ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 10 (449)

УДК 517.518.84

П.А. ШУЛИМАНОВ

ОЦЕНКА СНИЗУ ПРИБЛИЖЕНИЙ НА ПОЛУОСИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Пусть $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ — целая функция с неотрицательными коэффициентами a_k $(k\geq 1)$, причем $a_0>0$. Примем величину $\left\|\frac{1}{f}-\frac{P_m}{Q_n}\right\|_{L_\infty[0,\infty)}$ за критерий качества приближения указанного вида функций дробно-рациональными функциями P_m/Q_n, где $P_m(x)=\sum\limits_{k=0}^{m}\overline{a_k}e^{kx}$, $0\leq m\leq n$, не убывает на $[0,+\infty)$, а $Q_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}b_ke^{kx}$ $(b_k\geq 0)$. Характеристикой роста целой функции f является функция

$$M(r)=M_f(r)=\max_{|z|\leq r}|f(z)|,\quad r\geq 0.$$

Под порядком целой функции понимают величину

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}=\rho\quad(0\leq\rho\leq\infty).$$

Если $0<\rho<\infty$, то тип τ и нижний тип ω целой функции f определяют как

$$\lim_{r\to\infty}\begin{matrix}\sup\\ \inf\end{matrix}\frac{\ln M_f(r)}{r^\rho}=\begin{matrix}\tau\\ \omega\end{matrix}\quad(0\leq\omega\leq\tau\leq\infty).$$

Через $H^+(\rho,\omega,\tau)$ обозначим класс целых функций f заданного порядка ρ $(0<\rho<\infty)$, типа τ и нижнего типа ω $(0<\omega\leq\tau<\infty)$ с неотрицательными коэффициентами Тейлора a_k $(k\geq 1)$, $a_0>0$. В данной заметке получена новая оценка снизу величины $\left\|\frac{1}{f}-\frac{P_m}{Q_n}\right\|_{L_\infty[0,\infty)}$ для функций $f\in H^+(\rho,\omega,\tau)$, $\rho>1$, которая как следствие усиливает результат работы [1]. Известна

Теорема 1 ([1]). *Пусть*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k,\quad a_0>0,\quad a_k\geq 0\quad(k\geq 1)$$

— целая функция порядка $\rho=2$, типа τ и нижнего типа ω $(\frac{1}{25}\leq\omega\leq\tau<\infty)$ или порядка ρ $(2<\rho<\infty)$, типа τ и нижнего типа ω $(0<\omega\leq\tau<\infty)$. Тогда невозможно найти полиномы вида $\sum\limits_{k=0}^{n}b_ke^{kx}$, $b_k\geq 0$, для которых

$$\liminf_{n\to\infty}\left\{\left\|\frac{1}{f}-\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}b_ke^{kx}}\right\|_{L_\infty[0,\infty)}\right\}^{\frac{\rho\omega}{n^2\tau}}\leq e^{-1}.$$

Замечание. На самом деле приведенная в теореме оценка для функций порядка $\rho=2$, типа τ и нижнего типа ω $(\frac{1}{25}\leq\omega\leq\tau<\infty)$ доказана в [1] при более сильных ограничениях на параметры. А именно, в заключительной части доказательства неравенства (13) в [1] появляется ограничение, которое после несложных преобразований приводит к ограничению $\left(\frac{2}{\sqrt{\omega}}-\frac{19}{21\sqrt{2}}\right)\sqrt{\tau}<1$ на параметры ω и τ.

В дальнейшем будем использовать обозначения

$$\varphi_\varepsilon = \exp\left\{d_\varepsilon(\delta)\frac{\delta-1}{d_\varepsilon(\delta)-1}\left\{\frac{\delta-1}{(d_\varepsilon(\delta)-1)\omega(1-\varepsilon)}\right\}^{\frac{1}{\rho-1}}\right\}, \tag{1}$$

где

$$d_\varepsilon(\delta) = \frac{\delta^\rho\omega(1-\varepsilon)}{\tau(1+\varepsilon)}, \quad 0 \le \varepsilon < 1,$$

$$c = c(\varepsilon,\omega,\tau,\rho) = \min\left\{\varphi_\varepsilon(\delta) : d_\varepsilon(\delta) = \frac{\delta^\rho\omega(1-\varepsilon)}{\tau(1+\varepsilon)} > 1\right\} = \exp\left\{\frac{(2\delta_0-1)^\rho}{\rho^\rho\omega(1-\varepsilon)d_\varepsilon(\delta_0)}\right\}^{\frac{1}{\rho-1}} \tag{2}$$

и δ_0 — корень уравнения

$$(2\delta-1)(d_\varepsilon(\delta)-1) = \rho d_\varepsilon(\delta)(\delta-1). \tag{3}$$

Основным результатом работы является

Теорема 2. *Пусть $0 < \varepsilon_0 < 1$, $0 \le \varepsilon < 1$ и $f \in H^+(\rho,\omega,\tau)$, $\rho > 1$. Тогда существует $n_0 = n_0(\varepsilon_0,\varepsilon)$ такое, что для всех $n \ge n_0$ и неубывающих на $[0,\infty)$ полиномов вида $P_m(x) = \sum\limits_{k=0}^{m}\overline{a_k}e^{kx}$, $0 \le m \le n$, и $Q_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k e^{kx}$ $(b_k \ge 0)$ справедливо неравенство*

$$\left\|\frac{1}{f} - \frac{P_m}{Q_n}\right\|_{L_\infty[0,\infty)} \ge c_1(1-\varepsilon_0)c^{-n^{\frac{\rho}{\rho-1}}}, \tag{4}$$

где величина $c = c(\varepsilon,\omega,\tau,\rho)$ определена формулой (2), а константа $c_1 = c_1(\varepsilon,\omega,\tau,\rho)$ зависит только от указанных величин.

Следствие. В условиях теоремы 2 справедливо неравенство

$$\liminf_{n\to\infty}\left\{\left\|\frac{1}{f} - \frac{P_m}{Q_n}\right\|_{L_\infty[0,\infty)}\right\}^{\frac{1}{n^{\rho/(\rho-1)}}} \ge c_2^{-1},$$

где $c_2 = c(0,\omega,\tau,\rho)$ определяется формулой (2) при $\varepsilon = 0$.

В частном случае при $m = 0$ $(\rho = 2)$ получаем усиление по порядку при $n \to \infty$ оценки А.Р. Редди [1] и расширение ее на более широкий класс параметров. Действительно, сравним полученный в следствии результат с теоремой 1 для функций $f \in H^+(2,\omega,\tau)$. Для этого положим в (1) $\rho = 2$, $\varepsilon = 0$. Тогда имеем

$$\varphi_0(\delta) = \exp\left\{\frac{\tau}{\omega^2}\left(\frac{\delta^2-\delta}{\delta^2-\tau/\omega}\right)^2\right\}$$

при значениях $\delta > \sqrt{\frac{\tau}{\omega}}$. Покажем, что она меньше соответствующей оценки $\exp\left\{\frac{\tau}{2\omega}\right\}$ из теоремы 1 для всех значений $\delta \ge \frac{\tau}{\omega}$, где $2.44\ldots \le \omega \le \tau < \infty$ (см. замечание к теореме 1). Логарифмируя указанные оценки, получаем неравенство

$$\ln\varphi_0(\delta) = \frac{\tau}{\omega^2}\left(\frac{\delta^2-\delta}{\delta^2-\tau/\omega}\right)^2 < \frac{\tau}{2\omega},$$

которое выполняется, т.к. $\frac{\delta^2-\delta}{\delta^2-\tau/\omega} \le 1 < \sqrt{\frac{\omega}{2}}$. Ясно, что

$$\min_{\delta\ge\sqrt{\frac{\tau}{\omega}}}\ln\varphi_0(\delta) = \ln\varphi_0(\delta_0) < \frac{\tau}{2\omega},$$

где величина $\delta_0 = \frac{\tau}{\omega} + \left(\frac{\tau^2}{\omega^2} - \frac{\tau}{\omega}\right)^{1/2}$. Отметим, что для функций $f \in H^+(2, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ полученный в следствии порядок оценки снизу является логарифмически точным, т.к. из следствия имеем

$$\liminf_{n\to\infty} \left\{ \left\| \frac{1}{f} - \frac{P_m}{Q_n} \right\|_{L_\infty[0,\infty)} \right\}^{1/n^2} \geq \frac{1}{e},$$

а в ([1], с. 254) приведен пример функции из этого класса, для которой выполняется неравенство

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ \left\| \frac{1}{S_n} - \frac{1}{f} \right\|_{L_\infty[0,\infty)} \right\}^{1/n^2} \leq e^{-1/2}, \quad \text{где} \quad S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{kz}.$$

Отметим, что при $m = 0$ ($\rho > 0$) следствие усиливает логарифмический порядок при $n \to \infty$ соответствующей оценки из теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Пусть

$$A = \frac{1}{(\omega(1-\varepsilon))^{1/(\rho-1)}} \left\{ \frac{\delta_0 - 1}{d_\varepsilon(\delta_0) - 1} \right\}^{\frac{\rho}{\rho-1}}, \quad B = d_\varepsilon(\delta_0) A, \quad \sigma = \{d_\varepsilon(\delta_0)\}^{\frac{d_\varepsilon(\delta_0)}{d_\varepsilon(\delta_0)-1}}, \tag{5}$$

где δ_0 — корень уравнения (3). Доказательство будем вести от противного. Предположим, что неравенство в (4) при некотором $\varepsilon_0 > 0$ неверно. Тогда существуют бесконечная последовательность целых чисел $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots$ и последовательность “полиномов” P_{n_k} и Q_{n_k} указанного вида таких, что выполняется неравенство

$$\left\| \frac{1}{f} - \frac{P_{n_k}}{Q_{n_k}} \right\|_{L_\infty[0,\infty)} < c_1(1-\varepsilon_0) \exp\{-B n_k^{\frac{\rho}{\rho-1}}\} < \exp\{-B n_k^{\frac{\rho}{\rho-1}}\}. \tag{6}$$

Поскольку f — целая функция и $a_k \geq 0$ ($k \geq 0$), то $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ и для каждого n_k существует число r_k со свойством

$$f(r_k) = \sigma^{\frac{1}{d_\varepsilon(\delta_0)}} \exp\{A n_k^{\frac{\rho}{\rho-1}}\}, \tag{7}$$

где величины A и σ определены в формуле (5). Учитывая определение нижнего типа ω, из условия (7) получаем неравенство

$$\begin{aligned} r_k &\leq \left\{ \frac{A}{\omega(1-\varepsilon)} \right\}^{1/\rho} n_k^{\frac{1}{\rho-1}} \left\{ 1 + \frac{\ln \sigma}{A d_\varepsilon(\delta_0) n^{\frac{\rho}{\rho-1}}} \right\}^{1/\rho} \leq \\ &\leq \left\{ \frac{A}{\omega(1-\varepsilon)} \right\}^{1/\rho} n_k^{\frac{1}{\rho-1}} \left\{ 1 + \frac{\ln \sigma}{A d_\varepsilon(\delta_0) n_k^{\frac{\rho}{\rho-1}}} \right\} = \left\{ \frac{A}{\omega(1-\varepsilon)} \right\}^{1/\rho} n_k^{\frac{1}{\rho-1}} + \ln \sigma_1^{\frac{1}{n_k}}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\sigma_1 = \sigma^{1/t}$, $t = (\omega(1-\varepsilon))^{1/\rho} A^{\frac{\rho-1}{\rho}} d_\varepsilon(\delta_0)$. Из неравенства (6) легко следует

$$\left| \frac{Q_{n_k}(r_k)}{P_{n_k}(r_k)} \right| < \sigma^{\frac{1}{d_\varepsilon(\delta_0)}} \exp\{A n_k^{\frac{\rho}{\rho-1}}\} \left\{ 1 - \frac{\sigma^{\frac{1}{d_\varepsilon(\delta_0)}}}{\exp\{(B-A) n_k^{\frac{\rho}{\rho-1}}\}} \right\}^{-1}. \tag{9}$$

Положим $x_k = r_k \delta_0$, где числа r_k определены в (7), а δ_0 — корень уравнения (3). В данном случае $M(r) = f(r)$, поэтому из определения типа τ, нижнего типа ω и из соотношения (7) для достаточно больших значений k следует, что

$$f(x_k) = f(r_k \delta_0) \geq \{f(r_k)\}^{d_\varepsilon(\delta_0)} = \sigma \exp\{B n_k^{\frac{\rho}{\rho-1}}\}. \tag{10}$$

Используя неравенства (8) и (9), получаем оценку отношения $\frac{Q_{n_k}}{P_{n_k}}$ в точках $x_k = r_k \delta_0$, а именно,

$$\left| \frac{Q_{n_k}(r_k\delta_0)}{P_{n_k}(r_k\delta_0)} \right| \leq \exp\{n_k(\delta_0 - 1) r_k\} \left| \frac{Q_{n_k}(r_k)}{P_{n_k}(r_k)} \right| \leq \sigma_1^{\frac{1}{n_k}} \sigma^{\frac{1}{d_\varepsilon(\delta_0)}} \exp\{B n_k^{\frac{\rho}{\rho-1}}\} \left\{ 1 - \frac{\sigma^{\frac{1}{d_\varepsilon(\delta_0)}}}{\exp\{(B-A) n_k^{\frac{\rho}{\rho-1}}\}} \right\}^{-1}.$$

Покажем теперь, что полученное неравенство и (10) противоречат предположению (6). Действительно, неравенство

$$\left|\frac{P_{n_k}(r_k\delta_0)}{Q_{n_k}(r_k\delta_0)} - \frac{1}{f(r_k\delta_0)}\right| \geq \left|\frac{P_{n_k}(r_k\delta_0)}{Q_{n_k}(r_k\delta_0)}\right| - \frac{1}{f(r_k\delta_0)} \geq$$

$$\geq \frac{1 - \sigma^{\frac{1}{d_\varepsilon(\delta_0)}} \exp\{-(B-A)n_k^{\frac{\rho}{\rho-1}}\}}{\sigma_1^{\frac{1}{n_k}}\sigma^{\frac{1}{d_\varepsilon(\delta_0)}} \exp\{Bn_k^{\frac{\rho}{\rho-1}}\}} - \frac{1}{\sigma \exp\{Bn_k^{\frac{\rho}{\rho-1}}\}} \geq (1-\varepsilon_0)c_1 \exp\{-Bn_k^{\frac{\rho}{\rho-1}}\}$$

справедливо для всех значений $k \geq k_0(\varepsilon_0)$. Это противоречит левому из неравенств (6). Следовательно, справедливо неравенство (4).

Замечание. Отметим, что результат данной теоремы был анонсирован автором в [2].

Литература

1. Reddy A.R. *Some results in Chebyshev rational approximation* // J. Approxim. Theory. – 1976. – V. 18. – № 3. – P. 251–263.
2. Шулиманов П.А. *Оценки снизу приближений на полуоси целых функций дробно-рациональными специального вида* // Республиканск. конф. по экстремальным задачам теории приближений и их прилож. Тез. докл. – Киев, 1990. – С. 147.

Уральская государственная сельскохозяйственная академия

Поступила
09.01.1996