Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2011, № 7, с. 80–93 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421100123\0075*

А.А. ЩЕГЛОВА

О НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ РЕШЕНИЙ АЛГЕБРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Аннотация. Рассматривается нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенная относительно производной искомой вектор-функции и тождественно вырожденная в области определения. В предположениях, обеспечивающих существование решения, исследуется проблема поиска и описания многообразия согласования. Доказан аналог теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных данных при условии, что последние лежат на многообразии согласования.

Ключевые слова: непрерывная зависимость от начальных данных, согласованные начальные данные, нелинейная алгебро-дифференциальная система, существование решения.

УДК: 517.922 : 517.911

Abstract. We consider a nonlinear system of ordinary differential equations, which is unsolved with respect to the derivative of the desired vector function and identically degenerate in the definition domain. We study the consistency manifold under assumptions that guarantee the existence of a solution. We prove an analog of the theorem on the continuous dependence of solutions on the initial data, assuming that the latter belong to the consistency manifold.

Keywords: continuous dependence on initial data, consistent initial data, nonlinear differential algebraic equations, existence of a solution.

1. Введение

Рассматривается система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$F(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad t \in T = [0, +\infty), \tag{1.1}$$

где n-мерная вектор-функция $F(t, x, y)$ определена в области

$$\mathcal{D} = \{(t, x, y) : t \in T,\ \|x - \overline{x}\| < K_0,\ \|y - \overline{y}\| < K_1\} \subset \mathbb{R}^{2n+1},$$

$x(t)$ — искомая n-мерная вектор-функция, $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ — фиксированные значения, K_0, K_1 — положительные константы. Здесь и далее использованы следующие обозначения: $\| * \|$ — одна из норм в евклидовом пространстве, $\phi'(t) = \frac{d}{dt}\phi(t)$, $\phi^{(i)}(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^i \phi(t) \quad \forall \phi(t) \in \mathbb{C}^i(T)$.

Поступила 29.03.2010

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00132) и Сибирского отделения Российской академии наук (интеграционный проект № 85).

Предполагается, что $F(t,x,y)$ имеет в $\mathcal{D}$ достаточное число непрерывных частных производных по каждому из своих аргументов и $\det \frac{\partial F(t,x,y)}{\partial y} \equiv 0$ в $\mathcal{D}$. Системы такого рода называются, в частности, алгебро-дифференциальными (АДС). Мерой неразрешенности АДС относительно производной искомой вектор-функции служит целочисленная величина r, $0 \leq r \leq n$, называемая индексом.

В теории АДС используются различные определения индекса: дифференциальный индекс [1], индекс неразрешенности [2], [3], tractability index [4]–[6], strangeness index [7]. Различные определения индекса обсуждаются, например, в [2], [3]. В данной работе под индексом понимается порядок дифференциального оператора, преобразующего (1.1) в систему, в которой разделены "дифференциальная" и "алгебраическая" части.

Выберем $t_0 \in T$ и поставим для системы (1.1) задачу Коши

$$x(t_0) = x_0, \tag{1.2}$$

где x_0 — некоторый вектор из $\mathbb{R}^n$.

Одной из особенностей АДС является отсутствие в общем случае непрерывной зависимости решений от начальных данных. Даже для линейной системы сколь угодно малое возмущение начальных данных может привести к тому, что возмущенная задача будет неразрешима в пространстве $\mathbb{C}^1(T)$.

Пример 1. Размерность пространства решений АДС

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \in T,$$

равна нулю, и единственное решение этой системы имеет вид $x(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) - f_2'(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$. Поэтому поставленная начальная задача (1.2) разрешима лишь при одном значении

$$x_0 = \begin{pmatrix} f_1(t_0) - f_2'(t_0) \\ f_2(t_0) \end{pmatrix}.$$

В то же время исследование системы обыкновенных дифференциальных уравнений на устойчивость невозможно, если непрерывная зависимость решений от начальных данных отсутствует: определения устойчивости подразумевают, что таковая имеет место. В работах по устойчивости АДС (см., в частности, [2], [4], [5], [8], [9]) рассматриваются либо линейные системы, либо частные случаи нелинейных АДС, причем ограничения, накладываемые на систему, являются достаточными, чтобы обеспечивать наличие такой зависимости.

В статье решается задача поиска и описания многообразия согласования для нелинейных АДС общего вида (1.1) и обосновывается аналог теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных данных при условии, что последние лежат на указанном многообразии. Многообразие согласования представляет собой гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$ в линейном случае, а для нелинейной АДС — некоторую поверхность в пространстве $\mathbb{R}^n$, описываемую набором $n-d$ конечных уравнений $g(t,x) = 0$, $\operatorname{rank} \partial g(t,x)/\partial x = n-d$, где d — размерность многообразия (в линейном случае пространства) решений АДС. В примере 1 функция $g(t,x) = x - \begin{pmatrix} f_1(t) - f_2'(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$, $\operatorname{rank} \frac{\partial g(t,x)}{\partial x} = n = 2$. В литературе многообразие согласования называется также согласованным многообразием [9] или многообразием решений [10].

2. Определения и обозначения

Определение 1. *Решением* задачи (1.1), (1.2) на интервале T называется n-мерная вектор-функция $x(t) \in \mathbb{C}^1(T)$, удовлетворяющая условию (1.2) и такая, что $(t, x(t), x'(t)) \in \mathcal{D}$, $F(t, x(t), x'(t)) = 0 \quad \forall t \in T$.

Для доказательства теоремы о непрерывной зависимости решений АДС (1.1) от начальных данных в работе используется r-продолженная система.

Определение 2. Система конечных уравнений

$$\mathcal{F}_r(t,x,y,z_1,\dots,z_r) = \begin{pmatrix} F(t,x,y) \\ F_1(t,x,y,z_1) \\ \dots \\ F_r(t,x,y,z_1,\dots,z_r) \end{pmatrix} = 0, \tag{2.1}$$

в которой $x, y, z_j \in \mathbb{R}^n$, а функции $F_j(t,x,y,z_1,\dots,z_j)$ $(j=\overline{1,r})$ обладают свойством: для любой n-мерной вектор-функции $\phi(t) \in \mathbb{C}^j(T)$ такой, что $(t,\phi(t),\phi'(t)) \in \mathcal{D}\quad \forall t \in T$,

$$F_j(t,\phi(t),\phi'(t),\phi''(t),\dots,\phi^{(j+1)}(t)) = \left(\frac{d}{dt}\right)^j F(t,\phi(t),\phi'(t)),$$

называется r-*продолженной системой* по отношению к АДС (1.1).

Для систем дифференциальных уравнений с частными производными продолженные системы являются рабочим аппаратом достаточно давно ([11], с. 26). Применительно к системам обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенным относительно производных, продолженные системы впервые рассмотрены в ([12], с. 22) в связи с теорией струй. Для решения и исследования линейных и нелинейных АДС системы вида (2.1) широко используются американскими математиками (см., в частности, [1], [13]). В работах [2], [7] для нормализации АДС (1.1) также привлекаются продолженные системы. В [14] 1-продолженная система фигурирует при обосновании теоремы существования решения нелинейной АДС индекса 1.

Поставим в соответствие функции $F(t,x,y)$ следующие объекты: матрицу размеров $n(r+1)\times nr$

$$\Gamma_{r,z} = \Gamma_{r,z}(t,x,y,z_1,\dots,z_r) = \begin{pmatrix} \partial\mathcal{F}_r/\partial z_1 & \dots & \partial\mathcal{F}_r/\partial z_r \end{pmatrix},$$

квадратную матрицу порядка $n(r+1)$

$$\Gamma_{r,y} = \begin{pmatrix} \partial\mathcal{F}_r/\partial y & \Gamma_{r,z} \end{pmatrix}$$

и матрицу размеров $n(r+1)\times n(r+2)$

$$\Gamma_{r,x} = \begin{pmatrix} \partial\mathcal{F}_r/\partial x & \Gamma_{r,y} \end{pmatrix}.$$

Допустим, что для любой точки $t_0 \in T$ найдутся векторы x_0, y_0, $z_{1,0},\dots,z_{r,0} \in \mathbb{R}^n$ такие, что $(t_0,x_0,y_0) \in \mathcal{D}$ и

$$\mathcal{F}_r(t_0,x_0,y_0,z_{1,0},\dots,z_{r,0}) = 0. \tag{2.2}$$

Если при этом ранг матрицы $\Gamma_{r,x}$ в точке $\alpha = (t_0,x_0,y_0,z_{1,0},\dots,z_{r,0})$ полный, т. е.

$$\operatorname{rank}\Gamma_{r,x}(\alpha) = n(r+1), \tag{2.3}$$

то для системы конечных уравнений (2.1) выполняются все условия теоремы о неявной функции ([15], с. 66), согласно которой из (2.1) в соответствующей области можно выразить $n(r+1)$ компонент вектора $\operatorname{colon}(x,y,z_1,\dots,z_r)$[1] (обозначим их буквой ξ) как функции переменной t и остальных n компонент этого вектора (будем обозначать их η)

$$\xi = \xi(t,\eta) \tag{2.4}$$

[1] $\operatorname{colon}(c_1,c_2,\dots,c_r) = \begin{pmatrix} c_1^\top & c_2^\top & \dots & c_r^\top \end{pmatrix}^\top$, $c_i \in \mathbb{R}^n$, $^\top$ — символ транспонирования.

$\forall (t,\eta)\in \mathcal{W}=\{(t,\eta): t\in(t_0-\tau, t_0+\tau)\subseteq T,\ \|\eta-\eta_0\|<K_\eta\}$, где $\tau>0$, K_η — некоторая константа;

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=P\,\mathrm{colon}\,(x,y,z_1,\dots,z_r)\,;\quad \begin{pmatrix}\xi_0\\ \eta_0\end{pmatrix}=P\,\mathrm{colon}\,(x_0,y_0,z_{1,0},\dots,z_{r,0})\,; \tag{2.5}$$

$\xi,\xi_0\in\mathbb{R}^{n(r+1)}$, $\eta,\eta_0\in\mathbb{R}^n$, P – матрица перестановок.

Поскольку матрица $\Gamma_{r,x}$ имеет размеры $n(r+1)\times n(r+2)$, то в общем случае неособенный минор порядка $n(r+1)$ матрицы $\Gamma_{r,x}(\alpha)$, в соответствии с которым определяются функции (2.4), неединственен. Будем искать этот минор следующим образом. В матрице $\Gamma_{r,y}(\alpha)$ выберем $s=\operatorname{rank}\Gamma_{r,y}(\alpha)$ $(s\le n(r+1))$ линейно независимых столбцов, в состав которых должно войти максимально возможное число первых n столбцов этой матрицы. Дополним эти столбцы $n(r+1)-s$ линейно независимыми столбцами вычисленной в точке α матрицы $\partial\mathcal{F}_r/\partial x$, которая представляет собой первые n столбцов матрицы $\Gamma_{r,x}(\alpha)$. Полученные $n(r+1)$ линейно независимых столбцов составят искомый минор. При этом $s\ge nr$.

Определение 3. Описанный выше неособенный минор порядка $n(r+1)$ матрицы $\Gamma_{r,x}(\alpha)$ назовем *разрешающим.*

Далее функции (2.4) будем считать соответствующими разрешающему минору.

Обозначим через $G_r(t,\eta)$ матрицу, получающуюся при подстановке функций (2.4) в $\Gamma_{r,z}(t,x,y,z_1,\dots,z_r)$.

3. Многообразие согласования

Лемма 1. *Пусть*

1) $F(t,x,y)\in\mathbb{C}^{r+1}(\mathcal{D})$;
2) *для любой точки* $t_0\in T$ *существуют векторы* $x_0,y_0,z_{j,0}\in\mathbb{R}^n$ $(j=\overline{1,r})$ *такие, что* $(t_0,x_0,y_0)\in\mathcal{D}$ *и имеют место равенства* (2.2), (2.3);
3) $\operatorname{rank} G_r(t,\eta)=\rho=\mathrm{const}\quad\forall(t,\eta)\in\mathcal{W}$;
4) *разрешающий минор матрицы* $\Gamma_{r,x}(\alpha)$ *включает в себя* ρ *столбцов матрицы* $\Gamma_{r,z}(\alpha)$ *и* n *первых столбцов матрицы* $\Gamma_{r,y}(\alpha)$.

Тогда в окрестности $\mathcal{W}$ *каждой точки* (t_0,η_0) (*см.* (2.5)) *определена неявная функция, удовлетворяющая системе* (2.1) *и имеющая вид*[2]

$$y=f(t,x_2), \tag{3.1}$$
$$x_1=f_0(t,x_2), \tag{3.2}$$
$$Z_1=f_1(t,x_2,Z_2), \tag{3.3}$$

где функции f,f_0,f_1 *имеют непрерывные частные производные по каждому из аргументов*;

$$\mathrm{colon}\,(x_1,\ x_2)=Q_1x,\quad \mathrm{colon}\,(Z_1,\ Z_2)=Q_2\,\mathrm{colon}\,(z_1,\ \dots,\ z_r)\,; \tag{3.4}$$

$x_1\in\mathbb{R}^{nr-\rho}$, $x_2\in\mathbb{R}^{\rho-n(r-1)}$, $Z_1\in\mathbb{R}^\rho$, $Z_2\in\mathbb{R}^{nr-\rho}$; Q_1 *и* Q_2 *— матрицы перестановок строк.*

Доказательство. В силу предполагаемой условием 4) структуры разрешающего минора в неявной функции (2.4), (2.5)

$$\xi=\mathrm{colon}\,(y,\ x_1,\ Z_1)\,,\quad \eta=\mathrm{colon}\,(x_2,\ Z_2)\,,$$

[2] Подразумевается, что неявная функция находится в соответствии с разрешающим минором.

где переменные x_1, x_2, Z_1, Z_2 связаны с переменными $x, z_1, \dots, z_r$ соотношениями (3.4). Таким образом, функция (2.4) может быть записана в виде

$$y = f(t, x_2, Z_2), \quad x_1 = f_0(t, x_2, Z_2), \quad Z_1 = f_1(t, x_2, Z_2). \tag{3.5}$$

В соответствии с предположением 1), по теореме о неявной функции f, f_0, f_1 будут иметь на своих областях определения непрерывные частные производные по каждому из аргументов.

Подставим (3.5) в $\Gamma_{r,z}(t, x, y, z_1, ..., z_r)$, тем самым получим матрицу $G_r(t, \eta) = \overline{G}_r(t, x_2, Z_2)$.

Найдем матрицу Якоби системы (3.5) по переменным Z_1, Z_2

$$J(t, x_2, Z_2) = \begin{pmatrix} O & -\partial f(t, x_2, Z_2)/\partial Z_2 \\ O & -\partial f_0(t, x_2, Z_2)/\partial Z_2 \\ E_\rho & -\partial f_1(t, x_2, Z_2)/\partial Z_2 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Согласно теореме о производной неявной функции ([15], с. 73)

$$\begin{pmatrix} \partial y/\partial Z_2 \\ \partial x_1/\partial Z_2 \\ \partial Z_1/\partial Z_2 \end{pmatrix} = -\big(\, \partial \mathcal{F}_r/\partial y \ \partial \mathcal{F}_r/\partial x_1 \ \partial \mathcal{F}_r/\partial Z_1 \, \big)^{-1} \big(\, \partial \mathcal{F}_r/\partial Z_2 \, \big). \tag{3.7}$$

Умножим матрицу $\Gamma_{r,z}(t, x, y, z_1, \dots, z_r) = \big(\partial \mathcal{F}_r/\partial Z_1 \ \ \partial \mathcal{F}_r/\partial Z_2\big) Q_2$ слева на матрицу $\big(\, \partial \mathcal{F}_r/\partial y \ \partial \mathcal{F}_r/\partial x_1 \ \partial \mathcal{F}_r/\partial Z_1 \, \big)^{-1}$. С учетом (3.7) будем иметь

$$\Big(\partial \mathcal{F}_r/\partial y \ \partial \mathcal{F}_r/\partial x_1 \ \partial \mathcal{F}_r/\partial Z_1\Big)^{-1} \Gamma_{r,z} = \begin{pmatrix} O & -\partial y/\partial Z_2 \\ O & -\partial x_1/\partial Z_2 \\ E_\rho & -\partial Z_1/\partial Z_2 \end{pmatrix} Q_2.$$

Подставим в полученное выражение функции (3.5) и затем умножим его справа на матрицу Q_2^{-1}. В результате получим представление для матрицы J

$$J(t, x_2, Z_2) = H(t, x_2, Z_2) \overline{G}_r(t, x_2, Z_2) \, Q_2^{-1}, \tag{3.8}$$

где $H(t, x_2, Z_2)$ — матрица $\big(\partial \mathcal{F}_r/\partial y \ \partial \mathcal{F}_r/\partial x_1 \ \partial \mathcal{F}_r/\partial Z_1\big)^{-1}$, в которую подставлены функции (3.5). Следовательно, матрица H будет обратимой всюду на своей области определения $\mathcal{W}$.

В силу связи (3.8) предположение 3) леммы влечет за собой равенство

$$\operatorname{rank} J(t, x_2, Z_2) = \rho = \text{const} \quad \forall (t, x_2, Z_2) \in \mathcal{W}.$$

Ввиду последнего обстоятельства из представления (3.6) следует

$$\frac{\partial f(t, x_2, Z_2)}{\partial Z_2} = O, \quad \frac{\partial f_0(t, x_2, Z_2)}{\partial Z_2} = O \ \ \forall (t, y_2, Y_2) \in \mathcal{W}.$$

Это означает, что в (3.5) функции f и f_0 не зависят от переменной Z_2. □

Замечание. Наименьшее значение r $(0 \le r \le n)$, при котором выполняются условия леммы 1, называется *индексом* неразрешенности относительно производной системы (1.1) ([2], с. 123).

Опираясь на лемму 1, получим достаточное условие локальной разрешимости задачи (1.1), (1.2).

Лемма 2. *Пусть*

1) $F(t, x, y) \in \mathbb{C}^{r+2}(\mathcal{D})$;

2) *для любой точки* $t_0 \in T$ *существуют векторы* x_0, y_0, $z_{i,0} \in \mathbb{R}^n$ $(i = \overline{1, r+1})$ *такие, что точка* $a = (t_0, x_0, y_0, z_{1,0}, \ldots, z_{r+1,0})$ *удовлетворяет* $(r+1)$*-продолженной системе*
$$\mathcal{F}_{r+1}(t, x, y, z_1, \ldots, z_{r+1}) = 0 \tag{3.9}$$
и $\operatorname{rank} \Gamma_{r,x}(\alpha) = n(r+1)$, *где* $\alpha = (t_0, x_0, y_0, z_{1,0}, \ldots, z_{r,0})$;
3) $\operatorname{rank} G_r(t, \eta) = \rho = \mathrm{const}$ *всюду в окрестности* $\mathcal{W}$ *точки* (t_0, η_0), *где* n*-мерный вектор* η_0 *является подвектором* (*см.* (2.5)) *вектора* $\operatorname{colon}\big(x_0, y_0, z_{1,0}, \ldots, z_{r,0}\big)$;
4) *разрешающий минор матрицы* $\Gamma_{r,x}(\alpha)$ *включает в себя* ρ *столбцов матрицы* $\Gamma_{r,z}(\alpha)$ *и* n *первых столбцов матрицы* $\Gamma_{r,y}(\alpha)$;
5) $\operatorname{rank} \Gamma_{r+1,y}(a) = \operatorname{rank} \Gamma_{r,y}(\alpha) + n$.

Тогда для любого $t_0 \in T$ *найдется* $\tau = \tau(t_0) > 0$ *такое, что на интервале* $T_\tau = (t_0 - \tau, t_0 + \tau) \subseteq T$ *существует решение задачи* (1.1), (1.2) $x_*(t) \in \mathbb{C}^2(T_\tau)$, *которое также является решением системы уравнений*
$$x_2'(t) = \varphi_0(t, x_2(t)), \quad x_1(t) = f_0(t, x_2(t)), \quad t \in T_\tau, \tag{3.10}$$
где $\operatorname{colon}\big(x_1(t), x_2(t)\big) = Q_1 x(t)$, Q_1 *— матрица перестановок из* (3.4).

Доказательство. В сделанных предположениях из леммы 1 вытекает существование непрерывно обратимого оператора Λ такого, что
$$\Lambda[\mathcal{F}_r(t, x, y, z_1, \ldots, z_r)] = \begin{pmatrix} y - f(t, x_2) \\ x_1 - f_0(t, x_2) \\ Z_1 - f_1(t, x_2, Z_2) \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$
Переменные x_1, x_2, Z_1, Z_2 связаны с переменными $x, z_1, \ldots, z_r$ соотношениями (3.4). Очевидно, что оператор Λ обладает свойством
$$\Lambda[0] = 0. \tag{3.12}$$
Опишем действие оператора Λ с помощью нелинейной функции наиболее общей структуры
$$\Lambda[\mathcal{F}_r(t, x, y, z_1, \ldots, z_r)] = \\ = L(t, x, y, z_1, \ldots, z_r, F(t, x, y), F_1(t, x, y, z_1), \ldots, F_r(t, x, y, z_1, \ldots, z_r)), \tag{3.13}$$
определенной в некоторой окрестности $\mathcal{U}_\alpha$ точки $\alpha = (t_0, x_0, y_0, z_{1,0}, \ldots, z_{r,0})$.

В предположениях леммы функция L имеет непрерывные частные производные по своим аргументам t, x, y, $z_1, \ldots, z_r$, F, $F_1, \ldots, F_r$ до второго порядка включительно. Свойство (3.12) в терминах функции L записывается в виде
$$L\,(t, x, y, z_1, \ldots, z_r, 0, \ldots, 0) = 0 \ \ \forall (t, x, y, z_1, \ldots, z_r) \in \mathcal{U}_\alpha.$$

Обратимся к уравнению (3.1). Умножим его слева на матрицу перестановок строк Q_1 из (3.4). В обозначениях $\left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right) = Q_1 y$, $\left(\begin{smallmatrix} \varphi_1(t,x_2) \\ \varphi_0(t,x_2) \end{smallmatrix}\right) = Q_1 f(t, x_2)$ полученную систему можно представить как
$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(t, x_2), \\ y_2 &= \varphi_0(t, x_2). \end{aligned} \tag{3.14}$$
Размерности векторов y_1 и y_2 совпадают с размерностями векторов x_1 и x_2 из (3.4).

Рассмотрим n-мерную вектор-функцию
$$R\,(t, x, y, z_1, \ldots, z_r, F, F_1, \ldots, F_r) = \\ = \begin{pmatrix} O_{nr-\rho} & E_n & O_\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & E_{nr} \end{pmatrix} L\,(t, x, y, z_1, \ldots, z_r, F, F_1, \ldots, F_r)\,. \tag{3.15}$$

Здесь и далее нижний индекс у нулевых матриц указывает число столбцов в этих матрицах.

Из (3.11), (3.13), (3.15) следует, что $\forall (t, x, y, z_1, \ldots, z_r) \in \mathcal{U}_\alpha$

$$R\,(t, x, y, z_1, \ldots, z_r, F(t, x, y), F_1(t, x, y, z_1), \ldots, F_r(t, x, y, z_1, \ldots, z_r)) = \\ = \begin{pmatrix} y_2 - \varphi_0(t, x_2) \\ x_1 - f_0(t, x_2) \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Так же, как и L, функция R на своей области определения $\mathcal{U}_\alpha$ обладает непрерывными частными производными второго порядка по своим аргументам и

$$R(t, x, y, z_1, \ldots, z_r, 0, \ldots, 0) = 0 \ \ \forall (t, x, y, z_1, \ldots, z_r) \in \mathcal{U}_\alpha. \quad (3.17)$$

Пользуясь определением частной производной, нетрудно показать, что аналогичным свойством обладают и частные производные функции R по переменным $t, x, y, z_1, \ldots, z_r$, а именно, в точках $(t, x, y, z_1, \ldots, z_r, 0, \ldots, 0)$ при всех значениях $(t, x, y, z_1, \ldots, z_r) \in \mathcal{U}_\alpha$

$$\frac{\partial}{\partial t} R = 0, \ \ \frac{\partial}{\partial x} R = 0, \ \ \frac{\partial}{\partial y} R = 0, \ \ \frac{\partial}{\partial z_j} R = 0, \ \ j = 1, 2, \ldots, r. \quad (3.18)$$

Введем функцию

$$R_1(t, x, y, z_1, \ldots, z_{r+1}, F, F_1, \ldots, F_{r+1}) = \\ = \frac{\partial R}{\partial t} + \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z_1} & \ldots & \frac{\partial R}{\partial z_r} \end{pmatrix} \operatorname{colon}(y, z_1, \ldots, z_{r+1}) + \\ + \begin{pmatrix} O_n & \frac{\partial R}{\partial F} & \frac{\partial R}{\partial F_1} & \ldots & \frac{\partial R}{\partial F_r} \end{pmatrix} \mathcal{F}_{r+1}(t, x, y, z_1, \ldots, z_{r+1}). \quad (3.19)$$

Функция R_1 построена по правилу: для любой n-мерной вектор-функции $\chi(t) \in \mathbb{C}^{r+2}(T_\tau)$ такой, что при всех $t \in T_\tau$ для некоторого малого $\tau > 0$ значения $(t, \chi(t), \chi'(t), \ldots, \chi^{(r+2)}(t))$ принадлежат области $\mathcal{U}_a$,

$$R_1\big(t, \chi(t), \chi'(t), \ldots, \chi^{(r+2)}(t), F(t, \chi(t), \chi'(t)), \ldots, F_{r+1}(t, \chi(t), \chi'(t), \ldots, \chi^{(r+2)}(t))\big) = \\ = \frac{d}{dt} R\big(t, \chi(t), \chi'(t), \ldots, \chi^{(r+1)}(t), F(t, \chi(t), \chi'(t)), \ldots, F_r(t, \chi(t), \chi'(t), \ldots, \chi^{(r+1)}(t))\big).$$

Поэтому с учетом (3.16)

$$R_1(t, x, y, z_1, \ldots, z_{r+1}, F, F_1, \ldots, F_{r+1}) = \begin{pmatrix} z_{1,2} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_2} y_2 \\ y_1 - \frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{\partial f_0}{\partial x_2} y_2 \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

где $\operatorname{colon}(z_{1,1}, \ z_{1,2}) = Q_1 z_1$.

Рассмотрим $(r+1)$-продолженную систему (3.9). Неявная функция (3.1)–(3.3) обращает в тождества ее первые $n(r+1)$ уравнения. Проанализируем оставшиеся n уравнений: $F_{r+1}(t, x, y, z_1, \ldots, z_{r+1}) = 0$. Подставив сюда функцию (3.1)–(3.3), получим

$$\overline{F}_{r+1}(t, x_2, Z_2, z_{r+1}) = 0. \quad (3.21)$$

Предположение 5) леммы гарантирует полноту строчного ранга матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \overline{F}_{r+1}}{\partial Z_2} & \frac{\partial \overline{F}_{r+1}}{\partial z_{r+1}} \end{pmatrix} (t_0, x_{2,0}, Z_{2,0}, z_{r+1,0}),$$

где $x_{2,0}$ и $Z_{2,0}$ находятся из соотношений $\operatorname{colon}(x_{1,0},\ x_{2,0}) = Q_1 x_0$, $\operatorname{colon}(Z_{1,0},\ Z_{2,0}) = Q_2 \operatorname{colon}(z_{1,0}, \ldots, z_{r,0})$. Согласно предположению 2) леммы точка $(t_0, x_0, Z_{2,0}, z_{r+1,0})$ удовлетворяет системе (3.21). Таким образом, для этой системы выполняются все условия теоремы о неявной функции, согласно которой из (3.21) можно выразить n компонент вектора $\operatorname{colon}(Z_2, z_{r+1})$ (обозначим их $Z_{2,1}$) как функции переменных t, x_2 и остальных компонент этого вектора (будем обозначать их $Z_{2,2}$) в виде

$$Z_{2,1} = f_2(t, x_2, Z_{2,2}). \tag{3.22}$$

Итак, получена неявная функция (3.1)–(3.3), (3.22), обращающая в тождество систему (3.9).

Поскольку у функции R имеются свойства (3.17), (3.18), то из представления (3.19) следует, что функция (3.1)–(3.3), (3.22) в некоторой окрестности $\mathfrak{U}_a$ точки a обращает в тождественный нуль левые части равенств (3.16) и (3.20), а следовательно, удовлетворяет системе

$$y_2 = \varphi_0(t, x_2), \quad x_1 = f_0(t, x_2), \tag{3.23}$$

$$z_{1,2} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_2} y_2, \quad y_1 = \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_0}{\partial x_2} y_2. \tag{3.24}$$

В последнее уравнение подставим выражение для y_2 из (3.23):

$$y_1 = \frac{\partial f_0(t, x_2)}{\partial t} + \frac{\partial f_0(t, x_2)}{\partial x_2} \varphi_0(t, x_2). \tag{3.25}$$

С другой стороны, функция (3.1)–(3.3) удовлетворяет уравнению (3.14). Отсюда следует, что уравнения (3.14) и (3.25) суть одно и то же.

Положив

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = Q_1 x'(t), \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = Q_1 x(t), \tag{3.26}$$

поставим в соответствие системе конечных уравнений (3.23) систему дифференциально-алгебраических уравнений (3.10) при некотором малом $\tau > 0$.

По построению точка $\alpha = (t_0, x_0, y_0, z_{1,0}, \ldots, z_{r,0})$ удовлетворяет как системе (2.1), так и системе (3.1)–(3.3). Тогда вектор начальных данных (1.2) при $t = t_0$ должен удовлетворять уравнению (3.2). В этом случае решение $x_*(t)$ задачи (3.10), (1.2) будет определено и единственно на интервале T_τ и, кроме того, $x_*(t) \in \mathbb{C}^2(T_\tau)$.

Очевидно, что при подстановке функция $x_*(t)$ обращает уравнения (3.23), (3.24) в тождества на интервале T_τ. Следовательно, она удовлетворяет и уравнению (3.25). А это означает, что $x_*(t)$ обращает в тождество и уравнение (3.14). При этом в (3.23), (3.24), (3.25), (3.14) переменные следует понимать в смысле (3.26). Ввиду того, что неявная функция (3.23), (3.14) удовлетворяет уравнению $F(t, x, y) = 0$, это означает, что функция $x_*(t)$ обращает уравнение (1.1) в тождество на T_τ. □

Следующая теорема утверждает существование многообразия согласования для АДС в форме (1.1). Из доказательства, приведенного ниже, вытекает, что функция $g(t, x)$, описывающая это многообразие, является частью неявной функции (2.4), соответствующей разрешающему минору матрицы $\Gamma_{r,x}(\alpha)$. Причем размерность многообразия решений системы (1.1) равна $d = \rho - n(r-1)$ и $\operatorname{rank} \frac{\partial g(t,x)}{\partial x} = n - d$.

Теорема 1. *Пусть выполнены все предположения леммы* 2.

Тогда для любого $t_0 \in T$ *найдется* $\tau = \tau(t_0) > 0$ *такое, что на интервале* $T_\tau = (t_0 - \tau, t_0 + \tau)$ *существует семейство решений системы* (1.1) $x(t, c)$, $\operatorname{rank} \partial x(t, c)/\partial c = \rho - n(r-1)$. *При* *этом каждое решение* $x(t)$ *АДС* (1.1) *из этого семейства для любого* $t \in T_\tau$ *удовлетворяет системе уравнений*

$$g(t, x(t)) = 0, \tag{3.27}$$

где $g(t,x)$ — $(nr-\rho)$*-мерная вектор-функция, имеющая по своим аргументам непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности* $\mathcal{V}$ *точки* (t_0, x_0)*, и* $\forall (t,x) \in \mathcal{V}$

$$\operatorname{rank} \frac{\partial g(t,x)}{\partial x} = nr - \rho. \tag{3.28}$$

Доказательство. Условия теоремы обеспечивают выполнение всех предположений леммы 1, согласно которой r-продолженная система (2.1) в некоторой окрестности $\mathcal{U}_\alpha$ точки $\alpha = (t_0, x_0, y_0, z_{1,0}, \ldots, z_{r,0})$ эквивалентна системе (3.1)–(3.3).

Положим

$$g(t,x) = x_1 - f_0(t, x_2). \tag{3.29}$$

Из доказательства леммы 1 с учетом условия 1) леммы 2 следует, что $g(t,x)$ — $(nr-\rho)$-мерная вектор-функция, и $g(t,x) \in \mathbb{C}^2(\overline{\mathcal{V}})$, где $\overline{\mathcal{V}}$ — некоторая окрестность точки (t_0, x_0).

Обозначим $X_1 = \operatorname{colon}(y, Z_1)$, $X_2 = Z_2$, где переменные Z_1 и Z_2 определяются вторым из соотношений (3.4). Тогда систему (3.1)–(3.3) можно записать в виде

$$\begin{gathered} X_1 = g_1(t, x, X_2), \\ g(t,x) = 0. \end{gathered} \tag{3.30}$$

В условиях теоремы в соответствии с леммой 2 найдется интервал $T_{\overline{\tau}} = (t_0 - \overline{\tau}, t_0 + \overline{\tau})$, на котором определено решение $x_*(t) \in \mathbb{C}^2(T_{\overline{\tau}})$ системы (1.1), отвечающее начальному условию (1.2). При этом функция $x_*(t)$ для любого $t \in T_{\overline{\tau}}$ должна удовлетворять $nr-\rho$ связям (3.27). В силу полноты ранга матрицы $\Gamma_{r,x}$ в некоторой окрестности точки α, в области $\overline{\mathcal{V}}$ будет выполняться равенство (3.28).

Выберем векторы $\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0, \widetilde{z}_{j,0} \in \mathbb{R}^n$ $(j = \overline{0, r+1})$ таким образом, чтобы 1) $\widetilde{x}_0 \neq x_0$; 2) $\mathcal{F}_{r+1}(t_0, \widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0, \widetilde{z}_{1,0}, \ldots, \widetilde{z}_{r+1,0}) = 0$; 3) $g(t_0, \widetilde{x}_0) = 0$; 4) точка $\widetilde{a} = (t_0, \widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0, \widetilde{z}_{1,0}, \ldots, \widetilde{z}_{r+1,0})$ принадлежала области $\mathcal{U}_a$, в которой остается неособенным минор $(r+2)$-го порядка матрицы $\Gamma_{r+1,x}$, в соответствии с которым при доказательстве леммы 2 находилась неявная функция (3.1)–(3.3), (3.22), удовлетворяющая системе (3.9); 5) соответствующая точка $(t_0, \widetilde{\eta}_0)$ оставалась в области $\mathcal{W}$ постоянства ранга матрицы $G_r(t, \eta)$. Тогда по лемме 2 на некотором интервале $T_{\widetilde{\tau}} = (t_0 - \widetilde{\tau}, t_0 + \widetilde{\tau})$ существует решение $\widetilde{x}_*(t) \in \mathbb{C}^2(T_{\widetilde{\tau}})$ АДС (1.1), отвечающее начальному условию $x(t_0) = \widetilde{x}_0$. При этом $\widetilde{x}_*(t)$ будет удовлетворять уравнению (3.27) $\forall t \in T_{\widetilde{\tau}}$.

Можно утверждать, что найдется интервал T_τ, на котором определено семейство решений системы (1.1) $x(t,c)$. Каждое решение этого семейства обращает уравнение (3.27) в тождество на T_τ. Причем в соответствующей области $\mathcal{V}$ имеет место равенство (3.28).

Поскольку в равенстве (3.29) векторы x_1 и x_2 имеют соответственно размерности $nr - \rho$ и $\rho - n(r-1)$, то $\operatorname{rank} \partial x(t,c)/\partial c = n - (nr - \rho) = \rho - n(r-1)$. □

4. Непрерывная зависимость решений от начальных данных

Теорема 2. *Пусть имеют место все предположения леммы 2. Тогда для любого* $t_0 \in T$ *найдутся* $\delta_0 > 0$ *и* $\tau = \tau(t_0) > 0$ *такие, что для начальных данных*

$$x(t_0) = \widetilde{x}_0 \tag{4.1}$$

с произвольным вектором $\widetilde{x}_0 \in \mathbb{R}^n : \|\widetilde{x}_0 - x_0\| < \delta_0$*, удовлетворяющим при* $t = t_0$ *системе конечных уравнений* (3.30)*, в которой функция* $g(t,x)$ *обладает свойством* (3.28)*,* *на интервале $T_\tau = (t_0 - \tau, t_0 + \tau)$ определено решение $x_*(t)$ задачи* (1.1), (4.1). *Причем вектор-функция $x_*(t) \in \mathbb{C}^2(T_\tau)$ обращает уравнение* (3.27) *в тождество на T_τ.*

Доказательство. Пусть $a = (t_0, x_0, y_0, z_{1,0}, \dots, z_{r+1,0})$ — точка, фигурирующая в формулировке леммы 2. Тогда в соответствии с доказательством этой леммы существует окрестность $\mathcal{U}_a$ этой точки, в которой система (3.9) эквивалентна системе уравнений (3.1)–(3.3), (3.22). Систему (3.1)–(3.3), (3.22) можно записать в следующей форме:

$$\mathcal{Z}_1 = g_2(t, x, \mathcal{Z}_2), \quad g(t, x) = 0, \tag{4.2}$$

где $\mathcal{Z}_1 = \operatorname{colon}(y, Z_1, Z_{2,1})$, $\mathcal{Z}_2 = Z_{2,2}$; $\operatorname{colon}(Z_1, Z_{2,1}, Z_{2,2}) = Q_3 \operatorname{colon}(z_1, \dots, z_{r+1})$, Q_3 — матрица перестановок строк.

Обозначим $\mathcal{Z}_{1,0} = \operatorname{colon}(y_0, Z_{1,0}, Z_{2,1,0})$, $\mathcal{Z}_{2,0} = Z_{2,2,0}$, где

$$\operatorname{colon}(Z_{1,0}, Z_{2,1,0}, Z_{2,2,0}) = Q_3 \operatorname{colon}(z_{1,0}, \dots, z_{r+1,0}),$$

размерности векторов $Z_{1,0}$, $Z_{2,1,0}$, $Z_{2,2,0}$ совпадают с размерностями векторов Z_1, $Z_{2,1}$, $Z_{2,2}$ соответственно. По построению векторы $\mathcal{Z}_{1,0}$ и $\mathcal{Z}_{2,0}$ удовлетворяют первому из уравнений (4.2) при $t = t_0$, $x = x_0$.

Поскольку по теореме о неявной функции $g_2(t, x, \mathcal{Z}_2)$ в (4.2) должна иметь непрерывные частные производные по своим аргументам, то за счет выбора $\widetilde{x}_0$ и $\widetilde{\mathcal{Z}}_{2,0} : g(t_0, \widetilde{x}_0) = 0$, $\|\widetilde{x}_0 - x_0\| \le \delta_0$, $\|\widetilde{\mathcal{Z}}_{2,0} - \mathcal{Z}_{2,0}\| \le \delta_1$ (δ_0, δ_1 — достаточно малые положительные числа), можно найти значение $\widetilde{\mathcal{Z}}_{1,0} = g_2(t, \widetilde{x}_0, \widetilde{\mathcal{Z}}_{2,0})$ такое, что $\left\| \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{Z}}_{1,0} \\ \widetilde{\mathcal{Z}}_{2,0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathcal{Z}_{1,0} \\ \mathcal{Z}_{2,0} \end{pmatrix} \right\| \le \delta_2$ при любом сколь угодно малом $\delta_2 > 0$.

По построению точка $\widetilde{a} = (t_0, \widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0, \widetilde{z}_{1,0}, \dots, \widetilde{z}_{r+1,0})$, где

$$\operatorname{colon}(\widetilde{y}_0, \widetilde{z}_{1,0}, \dots, \widetilde{z}_{r+1,0}) = \begin{pmatrix} E_n & O \\ O & Q_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{Z}}_{1,0} \\ \widetilde{\mathcal{Z}}_{2,0} \end{pmatrix},$$

удовлетворяет системе (4.2), а следовательно, и системе (3.9). Значения δ_0 и δ_1 можно выбрать достаточно малыми для того, чтобы $\widetilde{a}$ находилась в области $\mathcal{U}_a$, в пределах которой минор порядка $n(r+2)$ матрицы $\Gamma_{r+1,x}$, в соответствии с которым находится неявная функция (4.2), сохраняет ненулевое значение. Это обстоятельство влечет за собой выполнение равенства $\operatorname{rank} \Gamma_{r+1,y}(\widetilde{a}) = \operatorname{rank} \Gamma_{r,y}(\widetilde{\alpha})$, $\widetilde{\alpha} = (t_0, \widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0, \widetilde{z}_{1,0}, \dots, \widetilde{z}_{r,0})$, а также тот факт, что разрешающий минор матрицы $\Gamma_{r,x}(\widetilde{\alpha})$ включает в себя ρ столбцов матрицы $\Gamma_{r,z}(\widetilde{\alpha})$ и n первых столбцов матрицы $\Gamma_{r,y}(\widetilde{\alpha})$.

Таким же способом можно добиться того, чтобы соответствующая точка $(t_0, \widetilde{\eta}_0)$, где $\widetilde{\eta}_0$ определяется из соотношения $\operatorname{colon}(\widetilde{\xi}_0, \widetilde{\eta}_0) = P \operatorname{colon}(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0, \widetilde{z}_{1,0}, \dots, \widetilde{z}_{r,0})$ (P — матрица перестановок из (2.5)), принадлежала области постоянства ранга матрицы $G_r(t, \eta)$.

На основании изложенного выше по лемме 2 найдется интервал T_τ, на котором существует решение $x_*(t)$ задачи (1.1), (4.1), причем $x_*(t) \in \mathbb{C}^2(T_\tau)$, кроме того, функция $x_*(t)$ удовлетворяет на T_τ системе (3.1), (3.2), в частности, уравнению (3.27) со свойством (3.28). □

Следующая теорема представляет собой аналог теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных данных. Она утверждает, что все решения АДС (1.1) непрерывно зависят от своих начальных данных, если эти последние лежат на одном и том же многообразии согласования.

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия леммы 2. Тогда для любого $t_0 \in T$ существует $\tau = \tau(t_0) > 0$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такие, что как только*

$\|\widetilde{x}_0 - x_0\| < \delta$, *так* $\|\widetilde{x}(t) - x_*(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \in T_\tau$, *где* $x_*(t)$ *— решение на* T_τ *системы* (1.1), *отвечающее начальному условию* (1.2), $\widetilde{x}(t)$ *– решение на* T_τ *системы* (1.1), *удовлетворяющее начальным данным* (4.1) *с вектором* $\widetilde{x}_0 \in \mathbb{R}^n : g(t_0, \widetilde{x}_0) = 0$.

Доказательство. В сделанных предположениях по лемме 2 для любого $t_0 \in T$ найдется $\tau > 0$ такое, что решение $x_*(t)$ будет определено на интервале T_τ. В соответствии с теоремой 2 задача (1.1), (4.1) также будет иметь на T_τ решение $\widetilde{x}(t)$ при достаточно малом δ. При этом $\widetilde{x}(t), x_*(t) \in \mathbb{C}^2(T_\tau)$ и функции $x_*(t)$, $\widetilde{x}(t) \quad \forall t \in T_\tau$ удовлетворяют системе (3.1), (3.2), в которой следует считать $y = x'(t)$, $\operatorname{colon}(x_1, x_2) = Q_1 x(t)$. В частности, эти функции удовлетворяют уравнению

$$x'(t) - f(t, x_2(t)) = 0, \quad t \in T_\tau, \tag{4.3}$$

где $f(t, x_2)$ имеет на своей области определения непрерывные частные производные второго порядка по своим аргументам.

По теореме о непрерывной зависимости решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4.3) от начальных данных ([16], с. 68) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что как только $\|\widetilde{x}_0 - x_0\| < \delta$, так $\|\widetilde{x}(t) - x_*(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \in T_\tau$. □

5. Иллюстративный пример

Изложенную выше теорию проиллюстрируем на модельном примере.

Пример 2. Рассмотрим однородную АДС

$$F(t, x(t), x'(t)) = \begin{pmatrix} x_2(t)x_1'(t) + x_1(t) \\ x_2^2(t) - x_2(t) \end{pmatrix} = 0, \quad t \in [0, +\infty), \tag{5.1}$$

где $x(t) = \operatorname{colon}(x_1(t), x_2(t))$. Построим для нее 2-продолженную систему

$$\mathcal{F}_2(t, x, y, z_1, z_2) = \begin{pmatrix} x_2 y_1 + x_1 \\ x_2^2 - x_2 \\ y_2 y_1 + x_2 z_{1,1} + y_1 \\ 2x_2 y_2 - y_2 \\ z_{1,2} y_1 + 2y_2 z_{1,1} + x_2 z_{2,1} + z_{1,1} \\ 2y_2^2 + 2x_2 z_{1,2} - z_{1,2} \end{pmatrix} = 0, \tag{5.2}$$

где $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$, $y = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)$, $z_j = \left(\begin{smallmatrix} z_{j,1} \\ z_{j,2} \end{smallmatrix}\right)$, $j = 1, 2$. Матрица $\Gamma_{2,x} = \Gamma_{2,x}(t, x, y, z_1, z_2)$ имеет вид

$$\Gamma_{2,x} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & y_1 & \\ 0 & 2x_2 - 1 & \\ \cline{1-2} 0 & z_{1,1} & \\ 0 & 2y_2 & \Gamma_{2,y} \\ \cline{1-2} 0 & z_{2,1} & \\ 0 & 2z_{1,2} & \end{array}\right), \quad \Gamma_{2,y} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 + y_2 & y_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_2 - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline z_{1,2} & 2z_{1,1} & 2y_2 + 1 & y_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 4y_2 & 0 & 2x_2 - 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Пусть $t_0 \in [0, +\infty)$, для системы (5.1) поставим задачу Коши

$$x_1(t_0) = 2, \quad x_2(t_0) = 1.$$

Найдем многообразие согласования, на котором располагаются заданные начальные значения.

Одним из решений $a = (x_1, x_2, y_1, y_2, z_{1,1}, z_{1,2}, z_{2,1}, z_{2,2})$ системы конечных уравнений (5.2) при $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ является точка $a = (2, 1, -2, 0, 2, 0, -2, 0)$. В точке $\alpha = (2, 1, -2, 0, 2, 0)$

матрица

$$\Gamma_{1,x}(\alpha) = \left(\begin{array}{c|c|cc|c|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

имеет полный ранг по строкам и $\operatorname{rank}\Gamma_{1,z}(\alpha) = 1$. Разрешающий минор матрицы $\Gamma_{1,x}(\alpha)$ выделен пунктиром. Из 1-продолженной системы (т. е. из первых 4-х уравнений системы (5.2)) найдем неявную функцию, соответствующую разрешающему минору,

$$y_1 = -x_1, \quad y_2 = 0, \quad z_{1,1} = x_1, \qquad x_2 = 1. \tag{5.3}$$

Подставив найденные связи в матрицу $\Gamma_{1,z}(t, x, y, z_1)$, получим

$$G_1(t,\eta) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right).$$

Очевидно, $\operatorname{rank} G_1(t,\eta) = \rho = 1 \quad \forall \eta = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ z_{1,2} \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$, $\forall t \in [0, +\infty)$. Легко вычислить, что $\operatorname{rank}\Gamma_{1,y}(\alpha) = 3$ и $\operatorname{rank}\Gamma_{2,y}(a) = 5$.

Таким образом, все условия леммы 2, а следовательно, теорем 1–3 выполнены.

Равенство (5.3) определяет функцию $g(t,x)$, описывающую многообразие согласования,

$$g(t,x) = x_2 - 1 = 0, \tag{5.4}$$

причем $\operatorname{rank} \frac{\partial g(t,x)}{\partial x} = \operatorname{rank}(0\ 1) = 1$. Семейство решений АДС (5.1), лежащее на многообразии согласования (5.4) (см. формулировку теоремы 1), имеет вид

$$x(t,c) = \begin{pmatrix} x_1(t,c_1) \\ x_2(t,c_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные. Поскольку функция $x(t,c)$ зависит только от c_1, размерность многообразия решений $d = 1$. Согласно теореме 3, все решения этого семейства непрерывно зависят от своих начальных данных.

Система (5.1) обладает не одним многообразием согласования и соответственно не одним семейством решений.

Зададим другие начальные данные

$$x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0. \tag{5.5}$$

Тогда одним из решений системы (5.2) является точка $\widetilde{a} = (0,0,0,0,0,0,5,5)$.

Как и в предыдущем случае, обведем пунктиром разрешающий минор матрицы $\Gamma_{1,x}$, вычисленной в точке $\widetilde{\alpha} = (0,0,0,0,0,0)$,

$$\Gamma_{1,x}(\widetilde{\alpha}) = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Очевидно, $\operatorname{rank}\Gamma_{1,x}(\widetilde{\alpha}) = 4$, $\operatorname{rank}\Gamma_{1,y}(\widetilde{\alpha}) = 2$ и $\operatorname{rank}\Gamma_{1,z}(\widetilde{\alpha}) = 0$. В данном случае соответствующая разрешающему минору неявная функция (2.4) принимает вид

$$y_1 = y_2 = 0, \quad x_1 = x_2 = 0.$$

Следовательно, $G_1(t,\eta) = O$ и $\operatorname{rank} G_1(t,\eta) = \rho = 0$ $\forall \eta = \left(\begin{smallmatrix} z_{1,1} \\ z_{1,2} \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$, $\forall t \in [0,+\infty)$. Поскольку $\operatorname{rank}\Gamma_{2,y}(\widetilde{a}) = 4$, то в отношении начальных данных (5.5) теоремы 1–3 также справедливы.

Многообразие согласования задается уравнением

$$g(t,x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{5.6}$$

и $\operatorname{rank} \frac{\partial g(t,x)}{\partial x} = \operatorname{rank} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 2$. Семейство решений АДС (5.1), лежащее на многообразии (5.5) исчерпывается единственной интегральной кривой

$$x_1(t) = x_2(t) = 0, \quad t \in [0,+\infty),$$

поэтому размерность многообразия решений в этом случае равна нулю.

Других многообразий согласования, кроме уже построенных (5.4) и (5.6), у системы (5.1) не имеется.

6. Заключение

Центральную роль при доказательстве теорем о существовании многообразия согласования и о непрерывной зависимости решений от начальных данных играет лемма 2, которая фактически утверждает эквивалентность систем (1.1) и (3.10) в смысле решений. Эта эквивалентность понимается в локальном смысле, поскольку, как показано в разделе 5, система вида (1.1) может иметь не одно многообразие согласования. Система (3.10) (в частности, многобразие согласования) находится как часть компонент неявной функции, удовлетворяющей r-продолженной системе (2.1) и соответствующей специальным образом выбранному минору матрицы $\Gamma_{r,x}$.

Подчеркнем, что лишь существенно нелинейная (нелинейная по x') АДС может иметь более одного многообразия согласования. Можно показать, что в случае линейной или квазилинейной (линейной по x') системы многообразие согласования будет единственным.

Если для заданных начальных данных (1.2) не существует векторов $y_0, z_{i,0} \in \mathbb{R}^n$ $(i = \overline{1,r})$ таких, что выполняется равенство (2.2), это означает, что эти начальные данные не лежат ни на одном из многообразий согласования рассматриваемой системы. В этом случае задача Коши (1.1), (1.2) будет неразрешима.

Литература

[1] Campbell S.L. *Non-BDF methods for the solution of linear time varying implicit differential equations*, Proc. Amer. Contr. Conf. San Diego, California, June 5–6, 1984 (San Diego, 1984), vol. 3, p. 1315–1318.

[2] Чистяков В.Ф., Щеглова А.А. *Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем* (Наука, Новосибирск, 2003).

[3] Щеглова А.А. *Нелинейные алгебро-дифференциальные системы*, Сибирский матем. журн. **48** (4), 931–948 (2007).

[4] Hanke M., Macana E.I., März R. *On asymptotics in case of index-2 differential-algebraic equations*, Preprint 97-3 (Institut für Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin, 1997).

[5] Lamour R., März R., Winkler R. *How Floquet-theory applies to differential-algebraic equations*, Preprint 96–15 (Institut für Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin, 1996).

[6] Griepentrog E., Maerz R. *Differential-algebraic equations and their numerical treatment* (BSB B.G. Teubner Verlag gesellschaft, Leipzig, 1986).

[7] Kunkel P., Mehrmann V. *Regular solutions of nonlinear differential-algebraic equations and their numerical determination*, Numer. Math. **79** (4), 581–600 (1998).

[8] Щеглова А.А., Чистяков В.Ф. *Устойчивость линейных алгебро-дифференциальных систем*, Дифференц. уравнения **40** (1), 47–57 (2004).

[9] Muller P.C. *Stability and optimal control of nonlinear descriptor systems: a survey*, Appl. Math. Comp. **8** (2), 269–286 (1998).

[10] Чистяков В.Ф. *Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром* (Наука, Новосибирск, 1996).

[11] Рождественский Б.П., Яненко Н.Н. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике* (Наука, М., 1976).

[12] Арнольд В.И. *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений* (Наука, М., 1978).

[13] Brenan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R. *Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations* (SIAM, Philadelphia, 1996).

[14] Чистяков В.Ф. *О связи структуры пучка матриц с существованием решений неявной системы ОДУ*, в сб. “Методы оптимизации и исследование операций” (Изд-во СЭИ СО АН СССР, Иркутск, 1984), с. 194–202.

[15] Шилов Г.Е. *Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных*, Ч. 1–2 (Наука, М., 1972).

[16] Петровский И.Г. *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений* (ГИТТЛ, М.–Л., 1949).

А.А. Щеглова

главный научный сотрудник,
Институт динамики систем и теории управления
Сибирского отделения Российской академии наук,
ул. Лермонтова, д. 134, г. Иркутск, 664033,

`e-mail:` shchegl@icc.ru

A.A. Shcheglova

Leading Researcher,
Institute for System Dynamics and Control Theory
of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,
134 Lermontov str., Irkutsk, 664033 Russia,

`e-mail:` shchegl@icc.ru