ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 6 (421)

УДК 517.988

*И.В. ШРАГИН, Ю.В. НЕПОМНЯЩИХ*

# $D$-УСЛОВИЯ КАРАТЕОДОРИ И ИХ СВЯЗЬ С $D$-НЕПРЕРЫВНОСТЬЮ ОПЕРАТОРА НЕМЫЦКОГО

Оператор Немыцкого $h$ (другое название — оператор суперпозиции) играет важную роль в нелинейном анализе и является объектом многочисленных исследований на протяжении второй половины 20-го века ([1]). Его свойства определяются свойствами функции $f(t,x)$, $t \in T$, $x \in X$, которая его порождает: $h\varphi(t) = f(t,\varphi(t))$ ($T$ и $X$ — носители измеримой и соответственно топологической структур).

В частности, условия Каратеодори ("измеримость по $t$ и непрерывность по $x$") обеспечивают не только суперпозиционную измеримость (сокращенно, супизмеримость) функции $f$ (иначе говоря, преобразование оператором $h$ измеримых функций $\varphi$ в измеримые $h\varphi$), но и непрерывность оператора $h$ по мере (см., напр., [2], § 17). Из работ [3]–[6] (см. также обзорные статьи [7], [8]) следует, что в весьма общей ситуации условия Каратеодори равносильны так называемой стандартности функции $f$ и непрерывности по мере оператора $h$.

В настоящей статье эти результаты обобщаются в различных направлениях. Во-первых, функция $f$ может быть определена не при всех $t \in T$, $x \in X$, а лишь на некотором множестве $\Omega \subset T \times X$ (см. по этому поводу [6], замечание 3), свойства которого играют определенную роль в обсуждаемых вопросах.

Во-вторых, мы рассматриваем непрерывность функции $f$ по $x$ и непрерывность оператора $h$ в обобщенном смысле. Это так называемая $D$-непрерывность, где $D$ — некоторое множество в $X^2$.

В-третьих, многие предложения установлены в ситуации без меры. Как и в [3], [4], основную роль здесь играет специальная система $\Re$ подмножеств множества $T$, с помощью которой вводится аналог понятия "почти всюду" при наличии полной меры.

Статья состоит из трех параграфов. В § 1 излагаются исходные предпосылки и начальные сведения о супизмеримости и стандартности. § 2 посвящен в основном $D$-условиям Каратеодори. Показывается, что они достаточны как для стандартности и супизмеримости функции $f$, так и для $D$-непрерывности оператора $h$ в смысле $\Re$-сходимости, сходимости почти всюду и по мере.

В § 3 содержатся главные предложения статьи, в которых из $D$-непрерывности оператора $h$ (в том или ином смысле) выводятся $D$-условия Каратеодори для порождающей $h$ стандартной функции $f$. При этом весьма существенную роль играет теорема В.Л. Левина [9], [10] об измеримости проекции и измеримом выборе.

В статье используются следующие обозначения и сокращения.

:= — определяющее равенство.

п. в. — почти всюду; п. п. к. — почти при каждом.

---

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01613.

ИП, ТП, МП, СМП — измеримое, топологическое, метрическое, сепарабельное метрическое пространство соответственно.

$\operatorname{diag} X^2 := \{(x,u) \in X^2 \mid u = x\}$ — диагональ в $X^2$.

$S(x,r) := \{u \in X \mid d(u,x) < r\}$, где $X$ — МП с метрикой $d$.

$\operatorname{cl} B$, $\operatorname{int} B$ — замыкание и внутренность множества $B$.

$\operatorname{gr} \varphi$ — график функции $\varphi : T_\varphi \to X$, т. е. $\{(t,x) \mid t \in T_\varphi,\ x = \varphi(t)\}$.

Для множества $\Omega \subset T \times X$ полагаем:

$\operatorname{pr}_T \Omega$, $\operatorname{pr}_X \Omega$ — проекции $\Omega$ на $T$ и $X$;

$\Omega^t$, $\Omega_x$ — "вертикальное" и "горизонтальное" сечения $\Omega$, т. е.

$$\Omega^t := \{x \in X \mid (t,x) \in \Omega\}, \quad \Omega_x := \{t \in T \mid (t,x) \in \Omega\}$$

(очевидно, $\operatorname{pr}_T \Omega = \bigcup\limits_{x \in X} \Omega_x$, $\operatorname{pr}_X \Omega = \bigcup\limits_{t \in T} \Omega^t$).

Для функции $f : \Omega \to Y$ полагаем

$$f^t := f(t, \cdot) : \Omega^t \to Y, \quad f_x := f(\cdot, x) : \Omega_x \to Y,$$

$f|_{\Omega_0}$ — сужение функции $f$ на множество $\Omega_0 \subset \Omega$.

Условимся считать счетным множество, равномощное натуральному ряду или его конечной части.

## 1. Супизмеримость и стандартность

Пусть $(T, \Sigma)$ — ИП, т. е. $T$ — непустое множество, $\Sigma$ — $\sigma$-алгебра с единицей $T$. Элементы $\Sigma$ будем называть измеримыми множествами. Пусть, далее, $X$ — ТП, $\mathcal{B}_X$ — $\sigma$-алгебра борелевских множеств в $X$.

Функция $\varphi : T_\varphi \to X$, где $T_\varphi \subset T$, называется $(\Sigma, \mathcal{B}_X)$-измеримой, если $(\forall B \in \mathcal{B}_X)\ \varphi^{-1}(B) \in \Sigma$ (короче $\varphi^{-1}(\mathcal{B}_X) \subset \Sigma$). Совокупность всех $(\Sigma, \mathcal{B}_X)$-измеримых функций обозначим через $\langle \Sigma, \mathcal{B}_X \rangle$ (аналогичные обозначения используются в дальнейшем и в случае других $\sigma$-алгебр). Обратим внимание на то, что $\langle \Sigma, \mathcal{B}_X \rangle$ состоит из функций $\varphi$ со всевозможными областями определения $T_\varphi \in \Sigma$.

Каждой функции $\varphi : T_\varphi \to X$ сопоставим ее "график-функцию" $G_\varphi : T_\varphi \to T \times X$, $G_\varphi(t) = (t, \varphi(t))$ (так что $\operatorname{gr} \varphi = G_\varphi(T_\varphi)$).

Пусть $\Lambda := \Sigma \otimes \mathcal{B}_X$ — $\sigma$-алгебра (с единицей $T \times X$), порожденная "прямоугольниками" $A \times B$, где $A \in \Sigma$, $B \in \mathcal{B}_X$. Обозначение $\Lambda$ будет применяться всюду в дальнейшем.

**Лемма 1.1.** *Если $\varphi \in \langle \Sigma, \mathcal{B}_X \rangle$, то $G_\varphi \in \langle \Sigma, \Lambda \rangle$.*

**Доказательство.** Если $A \in \Sigma$, $B \in \mathcal{B}_X$, то $G_\varphi^{-1}(A \times B) = A \bigcap \varphi^{-1}(B) \in \Sigma$. Поэтому $G_\varphi^{-1}(\Lambda) \subset \Sigma$. $\square$

Всюду в дальнейшем $\Omega$ обозначает непустое множество в $T \times X$. Положим $U_\Omega := \{\varphi : T_\varphi \to X \mid \operatorname{gr} \varphi \subset \Omega\}$, $V_\Omega := U_\Omega \bigcap \langle \Sigma, \mathcal{B}_X \rangle$ (возможно $V_\Omega = \emptyset$).

Рассмотрим функцию $f : \Omega \to Y$, где $Y$ — ТП. Для $\varphi \in U_\Omega$ положим $h\varphi := f \circ G_\varphi$, т. е. $h\varphi(t) = f(t, \varphi(t))$, $t \in T_\varphi$. Таким образом, функция $f$ порождает оператор $h$, сопоставляющий каждой функции $\varphi \in U_\Omega$ функцию $h\varphi : T_\varphi \to Y$. Оператор $h$ называется оператором *Немыцкого* или оператором *суперпозиции*.

**Определение 1.1.** Функция $f : \Omega \to Y$ называется [2] (при данной $\sigma$-алгебре $\Sigma$) *супизмеримой*, если $h(V_\Omega) \subset \langle \Sigma, \mathcal{B}_Y \rangle$.

Следуя [3], [4], положим

$$\Re := \{T_0 \subset T \mid [A \subset T \setminus T_0 \Rightarrow A \in \Sigma]\},$$

т. е. множество входит в систему $\Re$, если все подмножества его дополнения (до $T$) измеримы. Система $\Re$ обладает очевидными свойствами: $T \in \Re$, $\Re \subset \Sigma$, $\Re$ замкнута относительно перехода к надмножествам (в пределах $T$) и относительно счетных пересечений. Таким образом, $\Re$ — $\sigma$-фильтр $\sigma$-алгебры $\Sigma$. Более того, $\Re$ является наибольшим из $\sigma$-фильтров $\Phi$, обладающих свойством: если $A \in \Phi$ и $B \subset T \setminus A$, то $B \in \Sigma$.

Очевидно, если одноточечные множества в $T$ измеримы, то дополнения к счетным множествам входят в $\Re$; если на $\Sigma$ задана полная мера, то дополнения к множествам нулевой меры входят в $\Re$.

Значение системы $\Re$ состоит в том, что если $T_0 \in \Re$, то любая функция $\varphi : T \setminus T_0 \to X$ $(\Sigma, \mathcal{B}_X)$-измерима.

Для функции $f : \Omega \to Y$ и множества $T_0 \subset T$ положим

$$\Omega_0 := \Omega \bigcap (T_0 \times X), \quad f_0 := f\big|_{\Omega_0}.$$

Положим далее $\Lambda \bigcap \Omega := \{M \bigcap \Omega \mid M \in \Lambda\}$. Очевидно, $\Lambda \bigcap \Omega$ является $\sigma$-алгеброй с единицей $\Omega$.

**Определение 1.2.** [3], [4]. Функция $f : \Omega \to Y$ называется *стандартной*, если $(\exists T_0 \in \Re)$ $f_0 \in \langle \Lambda \bigcap \Omega, \mathcal{B}_Y \rangle$.

Если $\Omega \in \Lambda$, то стандартность $f$ означает, что при некотором $T_0 \in \Re$ $f_0 \in \langle \Lambda, \mathcal{B}_Y \rangle$. Еще более простая ситуация: $f$ стандартна, если $f \in \langle \Lambda, \mathcal{B}_Y \rangle$ (при этом, очевидно, необходимо, чтобы $\Omega \in \Lambda$).

**Теорема 1.1.** *Если функция $f$ стандартна, то она супизмерима.*

Хотя эта теорема — частный случай теоремы 2 из [3], [4], приведем для удобства чтения ее доказательство.

**Доказательство.** Пусть $\varphi \in V_\Omega$и $C \in \mathcal{B}_Y$. Так как $h\varphi = f \circ G_\varphi$, то $(h\varphi)^{-1}(C) = G_\varphi^{-1}[f^{-1}(C)]$. Пусть $T_0$ — множество из определения 1.3. Положим

$$P := f^{-1}(C) \bigcap \Omega_0 = f_0^{-1}(C), \quad Q := f^{-1}(C) \setminus \Omega_0.$$

Тогда $P = M \bigcap \Omega$, где $M \in \Lambda$. Отсюда и из леммы 1.1 следует

$$G_\varphi^{-1}(P) = G_\varphi^{-1}(M) \bigcap T_\varphi \in \Sigma.$$

Далее, т. к. $G_\varphi^{-1}(Q) \subset T \setminus T_0$ и $T_0 \in \Re$, то $G_\varphi^{-1}(Q) \in \Sigma$. Следовательно,

$$(h\varphi^{-1})(C) = G_\varphi^{-1}(P) \bigcup G_\varphi^{-1}(Q) \in \Sigma. \quad \square$$

## 2. $D$-условия Каратеодори и следствия из них

**2.1.** Для функций, определенных на ТП $X$, введем понятие непрерывности, более общее, чем обычная непрерывность. С этой целью зафиксируем в $X^2$ множество $D$, содержащее $\operatorname{diag} X^2$, и рассмотрим его “вертикальные” сечения $D^x := \{u \in X \mid (x, u) \in D\}$. Очевидно, $(\forall x \in X)$ $x \in D^x$.

**Определение 2.1.** Функция $F : X_F \to Y$, где $X_F \subset X$, а $Y$ — ТП, называется *$D$-непрерывной* в точке $x \in X_F$, если ее сужение на множество $X_F \bigcap D^x$ непрерывно в точке $x$.

Очевидно, из обычной непрерывности следует $D$-непрерывность, причем если $x \in \operatorname{int} D^x$, то обе непрерывности (в точке $x$) равносильны (так будет, в частности, для всех $x$, если $D = X^2$).

Приведем несколько примеров.

a) $D = \operatorname{diag} X^2$, т. е. $(\forall x \in X)\ D^x = \{x\}$. Тогда любая функция $F : X_F \to Y$ $D$-непрерывна на $X_F$.

b) $X = \mathbf{R}$, $D_r = \{(x, u) \mid u \geq x\}$, $D_l = \{(x, u) \mid u \leq x\}$. Тогда $D_r$- ($D_l$) непрерывность — это непрерывность справа (соответственно слева).

c) $X$ — топологическое произведение пространств $X_i$, $i = \overline{1, m}$, т. е.

$$X = \{x = (x^1, \ldots, x^m) \mid x^i \in X_i,\ i = \overline{1, m}\}.$$

Положим $D = \bigcup\limits_{p=1}^{m} D_p$, где

$$D_p = \{(x, u) \in X^2 \mid x^i = u^i,\ i \neq p\}, \quad p = \overline{1, m}.$$

Тогда $D_p$-непрерывность — это непрерывность по $p$-й переменной, а $D$-непрерывность — непрерывность по каждой переменной в отдельности.

Пусть теперь $X$ — МП, $S_D(x, r) := S(x, r) \bigcap D^x$. Будем говорить, что $P$ $D$-плотно в $Q$ ($P$ и $Q$ — множества в $X$), если $\forall (x \in Q,\ r > 0)\ \exists u \in P \bigcap S_D(x, r)$. Ясно, что если $D = X^2$, то $D$-плотность совпадает с обычной плотностью.

**Определение 2.2.** Множество $\Omega$ называется *$D$-допустимым*, если существует такое счетное множество $X_0 \subset X$, что $(\forall t \in \operatorname{pr}_T \Omega)$ $\Omega^t \bigcap X_0$ $D$-плотно в $\Omega^t$.

Приведем некоторые примеры.

1) Если $X$ — СМП, $D = X^2$ и $(\forall t \in \operatorname{pr}_T \Omega)$ $\Omega^t \subset \operatorname{cl}(\operatorname{int} \Omega^t)$, то $\Omega$ $D$-допустимо.

2) Если $D = \operatorname{diag} X^2$, то $\Omega$ $D$-допустимо тогда и только тогда, когда $\operatorname{pr}_X \Omega$ — счетное множество.

3) Рассмотрим пример c), когда $X = \mathbf{R}^m$. Тогда $D_p^x$, $p = \overline{1, m}$, — это прямые, параллельные координатным осям, проходящие через точку $x$. Покажем, что множество $\Omega := T \times \mathbf{R}^m$ ни $D_p$-допустимо, $p = \overline{1, m}$, ни $D$-допустимо. Действительно, пусть $X_0$ — произвольное счетное множество в $\mathbf{R}^m$. Тогда счетны его проекции $U_i$ на координатные оси,

$$U_i := \{a \in \mathbf{R} \mid (\exists u \in X_0)\ u^i = a\}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Возьмем в $\mathbf{R}^m$ такую точку $x = (x^1, \ldots, x^m)$, что $x^i \notin U^i$, $i = \overline{1, m}$. Тогда $D_p^x \bigcap X_0 = \emptyset$, $p = \overline{1, m}$. Поэтому множество $X_0$ ни $D_p$-плотно, $p = \overline{1, m}$, ни $D$-плотно в $\Omega^t = \mathbf{R}^m$.

**Определение 2.3.** *$D$-условиями Каратеодори* для функции $f : \Omega \to Y$, где $X$ и $Y$ — ТП, называются условия:

(C1) $\quad (\forall x \in \operatorname{pr}_X \Omega) \quad f_x \in \langle \Sigma, \mathcal{B}_Y \rangle$;

(C2) $\quad (\exists T_0 \in \Re) \quad \forall t \in \operatorname{pr}_T \Omega_0$ функция $f^t$ $D$-непрерывна на $\Omega^t$.

Если $D = X^2$, на $\Sigma$ задана мера $\mu$, причем $\Re = \{E \in \Sigma \mid \mu(T \setminus E) = 0\}$ (отсюда, кстати, следует полнота меры), то определение 2.3 дает обычные условия Каратеодори (измеримость по $t$ при каждом $x$ и непрерывность по $x$ п. п. к. $t$). Заметим, что для выполнения условия (C1) необходимо, чтобы $(\forall x \in \operatorname{pr}_X \Omega)$ $\Omega_x \in \Sigma$, т. е. все “горизонтальные” сечения множества $\Omega$ были измеримы.

**2.2.** Следующая теорема, играющая важную роль в дальнейшем, установлена в [3], [4].

**Теорема 2.1.** *Пусть выполняются условия:* 1) $X$ *и* $Y$ — *МП;* 2) *все "горизонтальные" сечения множества* $D$ *являются борелевскими множествами в* $X$, *т. е.*

$$(\forall u \in X) \quad D_u := \{x \in X \mid (x,u) \in D\} \in \mathcal{B}_X; \tag{2.1}$$

3) *множество* $\Omega$ $D$*-допустимо;* 4) *функция* $f : \Omega \to Y$ *удовлетворяет условиям* (C1) *и* (C2).

*Тогда функция* $f$ *стандартна; точнее говоря,* $f_0 \in \langle \Lambda \bigcap \Omega, \mathcal{B}_Y \rangle$, *где* $T_0$ — *множество из условия* (C2).

**Доказательство.** Пусть $C$ — замкнутое множество в $Y$. Положим

$$C_n := \{y \in Y \mid \rho(y, C) < 1/n\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\rho$ — метрика в $Y$. Тогда (см. [4], теорема 3)

$$f_0^{-1}(C) = \Omega_0 \bigcap \bigcap_n \bigcup_{v \in X_0} f_v^{-1}(C_n) \times [S(v, 1/n) \bigcap D_v],$$

где $X_0$ — счетное множество из определения 2.2. Отсюда следует, что $f_0^{-1}(C) \in \Lambda \bigcap \Omega$. Поэтому $f_0 \in \langle \Lambda \bigcap \Omega, \mathcal{B}_Y \rangle$. $\square$

Отметим, что условие борелевости "вертикальных" сечений $D^x$ множества $D$, предполагаемое в [3], [4] (в других обозначениях), в теореме 2.1 не требуется.

**Замечание 2.1.** Из доказательства теоремы 2.1 видно, что ее условия можно несколько ослабить. А именно, можно предполагать: 1) множество $\Omega_0$ (а не $\Omega$) $D$-допустимо; 2) $(\forall v \in \in X_0 \bigcap \mathrm{pr}_X \Omega_0) \quad f_v \in \langle \Sigma, \mathcal{B}_Y \rangle$ (вместо условия (C1)) и $D_v \in \mathcal{B}_X$ (вместо условия (2.1)).

Кстати, из этих условий (а тем более из условий теоремы 2.1) вытекает, что $\mathrm{pr}_T \Omega \in \Sigma$ и для $\Omega$ существует измеримый "селектор", т. е. такая $(\Sigma, \mathcal{B}_X)$-измеримая функция $\varphi : \mathrm{pr}_T \Omega \to X$, что $\mathrm{gr}\, \varphi \subset \Omega$ (следовательно, $V_\Omega \neq \emptyset$).

Действительно, легко проверить, что

$$\mathrm{pr}_T \Omega_0 = \bigcup_{v \in X_0} \Omega_{0v} \in \Sigma.$$

Так как $\mathrm{pr}_T \Omega \setminus T_0 \in \Sigma$, то и $\mathrm{pr}_T \Omega \in \Sigma$. Далее, пусть $X_0 \bigcap \mathrm{pr}_X \Omega_0 = \{v_1, v_2, \dots\}$. Положим

$$T_1 = \Omega_{0v_1}, \quad T_n = \Omega_{0v_n} \setminus \bigcup_{m<n} \Omega_{0v_m}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Очевидно, множества $T_n$ измеримы, попарно не пересекаются и $\bigcup T_n = \mathrm{pr}_T \Omega_0$. Остается положить $\varphi(t) = v_n$, $t \in T_n$, $n = 1, 2, \dots$, и продолжить функцию $\varphi$ на $\mathrm{pr}_T \Omega \setminus T_0$ так, чтобы $\mathrm{gr}\, \varphi \subset \Omega$.

**Замечание 2.2.** $D$-допустимость множества $\Omega$ (или $\Omega_0$) не необходима для стандартности функции $f$, удовлетворяющей $D$-условиям Каратеодори.

Действительно, пусть функция $f : T \times \mathbf{R}^m \to Y$ ($Y$ — МП) удовлетворяет условиям: 1) $(\forall x \in \mathbf{R}^m) \quad f_x \in \langle \Sigma, \mathcal{B}_Y \rangle$; 2) $(\exists T_0 \in \Re) \quad \forall t \in T_0$ функция $f^t$ непрерывна в каждой точке $x = (x^1, \dots, x^m)$ по каждому переменному $x^i$, $i = \overline{1, m}$. Тогда (см. [3], [4]) функция $f$ стандартна. Далее, условие 2) означает, что функция $f^t$ $D$-непрерывна на $\mathbf{R}^m$, где $D$ определено в примерах c) и 3) (п. 2.1). Таким образом, выполняются условия (C1) и (C2). В то же время $T \times \mathbf{R}^m$ (а также $T_0 \times \mathbf{R}^m$) не является $D$-допустимым множеством.

Более простой пример: $T = [0, 1]$, $\Sigma$ — $\sigma$-алгебра измеримых по Лебегу множеств в $T$ (тогда, очевидно, $\Re = \{E \in \Sigma \mid \mu E = 1\}$, где $\mu$ — мера Лебега), $X = Y = \mathbf{R}$, $D = \mathbf{R}^2$, $\Omega = \mathrm{diag}\, T^2$, $f(t, x) = 1 \ \forall (t, x) \in \Omega$. Тогда функция $f$, очевидно, удовлетворяет условиям (C1) и (C2) (как, впрочем, и любая функция $f : \Omega \to \mathbf{R}$) и стандартна, хотя $\Omega$ не является $D$-допустимым множеством.

Тем не менее, опустить условие $D$-допустимости в теореме 2.1 нельзя. Действительно, в приведенном только что примере изменим функцию $f$, положив $(\forall (t,x) \in \Omega) \quad f_1(t,x) = g(t)$, где $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ — неизмеримая по Лебегу функция. Очевидно, функция $f_1$ не супизмерима, а следовательно, не стандартна.

Из теорем 1.1 и 2.1 вытекает

**Следствие 2.1.** В условиях теоремы 2.1 функция $f$ супизмерима.

Сейчас мы покажем, что супизмеримость функции $f$ сохранится, если (C2) заменить более общим условием (так сказать, локальным условием $D$-непрерывности функции $f^t$).

**Лемма 2.1.** *Пусть $\varphi \in V_\Omega$ и пусть выполняются условия теоремы* 2.1, *кроме* (C2), *которое заменяет условие*

(C2$_\varphi$) $\quad \exists A_\varphi \in \Re \quad (\forall t \in T_\varphi \bigcap A_\varphi)$ *функция* $f^t$ $\quad D$*-непрерывна в точке* $\varphi(t)$.
*Тогда* $h\varphi \in \langle \Sigma, \mathcal{B}_Y \rangle$.

**Доказательство.** Утверждение леммы следует из равенства

$$A_\varphi \bigcap (h\varphi^{-1})(C) = A_\varphi \bigcap \bigcap_n \bigcup_{v \in X_0} f_v^{-1}(C_n) \bigcap \varphi^{-1}[S(v, 1/n) \bigcap D_v],$$

где $X_0$, $C$ и $C_n$ — те же, что и в теореме 2.1. $\square$

Из леммы 2.1 непосредственно следует

**Теорема 2.2.** *Пусть выполняются условия теоремы 2.1, кроме* (C2), *и* $\forall \varphi \in V_\Omega$ *имеет место* (C2$_\varphi$). *Тогда функция $f$ супизмерима.*

**Теорема 2.3.** *Пусть $(T, \Sigma)$ — ИП, $X$ — СМП с метрикой $d$. Тогда, если $\varphi \in \langle \Sigma, \mathcal{B}_X \rangle$ и $\Phi(t,x) := d(\varphi(t), x)$, $t \in T_\varphi$, $x \in X$, то $\Phi \in \langle \Lambda, \mathcal{B}_\mathbf{R} \rangle$ (так что функция $\Phi$ стандартна).*

**Доказательство.** Применим к функции $\Phi$ теорему 2.1. В данной ситуации $\Omega = T_\varphi \times X \in \Lambda$, $D = X^2$, так что множество $\Omega$ $D$-допустимо. Далее, т. к. $\forall (x \in X,\ r > 0) \quad \{t \mid \Phi(t,x) < r\} = \varphi^{-1}[S(x,r)] \in \Sigma$, а $\forall t \in T_\varphi$ функция $\Phi^t$ непрерывна на $X$, то выполняются условия (C1) и (C2), причем $T_0 = T$. Поэтому (с учетом того, что $\Omega \in \Lambda$) $\Phi \in \langle \Lambda, \mathcal{B}_\mathbf{R} \rangle$. $\square$

Из теорем 1.1 и 2.3 вытекает хорошо известное

**Следствие 2.2.** Пусть $(T, \Sigma)$ — ИП, $X$ — СМП. Тогда, если $\varphi, \psi \in \langle \Sigma, \mathcal{B}_X \rangle$, причем $T_\varphi = T_\psi$, то $d[\varphi(\cdot), \psi(\cdot)] \in \langle \Sigma, \mathcal{B}_\mathbf{R} \rangle$.

Отметим еще, что в условиях теоремы 2.3 $\operatorname{gr} \varphi \in \Lambda$ (т. к. $\operatorname{gr} \varphi = \Phi^{-1}\{0\}$).

**2.3.** С помощью системы $\Re$ можно определить эквивалентность функций $\varphi : T \to X$, которая обобщает понятие $\mu$-эквивалентности (т. е. равенства $\mu$-п. в.), где $\mu$ — полная мера на $\Sigma$.

**Определение 2.4.** Функции $\varphi, \psi : T \to X$ называются $\Re$-*эквивалентными* (запись $\varphi \overset{\Re}{\sim} \psi$), если $\{t \in T \mid \varphi(t) = \psi(t)\} \in \Re$.

Свойства отношения эквивалентности при этом, очевидно, выполняются.

**Определение 2.5.** Последовательность функций $\varphi_n : T \to X$, где $X$ — МП, называется $\Re$-*сходящейся* к функции $\varphi : T \to X$ (запись: $\varphi_n \xrightarrow{\Re} \varphi$), если $\{t \in T \mid \varphi_n(t) \underset{n}{\longrightarrow} \varphi(t)\} \in \Re$.

$\Re$-сходимость обладает некоторыми свойствами, присущими сходимости $\mu$-п. в., а именно: если $\varphi_n \xrightarrow{\Re} \varphi$, $\psi_n \xrightarrow{\Re} \psi$ и $(\forall n) \quad \varphi_n \overset{\Re}{\sim} \psi_n$, то $\varphi \overset{\Re}{\sim} \psi$; если $\varphi_n \xrightarrow{\Re} \varphi$, причем $(\forall n) \quad \varphi_n \overset{\Re}{\sim} \psi_n$ и $\varphi \overset{\Re}{\sim} \psi$, то $\psi_n \xrightarrow{\Re} \psi$.

Пусть $X$ — МП. Положим

$$\langle \Sigma, \mathcal{B}_X \rangle_T = \{\varphi \in \langle \Sigma, \mathcal{B}_X \rangle \mid T_\varphi = T\}.$$

Очевидно, если $\varphi \in \langle \Sigma, \mathcal{B}_X \rangle_T$, а $\psi \overset{\Re}{\sim} \varphi$, то и $\psi \in \langle \Sigma, \mathcal{B}_X \rangle_T$; если $\varphi_n \xrightarrow{\Re} \varphi$, причем $(\forall n)$ $\varphi_n \in \langle \Sigma, \mathcal{B}_X \rangle_T$, то и $\varphi \in \langle \Sigma, \mathcal{B}_X \rangle_T$.

Пусть $\Omega \subset T \times X$, причем $\mathrm{pr}_T\, \Omega = T$. Положим

$$N_\Omega := \{\varphi : T \to X \mid \mathrm{gr}\, \varphi \subset \Omega\} = U_\Omega \bigcap \{\varphi \mid T_\varphi = T\}.$$

Пусть оператор $h$ порожден функцией $f : \Omega \to Y$ ($Y$ — МП). Ясно, что если $\varphi, \psi \in N_\Omega$ и $\varphi \overset{\Re}{\sim} \psi$, то $h\varphi \overset{\Re}{\sim} h\psi$. Это позволяет рассматривать оператор $h$ на множестве классов $\Re$-эквивалентных функций, на которые распадается $N_\Omega$. Однако мы будем по-прежнему считать, что $h$ определен на индивидуальных функциях.

**Определение 2.6.** Оператор $h$ называется *$D$-непрерывным в точке $\varphi \in N_\Omega$ в смысле $\Re$-сходимости* при выполнении условия: если $\varphi_n \in N_\Omega$, причем $\forall t \in T \quad (\varphi(t), \varphi_n(t)) \in D$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\varphi_n \xrightarrow{\Re} \varphi$, то $h\varphi_n \xrightarrow{\Re} h\varphi$.

Положим

$$W_\Omega := \{\varphi \in \langle \Sigma, \mathcal{B}_X \rangle_T \mid \mathrm{gr}\, \varphi \subset \Omega\} = V_\Omega \bigcap \{\varphi \mid T_\varphi = T\}.$$

Из замечания 2.1, следствия 2.1 и условия (C2) вытекает

**Теорема 2.4.** *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Тогда $W_\Omega \neq \emptyset$, $h(W_\Omega) \subset \langle \Sigma, \mathcal{B}_Y \rangle$ и оператор $h \quad D$-непрерывен на $W_\Omega$ в смысле $\Re$-сходимости.*

Ввиду теоремы 2.2 утверждение теоремы 2.4 останется в силе, если условие (C2) заменить более общим ("локальным") условием:

(LC2) $\quad \forall \varphi \in W_\Omega \quad (\exists A_\varphi \in \Re) \quad \forall t \in A_\varphi$ функция $f^t \quad D$-непрерывна в точке $\varphi(t)$.

Другими словами, (LC2) означает, что $\forall \varphi \in W_\Omega$ выполняется условие ($\mathrm{C2}_\varphi$).

**2.4.** Рассмотрим вопрос о $D$-непрерывности оператора $h$ в смысле сходимости п. в. и по мере. Пусть на $\sigma$-алгебре $\Sigma$ задана неотрицательная счетно-аддитивная мера $\mu$, а $X$ — СМП с метрикой $d$. Если $\varphi_n \in \langle \Sigma, \mathcal{B}_X \rangle_T$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то по следствию 2.2 $d[\varphi_0(\cdot), \varphi_n(\cdot)] \in \langle \Sigma, \mathcal{B}_{\mathbf{R}} \rangle$, $n = 1, 2, \ldots$ Значит, можно говорить о сходимости по мере: $\varphi_n \xrightarrow{\mu} \varphi_0$ на множестве $A \in \Sigma$, если $(\forall \delta > 0)$ $\mu\{t \in A \mid d[\varphi_0(t), \varphi_n(t)] > \delta\} \underset{n}{\longrightarrow} 0$.

Далее, в определении 2.7 и леммах 2.2 и 2.3 предполагается *априори*, что функция $f : \Omega \to Y$, где $\mathrm{pr}_T\, \Omega = T$, а $Y$ — СМП, порождает оператор $h$, для которого $h(W_\Omega) \subset \langle \Sigma, \mathcal{B}_Y \rangle$.

**Определение 2.7.** Оператор $h$ называется *$D$-непрерывным в смысле сходимости $\mu$-п. в.* (*$D$-непрерывным по мере*) в точке $\varphi \in W_\Omega$ при выполнении условия: если $\varphi_n \in W_\Omega$, причем $\forall t \in T$ $(\varphi(t), \varphi_n(t)) \in D$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\varphi_n \to \varphi \quad \mu$-п. в. на $T$ (соответственно, $\varphi_n \xrightarrow{\mu} \varphi$ на каком-либо множестве $A$ с конечной мерой), то $h\varphi_n \to h\varphi \quad \mu$-п. в. на $T$ (соответственно, $h\varphi_n \xrightarrow{\mu} h\varphi$ на $A$).

Из классических теорем Лебега и Рисса (см., напр., [11], гл. 6, § 5) вытекает

**Лемма 2.2.** *Если оператор $h \quad D$-непрерывен в точке $\varphi \in W_\Omega$ в смысле сходимости $\mu$-п. в., то он $D$-непрерывен по мере в этой точке.*

Из леммы 2.2 следует

**Лемма 2.3.** *Если $\varphi \in W_\Omega$ и $\mu$-п. п. к. $t$ функция $f^t$ $D$-непрерывна в точке $\varphi(t)$, то оператор $h$ $D$-непрерывен в точке $\varphi$ в смысле сходимости $\mu$-п. в., а значит и по мере.*

Из замечания 2.1, следствия 2.1 и леммы 2.3 вытекает

**Теорема 2.5.** *Пусть в условиях теоремы* 2.1 *$X$ и $Y$ — СМП,* $\mathrm{pr}_T\,\Omega = T$ *и* $\mu(T \setminus T_0) = 0$ *($T_0$ — множество из условия* (C2)*). Тогда $W_\Omega \neq \emptyset$, $h(W_\Omega) \subset \langle \Sigma, \mathcal{B}_Y \rangle$ и $h$ $D$-непрерывен на $W_\Omega$ в смысле сходимости $\mu$-п. в. (и в силу леммы* 2.2 *по мере).*

Заметим, что условие теоремы 2.5 можно ослабить, заменив (C2) условием (LC2), в котором $\mu(T \setminus A_\varphi) = 0$.

В заключение параграфа приведем удобный для многих приложений частный случай теоремы 2.5.

**Следствие 2.3.** Пусть мера $\mu$ полна, $X$ и $Y$ — СМП, $\mathrm{pr}_T\,\Omega = T$, $(\forall t \in T)$ $\Omega^t \subset \mathrm{cl}(\mathrm{int}\,\Omega^t)$, функция $f : \Omega \to Y$ удовлетворяет условиям Каратеодори, т. е. $\forall x \in \mathrm{pr}_X\,\Omega$ $f_x \in \langle \Sigma, \mathcal{B}_X \rangle$ и $\mu$-п. п. к. $t \in T$ функция $f^t$ непрерывна на $\Omega^t$.

Тогда $W_\Omega \neq \emptyset$, $h(W_\Omega) \subset \langle \Sigma, \mathcal{B}_Y \rangle$ и $h$ $D$-непрерывен на $W_\Omega$ в смысле сходимости $\mu$-п. в. (и, следовательно, по мере).

## 3. Необходимость $D$-условий Каратеодори для $D$-непрерывности оператора Немыцкого

**3.1.** В дальнейшем существенную роль играет теорема В.Л. Левина об измеримости проекции и измеримом выборе (см. [9], теорема 2 и следствие 2, [10], п. 1.2). В ней используется понятие $\mathcal{A}$-операции (определение и свойства см., напр., в [12]). Если $\mathcal{E}$ — некоторая система множеств, то через $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ обозначается совокупность всех множеств, полученных в результате $\mathcal{A}$-операции над множествами из $\mathcal{E}$.

**Теорема Левина.** *Пусть $(T, \Sigma)$ — ИП, $X$ — суслинское МП (т. е. $X$ — МП, являющееся непрерывным образом полного СМП), $K$ — непустое множество в $T \times X$, причем $K \in \mathcal{A}(\Sigma \otimes \mathcal{B}_X)$. Тогда* $\mathrm{pr}_T\,K \in \mathcal{A}(\Sigma)$ *и существует такая* $(\sigma[\mathcal{A}(\Sigma)], \mathcal{B}_X)$*-измеримая функция* $\varphi : \mathrm{pr}_T\,K \to X$*, что* $\mathrm{gr}\,\varphi \subset K$.

Через $\sigma[\mathcal{A}(\Sigma)]$ обозначена $\sigma$-алгебра, порожденная совокупностью $\mathcal{A}(\Sigma)$. Так что если $\sigma$-алгебра $\Sigma$ замкнута относительно $\mathcal{A}$-операции, т. е. $\mathcal{A}(\Sigma) = \Sigma$, то $\sigma[\mathcal{A}(\Sigma)] = \Sigma$ и, следовательно, функция $\varphi$ из теоремы Левина $(\Sigma, \mathcal{B}_X)$-измерима.

Примеры $\sigma$-алгебр, замкнутых относительно $\mathcal{A}$-операции, приведены в [9]. Пожалуй, самый популярный из них — $\sigma$-алгебра с $\sigma$-конечной полной мерой. Приведем пример с более слабым ограничением, чем $\sigma$-конечность.

Пусть мера $\mu$ на $\sigma$-алгебре $\Sigma$ полна и удовлетворяет условию $(*)$: если $A \subset T$, причем $A \bigcap B \in \Sigma$ для любого $B \in \Sigma$ с конечной мерой, то $A \in \Sigma$. Тогда $\mathcal{A}(\Sigma) = \Sigma$. Действительно, пусть для любого $B \in \Sigma$ с конечной мерой $\Sigma_B := \{A \subset B \mid A \in \Sigma\}$. Очевидно, $(B, \Sigma_B, \mu|_{\Sigma_B})$ — пространство с полной конечной мерой, и, как уже говорилось, $\mathcal{A}(\Sigma_B) = \Sigma_B$. С другой стороны, непосредственно из определения $\mathcal{A}$-операции следует равенство $\mathcal{A}(\Sigma_B) = \{A \bigcap B \mid A \in \mathcal{A}(\Sigma)\}$. Тогда $\forall A \in \mathcal{A}(\Sigma)$ и для любого $B \in \Sigma$ с конечной мерой $A \bigcap B \in \mathcal{A}(\Sigma_B) = \Sigma_B \subset \Sigma$. Отсюда следует согласно условию $(*)$ $A \in \Sigma$. Таким образом, $\mathcal{A}(\Sigma) = \Sigma$.

**3.2.** В дальнейшем до конца статьи предполагаются следующие условия:

a) $(T, \Sigma)$ — ИП, причем $\mathcal{A}(\Sigma) = \Sigma$;

b) $X$ — суслинское МП с метрикой $d$ (следовательно, $X$ — СМП);

c) $\Omega \subset T \times X$, причем $\mathrm{pr}_T\,\Omega = T$;

d) $Y$ — СМП с метрикой $\rho$;

e) $f : \Omega \to Y$ — стандартная функция; точнее говоря, $(\exists T_0 \in \Re)\quad f_0 \in \langle \Lambda, \mathcal{B}_Y \rangle$ (отсюда, в частности, следует, что $\Omega_0 \in \Lambda$);

f) множество $D$ $(\operatorname{diag} X^2 \subset D \subset X^2)$ удовлетворяет условиям: $(\forall x \in X)$ $D^x = \operatorname{cl}(\operatorname{int} D^x)$, $(\forall u \in X)$ $D_u \in \mathcal{B}_X$.

Из этих условий следует, что $W_\Omega \neq \emptyset$. Действительно, в силу теоремы Левина существует такая функция $\varphi : T_0 \to X$, что $\varphi \in \langle \Sigma, \mathcal{B}_X \rangle$ и $\operatorname{gr} \varphi \subset \Omega_0$. Продолжим ее на множество $T$ так, чтобы $\operatorname{gr} \varphi \subset \Omega$. Тогда $\varphi \in W_\Omega$.

Кроме того, из условия e) следует: 1) по теореме 1.1 функция $f$ супизмерима и, в частности, $h(W_\Omega) \subset \langle \Sigma, \mathcal{B}_Y \rangle$ (на самом деле это вложение, в силу непустоты множества $W_\Omega$, равносильно супизмеримости $f$); 2) $(\forall x \in \operatorname{pr}_X \Omega)\quad \Omega_x \in \Sigma$ и $f_x \in \langle \Sigma, \mathcal{B}_Y \rangle$, т. е. выполняется условие (C1).

**Лемма 3.1.** *Если* $\varphi \in \langle \Sigma, \mathcal{B}_X \rangle$, *то* $L := \{(t,u) \bigm| (\varphi(t), u) \in D\} \in \Lambda$.

**Доказательство.** Пусть $X_0$ — счетное всюду плотное в $X$ множество. Утверждение леммы вытекает из равенства

$$L = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{v \in X_0} \{t \mid \varphi(t) \in D_v\} \times S(v, 1/n). \ \square$$

**Следствие 3.1.** [13]. Если $\varphi, \psi \in \langle \Sigma, \mathcal{B}_X \rangle$, то $\{t \mid (\varphi(t), \psi(t)) \in D\} \in \Sigma$.

**Доказательство.** Используя множество $L$ из леммы 3.1, имеем $\{t \mid (\varphi(t), \psi(t)) \in D\} = \{t \mid (t, \psi(t)) \in L\} = G_\psi^{-1}(L)$. Остается применить леммы 1.1 и 3.1. $\square$

**Лемма 3.2.** $\{[(t,x),u] \mid (x,u) \in D\} \in \Lambda \otimes \mathcal{B}_X$.

**Доказательство.** Это следует из леммы 3.1, если заменить в ней $(T, \Sigma)$ на $(T \times X, \Lambda)$, а $\varphi(t)$ — на $\varphi(t,x) := x$. $\square$

Заметим, что в леммах 3.1, 3.2 и следствии 3.1 ИП $(T, \Sigma)$ и СМП $X$ произвольны, и вложение $\operatorname{diag} X^2 \subset D$ не используется.

**Лемма 3.3.** *При произвольных ИП* $(T, \Sigma)$ *и ТП* $X$ *отображения* $\pi_m : (T \times X) \times X \to T \times X$, $m = 1, 2$, *где* $\pi_1[(t,x),u] = (t,x)$, $\pi_2[(t,x),u] = (t,u)$, $(\Lambda \otimes \mathcal{B}_X, \Lambda)$*-измеримы.*

**Доказательство.** Если $A \in \Sigma$, $B \in \mathcal{B}_X$, то $\pi_1^{-1}(A \times B) = (A \times B) \times X$, $\pi_2^{-1}(A \times B) = (A \times X) \times B$. Так что $\pi_m^{-1}(A \times B) \in \Lambda \otimes \mathcal{B}_X$, $m = 1, 2$. Отсюда следует требуемое. $\square$

Следующие две леммы играют решающую роль при получении основных результатов.

Пусть $\varphi \in W_\Omega$. Положим

$$Q_\varphi := \{t \in T \mid \text{функция } f^t \ D\text{-непрерывна в точке } \varphi(t)\}.$$

**Лемма 3.4.** $Q_\varphi \in \Sigma$.

**Доказательство.** Рассмотрим функцию $g : \Omega_0 \to \mathbf{R}$,

$$g(t,u) := \rho(f_0(t,u),\, h\varphi(t)).$$

Положим $l(t,u) = h\varphi(t)$, $(t,u) \in \Omega_0$. Так как $h\varphi \in \langle \Sigma, \mathcal{B}_Y \rangle$, то $l \in \langle \Lambda, \mathcal{B}_Y \rangle$. Кроме того, $f_0 \in \langle \Lambda, \mathcal{B}_Y \rangle$. Тогда из следствия 2.2, где роли $T$, $\Sigma$, $X$, $\varphi$, $\psi$ играют соответственно $T \times X$, $\Lambda$, $Y$, $f_0$, $l$, вытекает, что $g \in \langle \Lambda, \mathcal{B}_{\mathbf{R}} \rangle$. Положим при $k, n = 1, 2, \ldots$

$$E_{kn} := \{(t,u) \in \Omega_0 \mid u \in S_D(\varphi(t), 1/k),\ g(t,x) > 1/n\}.$$

Так как включение $u \in S_D(\varphi(t), 1/k)$ означает, что $(\varphi(t), u) \in D$ и $d(\varphi(t), u) < 1/k$, то в силу теоремы 2.3 и леммы 3.1 $E_{kn} \in \Lambda$. Тогда по теореме Левина и в силу условия а) $\mathrm{pr}_T E_{kn} \in \Sigma$. Нетрудно проверить, что

$$T_0 \setminus Q_\varphi = \bigcup_n \bigcap_k \mathrm{pr}_T E_{kn}. \tag{3.1}$$

Следовательно, $T_0 \setminus Q_\varphi \in \Sigma$. Но т. к. $T_0 \in \Sigma$, то и $T_0 \bigcap Q_\varphi \in \Sigma$. Кроме того, т. к. $T_0 \in \Re$, то $Q_\varphi \setminus T_0 \in \Sigma$. Таким образом, $Q_\varphi \in \Sigma$. $\square$

Положим

$$M := \{(t, x) \in \Omega_0 \mid \text{функция } f^t\ D\text{-разрывна в точке } x\},$$
$$E := \{t \in T \mid \text{функция } f^t\ D\text{-непрерывна на множестве } \Omega^t\}.$$

Очевидно, $\mathrm{pr}_T M = T_0 \setminus E$.

**Лемма 3.5.** $M \in \mathcal{A}(\Lambda)$, $E \in \Sigma$.

**Доказательство.** Положим $z := [(t, x), u]$, $Z := \{z \mid (t, x) \in \Omega_0,\ (t, u) \in \Omega_0\}$. Так как $\Omega_0 \in \Lambda$, то по лемме 3.3 $Z \in \Lambda \otimes \mathcal{B}_X$. Рассмотрим функцию $q : Z \to R$,

$$q(z) := \rho(f_0(t, x),\ f_0(t, u)),$$

и покажем, что $q \in \langle \Lambda \otimes \mathcal{B}_X, \mathcal{B}_\mathbf{R} \rangle$. Действительно, т. к. $f_0 \in \langle \Lambda, \mathcal{B}_Y \rangle$, то в силу леммы 3.3 $f_m := f_0 \circ \pi_m|_Z \in \langle \Lambda \otimes \mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y \rangle$, $m = 1, 2$. Остается заметить, что $q(z) = \rho(f_1(z), f_2(z))$, и применить следствие 2.2, заменив в нем $T$, $\Sigma$, $X$, $\varphi$, $\psi$, $T_\varphi$ $(= T_\psi)$ соответственно на $(T \times X) \times X$, $\Lambda \otimes \mathcal{B}_X$, $Y$, $f_1$, $f_2$, $Z$.

Введем еще функцию $p : Z \to \mathbf{R}$, $p(z) = d(x, u)$. Из следствия 2.2 легко получить, что $p \in \langle \Lambda \otimes \mathcal{B}_X, \mathcal{B}_\mathbf{R} \rangle$.

Положим при $k, n = 1, 2, \ldots$

$$F_{kn} := \{z \in Z \mid u \in S_D(x, 1/k),\ q(z) > 1/n\}.$$

Из предыдущего и леммы 3.2 следует, что $F_{kn} \in \Lambda \otimes \mathcal{B}_X$, откуда по теореме Левина (где роль $(T, \Sigma)$ играет $(T \times X, \Lambda)$) $\mathrm{pr}_{T \times X} F_{kn} \in \mathcal{A}(\Lambda)$. Нетрудно проверить, что $M = \bigcup_n \bigcap_k \mathrm{pr}_{T \times X} F_{kn}$. Следовательно, $M \in \mathcal{A}(\Lambda)$. Снова по теореме Левина $\mathrm{pr}_T M \in \mathcal{A}(\Sigma) = \Sigma$; но т. к. $E \bigcap T_0 = T_0 \setminus \mathrm{pr}_T M \in \Sigma$ и $T_0 \in \Re$, то $E \in \Sigma$. $\square$

**Следствие 3.2.** Если $M \neq \emptyset$, то $\exists \varphi \in W_\Omega \quad (\forall t \in \mathrm{pr}_T M) \quad (t, \varphi(t)) \in M$.

**Доказательство.** Так как по лемме 3.5 $M \in \mathcal{A}(\Lambda)$, то по теореме Левина (с учетом равенства $\mathcal{A}(\Sigma) = \Sigma$) $(\exists \varphi : \mathrm{pr}_T M \to X) \quad \varphi \in \langle \Sigma, \mathcal{B}_X \rangle$, $\mathrm{gr}\, \varphi \subset M$. Так как $W_\Omega \neq \emptyset$, то функцию $\varphi$ можно продолжить на множество $T$ так, чтобы $\varphi \in W_\Omega$. $\square$

**3.3.** Мы будем рассматривать две ситуации для ИП $(T, \Sigma)$:

$(\alpha)$ ситуация без меры;

$(\beta)$ на $\sigma$-алгебре $\Sigma$ задана неотрицательная счетно-аддитивная мера $\mu$, причем $\mu(T \setminus T_0) = 0$, где $T_0$ — множество из условия е) (см. п. 3.2).

Мы скажем, что некоторое высказывание справедливо $\Re$-п. п. к. $t$, если оно выполняется $\forall t$ из некоторого множества, входящего в систему $\Re$.

**Теорема 3.1.** *Пусть в ситуации* $(\alpha)$ $((\beta))$ *выполняется условие:* $\forall \varphi \in W_\Omega$ *функция* $f^t$ *$D$-непрерывна в точке* $\varphi(t)$ *$\Re$-п. п. к.* $t$ *(соответственно $\mu$-п. п. к.* $t$*). Тогда функция* $f^t$ *$D$-непрерывна на* $\Omega^t$ *$\Re$-п. п. к.* $t$ *(соответственно $\mu$-п. п. к.* $t$*).*

**Доказательство.** Если $M = \emptyset$, то $T_0 \subset E$, так что $E \in \Re$, а в ситуации $(\beta)$ к тому же $\mu(T \setminus E) = 0$. Поэтому оба утверждения тривиально выполняются. Пусть $M \neq \emptyset$. Тогда по следствию 3.2 $\exists\varphi \in W_\Omega \quad (\forall t \in \mathrm{pr}_T\, M) \quad (t, \varphi(t)) \in M$.

В ситуации $(\alpha)$ по условию $\exists A_\varphi \in \Re \quad (\forall t \in A_\varphi)$ функция $f^t$ $D$-непрерывна в точке $\varphi(t)$. Следовательно, $\mathrm{pr}_T\, M \subset T_0 \setminus A_\varphi$. Положим $T_1 = T_0 \bigcap A_\varphi$. Тогда $T_1 \in \Re$ и $\forall t \in T_1$ функция $f^t$ $D$-непрерывна на $\Omega^t$.

В ситуации $(\beta)$ функция $f^t$ $D$-непрерывна в точке $\varphi(t)$ $\mu$-п. п. к. $t$. Следовательно, $\mu(\mathrm{pr}_T\, M) = 0$. Но, т. к. $\mathrm{pr}_T\, M = T_0 \setminus E$, а $\mu(T \setminus T_0) = 0$, то $\mu(T \setminus E) = 0$. □

Таким образом, в условиях теоремы 3.1 функция $f$ в ситуации $(\alpha)$ удовлетворяет условию (C2). То же будет и в ситуации $(\beta)$, если мера $\mu$ полна, т. к. тогда $E \in \Re$. Тем самым теорема 3.1 обобщает утверждение об эквивалентности условий (C2) и (QC2) (“квазиусловие” Каратеодори), установленное в [14], [15] для стандартной функции $f : T \times X \to Y$ в ситуации полного локально-компактного СМП $X$ и $\sigma$-конечной полной меры $\mu$. К тому же в [14], [15] речь идет об обычной непрерывности функции $f^t$.

Пусть $\varphi \in W_\Omega$. Мы скажем, что последовательность $\{\varphi_k\}$ $\varphi$-правильна, если $\varphi_k \in W_\Omega$, причем $\forall t \in T \quad (\varphi(t), \varphi_k(t)) \in D$, $k = 1, 2, \ldots$, и $\varphi_k \to \varphi$ равномерно на $T$.

**Теорема 3.2.** *Пусть $\varphi \in W_\Omega$ и в ситуации $(\alpha)$ ($(\beta)$) для любой $\varphi$-правильной последовательности $\{\varphi_k\}$*

$$\lim_k h\varphi_k(t) = h\varphi(t) \tag{3.2}$$

*$\forall t \in T_0$ (соответственно $\mu$-п. в. на $T$). Тогда функция $f^t$ $D$-непрерывна в точке $\varphi(t)$ при каждом $t \in T_0$ (соответственно $\mu$-п. п. к. $t$).*

**Доказательство.** Воспользуемся обозначениями из леммы 3.4 и положим

$$H_n := \bigcap_k \mathrm{pr}_T\, E_{kn}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Докажем, что $T_0 \subset Q_\varphi$ (соответственно $\mu(T \setminus Q_\varphi) = 0$, что равносильно равенству $\mu(T_0 \setminus Q_\varphi) = 0$). Предположим противное. Тогда в силу (3.1) $(\exists m)$ $H_m \neq \emptyset$ (соответственно, $\mu H_m > 0$). Как показано в процессе доказательства леммы 3.4, $E_{km} \in \Lambda$, $k = 1, 2, \ldots$ По теореме Левина $\forall k$ $\exists \varphi_k : \mathrm{pr}_T\, E_{km} \to X$ $(\varphi_k \in \langle \Sigma, \mathcal{B}_X \rangle$, $\mathrm{gr}\, \varphi_k \subset E_{km})$.

Продолжим функции $\varphi_k$ на $T$, положив

$$\varphi_k(t) = \varphi(t), \quad t \in T \setminus \mathrm{pr}_T\, E_{km}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Тем самым получим $\varphi$-правильную последовательность $\{\varphi_k\}$. В то же время $\forall t \in H_m$

$$\rho(h\varphi_k(t), h\varphi(t)) > 1/m, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{3.3}$$

что противоречит условию (заметим, что $H_m \subset T_0$). □

В ситуации $(\beta)$ из теоремы 3.2 очевидным образом следует, что если оператор $h$ $D$-непрерывен в точке $\varphi \in W_\Omega$ в смысле сходимости $\mu$-п. в., то $\mu$-п. п. к. $t$ функция $f^t$ $D$-непрерывна в точке $\varphi(t)$.

**Теорема 3.3.** *Если $\forall \varphi \in W_\Omega$ выполняются условия теоремы 3.2, то в ситуации $(\alpha)$ функция $f^t$ $D$-непрерывна на $\Omega^t$ $(\forall t \in T_0)$, а в ситуации $(\beta)$ — $\mu$-п. п. к. $t$.*

**Доказательство.** В ситуации $(\alpha)$ нужно доказать, что $T_0 \subset E$, т. е. что $M = \emptyset$. Предположим противное. Тогда по следствию 3.2 $\exists \varphi \in W_\Omega$ $(\forall t \in \mathrm{pr}_T\, M)$ $(t, \varphi(t)) \in M$. Но это противоречит теореме 3.2, т. к. $\mathrm{pr}_T\, M \subset T_0$. В ситуации $(\beta)$ достаточно применить теоремы 3.2 и 3.1. □

**Следствие 3.3.** Если $\forall\varphi \in W_\Omega$ выполняются условия теоремы 3.2, причем в ситуации ($\beta$) мера $\mu$ полна, то функция $f$ удовлетворяет $D$-условиям Каратеодори (в обеих ситуациях).

**Следствие 3.4.** Пусть в ситуации ($\beta$) мера $\mu$ полна. Тогда, если оператор $h$ $D$-непрерывен на $W_\Omega$ в смысле сходимости $\mu$-п. в., то функция $f$ удовлетворяет $D$-условиям Каратеодори.

**Доказательство.** Пусть $\varphi \in W_\Omega$ и последовательность $\{\varphi_k\}$ $\varphi$-правильна. Тогда $h\varphi_k \to h\varphi$ $\mu$-п. в., так что (3.2) выполняется $\mu$-п. в. Остается применить следствие 3.3. □

**3.4.** Обратимся к вопросу о выполнении $D$-условий Каратеодори при $D$-непрерывности оператора $h$ по мере. При этом будем рассматривать ситуацию ($\beta$) с локально конечной мерой $\mu$. Это значит, что если $\mu A > 0$, то $(\exists B \subset A)\quad 0 < \mu B < \infty$.

**Лемма 3.6.** *Пусть для фиксированной функции $\varphi \in W_\Omega$ выполняется следующее условие: если последовательность $\{\varphi_k\}$ $\varphi$-правильна и*

$$(\exists e \subset T,\ 0 < \mu e < \infty)\ (\forall t \in T \setminus e)\ \varphi_k(t) = \varphi(t),\ k = 1, 2, \ldots, \tag{3.4}$$

*то*

$$(\exists t \in e) \quad \inf_k \rho(h\varphi_k(t), h\varphi(t)) = 0. \tag{3.5}$$

*Тогда $\mu$-п. п. к. $t$ функция $f^t$ $D$-непрерывна в точке $\varphi(t)$.*

**Доказательство.** Предположим противное. Тогда, как и в доказательстве теоремы 3.2 (ситуация ($\beta$)), $(\exists m)\ \mu H_m > 0$. Выделим из $H_m$ подмножество $e$, $0 < \mu e < \infty$, и применим теорему Левина к множествам $E_{km} \bigcap (e \times X)$, $k = 1, 2, \ldots$ Согласно этой теореме $(\forall k)\quad \exists \varphi_k : e \to X$ $(\varphi_k \in \langle \Sigma, \mathcal{B}_X \rangle,\ \operatorname{gr}\varphi_k \subset E_{km})$. Продолжим функции $\varphi_k$ на $T$, положив $(\forall k)\quad \varphi_k(t) = \varphi(t)$, $t \in T \setminus e$. Тогда последовательность $\{\varphi_k\}$ $\varphi$-правильна и удовлетворяет условию (3.4). В то же время $\forall t \in e$ выполняется (3.3), что противоречит условию. □

**Теорема 3.4.** *Если оператор $h$ $D$-непрерывен по мере в точке $\varphi \in W_\Omega$, то $\mu$-п. п. к. $t$ функция $f^t$ $D$-непрерывна в точке $\varphi(t)$.*

**Доказательство.** Покажем, что для функции $\varphi$ выполняется условие леммы 3.6. Действительно, пусть $\{\varphi_k\}$ — $\varphi$-правильная последовательность, удовлетворяющая условию (3.4). Тогда $\varphi_k \xrightarrow{\mu} \varphi$ на множестве $e$, так что $h\varphi_k \xrightarrow{\mu} h\varphi$ на $e$. По теореме Рисса $\exists \{h\varphi_{k_p}\}$ $h\varphi_{k_p} \xrightarrow[p]{} h\varphi$ $\mu$-п.в. на $e$. Так как $\mu e > 0$, то условие (3.5) выполняется. □

Из теорем 3.4 и 3.1 вытекает

**Теорема 3.5.** *Если оператор $h$ $D$-непрерывен по мере на множестве $W_\Omega$, то $\mu$-п. п. к. $t$ функция $f^t$ $D$-непрерывна на множестве $\Omega^t$.*

**Следствие 3.5.** Пусть (вдобавок к локальной конечности) мера $\mu$ полна. Тогда если оператор $h$ $D$-непрерывен по мере на $W_\Omega$, то функция $f$ удовлетворяет $D$-условиям Каратеодори.

Теоремы 3.4, 3.5, следствие 3.5 обобщают прежние результаты авторов [5], [6], [14]–[16] о необходимости условий Каратеодори для непрерывности оператора Немыцкого по мере.

**Литература**


1. Appell J., Zabrejko P.P. *Nonlinear superposition operators.* – Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1990 – 312 p.
2. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.* – М.: Наука, 1966. – 499 с.
3. Шрагин И.В. *Условия измеримости суперпозиций* // ДАН СССР. – 1971. – Т. 197. – № 2. – С. 295–298.
4. Шрагин И.В. *Суперпозиционная измеримость* // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 1. – С. 82–92.
5. Непомнящих Ю.В. *Обобщение одной теоремы И.В. Шрагина* // Функц.-дифференц. уравнения. – Пермь, 1991. – С. 152–154.
6. Непомнящих Ю.В. *К вопросу о справедливости гипотезы Немыцкого* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 4. – С. 34–35.
7. Шрагин И.В. *Локально определенные операторы и гипотеза Немыцкого* // Функц.-дифференц. уравнения. – Пермь, 1991. – С. 95–101.
8. Shragin I.V. *Locally defined operators and a Nemytskii's conjecture* // Funct. Different. Equat. – Israel Seminar. – 1995. – № 4. – P. 99–103.
9. Левин В.Л. *Измеримые сечения многозначных отображений и проекции измеримых множеств* // Функц. анализ и его прилож. – 1978. – Т. 12, вып. 2. – С. 40–45.
10. Левин В.Л. *Измеримые сечения многозначных отображений в топологические пространства и верхние огибающие интегрантов Каратеодори* // ДАН СССР. – 1980. – Т. 252. – № 3. – С. 535–539.
11. Вулих Б.З. *Краткий курс теории функций вещественной переменной. Введение в теорию интеграла.* – Учеб. пособие. – 2-е изд. – М.: Наука, 1973. — 350 с.
12. Куратовский К., Мостовский А. *Теория множеств.* – М.: Мир, 1970. – 416 с.
13. Шрагин И.В. *Условия сходимости суперпозиций* // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13. – № 10. – С. 1900–1901.
14. Шрагин И.В. *Необходимость условий Каратеодори для непрерывности оператора Немыцкого* // Функц.-дифференц. уравнения и краев. задачи мат. физ. – Пермь, 1978. – С. 128–134.
15. Шрагин И.В. *Об условиях Каратеодори* // УМН. – 1979. – Т. 34. – вып. 3. – С. 219–220.
16. Непомнящих Ю.В. *Свойства оператора Урысона в пространствах равномерно непрерывных и почти периодических функций.* – Перм. ун-т. – Пермь, 1992. – 165 с. – Деп. в ВИНИТИ 15.09.92, № 2787–В92.



*Пермский государственный университет*



*Поступила*
08.11.1995