–672.
2. Кельзон А.А. *О коэффициентах Фурье и коэффициентах Фурье-Лагранжа функций (m,Λ)-ограниченной вариации* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 9. – С. 59–64.
3. Кельзон А.А. *Функции (m,Φ)-ограниченной вариации и сходимость рядов Фурье* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 8. – С. 29–38.
4. Waterman D. *On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation* // Studia Math. – 1972. – T. 44. – № 2. – S 107–117.
5. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* – Т. II. – М.: Мир, 1965. – 540 с.
6. Натансон И.П. *Конструктивная теория функций.* – М.–Л.: ГИТТЛ, 1949. – 688 с.
7. Кельзон А.А. *О тригонометрическом интерполировании функций Λ-ограниченной вариации* // ДАН СССР. – 1986. – Т. 286. – № 5. – С. 1062–1064.

Государственная морская академия
имени адмирала С.О. Макарова (Санкт-Петербург)

Поступила
11.05.1995