УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Том 114, кн. 8 ЮБИЛЕЙНЫЙ (1804—1954) СБОРНИК *1954*

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПОЛЯ ТЯГОТЕНИЯ

А. З. Петров

(Казанский университет. Кафедра геометрии)

В этой статье даётся развернутое доказательство результатов, полученных нами ранее и впервые опубликованных в 1951 году [1]. Именно, показывается, что для V_4, определяющих поля тяготения, задаваемых формой

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \tag{1}$$

с фундаментальным тензором, удовлетворяющим уравнениям поля

$$R_{ij} = \varkappa g_{ij} \tag{2}$$

(будем называть такие многообразия — T_4), можно установить классификацию, исследуя алгебраическую структуру тензора кривизны.

§ 1. БИВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Рассмотрим некоторую точку P нашего многообразия T_4 и сопоставим ему локальное центро-аффинное E_4. В этом E_4 выделим все тензоры, которые удовлетворяют условиям: 1) число ковариантных индексов так же, как и число контравариантных индексов, должно быть чётным. 2) ко- и контравариантные индексы могут быть разбиты на отдельные антисимметрические пары. Каждую такую пару будем рассматривать как один собирательный индекс и будем его обозначать греческими буквами, в отличие от индексов T_4 и E_4, для которых оставим латинские буквы. Таким образом, по числу значений, которые могут принимать собирательные индексы, мы получим многообразие $N = \frac{n(n-1)}{2}$ измерения (6 измерений для $n = 4$), причем тензоры E_4, обладающие указанными свойствами, определят в этом пространстве тензоры вдвое меньшей валентности.

Можно утверждать, что *каждой точке* T_4, таким образом, *сопоставляется локальная 6-мерная центро-аффинная геометрия с группой*

$$\eta^{\alpha'} = A^{\alpha'}_{\alpha}\eta^{\alpha}, \quad \eta^{\alpha} = A^{\alpha}_{\alpha'}\eta^{\alpha'},$$
$$|A^{\alpha'}_{\alpha}| \neq 0, \quad A^{\alpha}_{\beta}, \ A^{\beta'}_{\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}. \tag{3}$$

В самом деле, если мы упорядочим собирательные индексы (выбирая при этом из двух возможных пар ij и ji одну), то получим шесть возможных собирательных индексов. Остановимся, например, на следующей нумерации:

$$1 - 14, \quad 2 - 24, \quad 3 - 34, \quad 4 - 23, \quad 5 - 31, \quad 6 - 12.$$

Рассмотрим теперь преобразование составляющей T^{ij} некоторого, вообще говоря, непростого бивектора

$$T^{i'j'} = A_{ij}^{i'j'}\, T^{ij},$$

$$\text{полагая } A_{\alpha}^{\alpha'} = 2A_{ij}^{[i'j']}, \quad \left(\text{где } A_i^{i'} = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)_P\right);$$

получим в собирательных индексах соотношение

$$T^{\alpha'} = A_{\alpha}^{\alpha'}\, T^{\alpha},$$

т. е. совокупность бивекторов T_n (размерность в этом вопросе не имеет значения) определяет в E_N совокупность контравариантных векторов, при условии, если имеют место соотношения (3). Что касается этих соотношений, то они могут быть проверены непосредственно путём перехода к латинским индексам.

Будем называть полученное многообразие *бивекторным*. Особый интерес для дальнейшего будет представлять тензор кривизны T_4. В бивекторном пространстве ему будет соответствовать симметрический тензор 2-й валентности

$$R_{ijkl} \to R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}.$$

В каждом локальном E_6 можно ввести метрику, используя для этой цели любой тензор T_4, обладающий свойствами:

$$M_{ijkl} = M_{klij} = -M_{jikl} = -M_{ijlk},$$

и при условии, что соответствующий ему двухвалентный тензор в E_6 — неособенный. В качестве такого фундаментального тензора E_6 возьмём тензор

$$g_{ikjl} = g_{ij}\, g_{kl} - g_{il}\, g_{kj} \to g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}. \tag{4}$$

Легко видеть, что $g_{\alpha\beta}$ даёт невырождающееся мероопределение, так как $|g_{ij}| \neq 0$, а

$$|g_{\alpha\beta}| = p\,|g_{ij}|^{2n}, \quad p \neq 0.$$

Для g_{ij}, определенного, $g_{\alpha\beta}$ также будет определенным, для неопределенного g_{ij} тензор $g_{\alpha\beta}$ также будет, вообще, неопределенным. Отметим, что мы будем рассматривать далее лишь те поля тяготения, которые соответствуют реальному распределению материи в пространстве; для этого необходимо [2], чтобы в каждой данной точке T_4 фундаментальный тензор g_{ij} в вещественной системе координат приводился к виду:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

т. е. мы приходим, таким образом, к так называемому пространству Минковского. Тогда из (4) следует, что для репера, соответствующего матрице (5), фундаментальный тензор R_6 будет иметь вид:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad |g_{\alpha\beta}| = -1, \tag{5}$$

т. е., по существу дела, $g_{\alpha\beta}$ — неопределенный тензор.

§ 2. КЛАССИФИКАЦИЯ T_4

Ряд наиболее интересных проблем, возникающих при исследовании римановых многообразий, связан с тензором кривизны V_n. При помощи этого тензора, как известно, вводится понятие кривизны V_n в данном двумерном направлении в данной точке, или, что то же самое, гауссовой кривизны двумерной поверхности, геодезической в данной точке,

$$K = \frac{R_{ijkl} V^{ij} V^{kl}}{g_{pqrs} V^{pq} V^{rs}}, \tag{7}$$

где g_{pqrs} имеет вид (4), а двумерное направление, определяемое векторами $\underset{1}{V^i}$, $\underset{2}{V^i}$, характеризуется простым бивектором $V^{ij} = \underset{[1}{V^i}\underset{2]}{V^j}$. Введём *обобщенную кривизну* V_n, которая получится, если в (7) снять требование простоты бивектора V^{ij}. Этот обобщенный инвариант K в некоторой точке V_n будет однородной функцией нулевого измерения от составляющих бивектора V^{ij} (не простого, вообще,) и, очевидно, он будет иметь смысл в бивекторном пространстве, где он может быть записан в виде

$$K = \frac{R_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta}{g_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta}. \tag{8}$$

Поставим задачей определить критические значения K, что равносильно нахождению тех векторов V^α в R_N, для которых K принимает критические значения. Условимся эти критические значения K называть *стационарными кривизнами* V_n, а соответствующие бивекторы V^α — *стационарными направлениями* V_n. Дело, таким образом, сводится к определению *безусловно-стационарных векторов* V^α в бивекторном пространстве из необходимых и достаточных условий стационарности:

$$\frac{\partial K}{\partial V^\alpha} = 0. \tag{9}$$

Необходимо учитывать, что при неопределенном g_{ij} тензор $g_{\alpha\beta}$ тоже неопределенный, и, следовательно, возможно появление изотропных стационарных направлений

$$g_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta = 0. \tag{10}$$

Исключим сначала этот случай, чтобы, затем, вернуться к нему ниже.

Если (10) не имеет места, то (9) приводят к выводу, что

$$(R_{\alpha\beta} - K g_{\alpha\beta}) V^\beta = 0, \tag{11}$$

т. е. стационарные направления V_n будут главными направлениями тензора $R_{\alpha\beta}$ в бивекторном пространстве, а стационарные кривизны V_n будут характеристическими числами векового уравнения

$$|R_{\alpha\beta} - K g_{\alpha\beta}| = 0. \tag{12}$$

Пусть, теперь, (10) имеет место для стационарного V^α. Так как нас интересует только K, удовлетворяющее (9), то K — непрерывная функция V^α, и, следовательно, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$R_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta = 0.$$

Тогда значение K для стационарного изотропного направления V^α можно, исходя из непрерывности K как функции V^α, вычислить следующим образом:

$$K(V^\alpha) = \lim_{dV^\alpha \to 0} K(V^\alpha + dV^\alpha).$$

Если обозначить для некоторого V^α

$$\varphi = g_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta, \quad \psi = R_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta, \tag{13}$$

то для стационарного изотропного V^α

$$K(V^\alpha) = \lim_{dV^\alpha \to 0} \frac{\psi(V^\alpha + dV^\alpha) - \psi(V^\alpha)}{\varphi(V^\alpha + dV^\alpha) - \varphi(V^\alpha)} = \lim \frac{\sum\limits_\sigma \frac{\partial}{\partial V^\sigma} \psi \, dV^\sigma + \ldots}{\sum\limits_\sigma \frac{\partial}{\partial V^\sigma} \varphi \, dV^\sigma + \ldots}$$

и, так как этот предел не может зависеть от способов изменения dV^α, то

$$K(V^\alpha) = \frac{\frac{\partial}{\partial V^\sigma}\psi}{\frac{\partial}{\partial V^\sigma}\varphi} = \frac{R_{\sigma\beta} V^\beta}{g_{\sigma\beta} V^\beta},$$

т. е. мы снова приходим к (11).

Определение стационарных кривизн и направлений R_N приводит к исследованию пары квадратичных форм (13). Следовательно, приведение к каноническому виду этой пары форм в вещественном пространстве даёт классификацию для тензора кривизны V_n в данной точке и той области V_n, что включает эту точку, в которой *характеристика К-матрицы*

$$\| R_{\alpha\beta} - K g_{\alpha\beta} \| \tag{14}$$

остаётся неизменной. Каждому типу характеристики матрицы (14) соответствует поле тяготения особого рода. Это и определяет искомую классификацию T_4.

Пользуясь вещественным преобразованием, матрицу $\| g_{\alpha\beta} \|$ всегда можно привести к виду (6) и остаётся, пользуясь вещественными ортогональными преобразованиями, упростить матрицу $\| R_{\alpha\beta} \|$.

Теорема 1. *Матрица* $\| R_{\alpha\beta} \|$ *для ортогонального репера (5) будет симметрично-сдвоенная.*

Для репера (5) уравнения поля примут вид:

$$\sum_k e_k R_{ikjk} = \varkappa g_{ij}, \quad e_k = \pm 1,$$

т. е. при $i = j$

$$\sum_k e_k R_{ikik} \varkappa e_i,$$

а при $i \neq j$

$$e_k R_{ikjk} + e_l R_{iljl} = 0 \quad (i, j, k, l \neq).$$

Записывая эти соотношения в собирательных индексах бивекторного пространства и учитывая нумерацию, введенную в § 1, получим для матрицы выражение:

$$\| R_{\alpha\beta} \| = \left\| \begin{array}{c|c} M & N \\ \hline N & -M \end{array} \right\|;$$

$$M = \left\| \begin{matrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{matrix} \right\|; \tag{15}$$

$$N=\begin{Vmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{Vmatrix}, \quad \begin{matrix} m_{\alpha\beta}=m_{\beta\alpha}, \\ n_{\alpha\beta}=n_{\beta\alpha}. \end{matrix}$$
$$(\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3)$$

где $\sum\limits_{i=1}^{3} m_{ii}=\varkappa$, а $\sum\limits_{1}^{3} n_{ll}=0$, в силу известного тождества Риччи, что и доказывает теорему. Заметим, что к такого рода матрицам, при дополнительном, однако, условии их ортогональности, пришел В. Ф. Каган при изучении группы Лоренцовых преобразований [3]. Изучением такого рода матриц при том же предположении об ортогональности занимались Я. С. Дубнов [4] и А. М. Лопшиц [5]. Факт, доказанный предыдущей теоремой, имеет место для любого ортогонального репера, и, следовательно, учитывая, что ортогональный репер определяется при $n=4$ с 6-ю степенями свободы, можно рассчитывать на дальнейшее упрощение матрицы за счет выбора 6 вращений.

Предварительно докажем теорему, резко сужающую число возможных на первый взгляд типов характеристик матрицы (14).

Теорема 2. *Характеристика К-матрицы (14) всегда состоит из двух одинаковых частей.*

Приведем матрицу (14) к более простому виду, пользуясь так называемыми элементарными преобразованиями, которые, как известно, не меняют элементарных делителей матрицы и, следовательно, её характеристики. Изобразим эту матрицу в виде

$$\left\Vert \begin{array}{c|c} m_{\alpha\beta}+K\delta_{\alpha\beta} & n_{\alpha\beta} \\ \hline n_{\alpha\beta} & -m_{\alpha\beta}-K\delta_{\alpha\beta} \end{array} \right\Vert$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера. Прибавляя к каждому из трёх первых столбцов соответствующий столбец из числа последних трёх, умноженный на i, получим эквивалентную матрицу

$$\left\Vert \begin{array}{c|c} m_{\alpha\beta}+in_{\alpha\beta}+K\delta_{\alpha\beta} & n_{\alpha\beta} \\ \hline -i\,(m_{\alpha\beta}+in_{\alpha\beta}+K\delta_{\alpha\beta}) & -m_{\alpha\beta}-K\delta_{\alpha\beta} \end{array} \right\Vert;$$

прибавляя к последним трём строкам соответствующие строки из числа первых трёх, умноженные на i, приведем матрицу к виду:

$$\left\Vert \begin{array}{c|c} m_{\alpha\beta}+in_{\alpha\beta}+iK\delta_{\alpha\beta} & n_{\alpha\beta} \\ \hline 0 & -m_{\alpha\beta}+in_{\alpha\beta}-K\delta_{\alpha\beta} \end{array} \right\Vert.$$

Наконец, умножая первые три столбца на $\frac{i}{2}$ и прибавляя к последним соответствующие три столбца и, затем, проделывая то же самое над последними трёмя строками, придём к матрице

$$\left\Vert \begin{array}{c|c} m_{\alpha\beta}+in_{\alpha\beta}+K\delta_{\alpha\beta} & 0 \\ \hline 0 & m_{\alpha\beta}-in_{\alpha\beta}+K\delta_{\alpha\beta} \end{array} \right\Vert = \left\Vert \begin{array}{c|c} P(K) & 0 \\ \hline 0 & \overline{P}(K) \end{array} \right\Vert,$$

эквивалентной K-матрице (14). Дело привелось к исследованию двух 3-мерных матриц $P(K)$ и $\overline{P}(K)$, соответствующие элементы которых комплексно сопряжены. Но отсюда следует, что и элементарные делители этих двух матриц также комплексно-сопряжены, а, следовательно, их характеристики имеют одинаковый вид. Таким образом, характеристика нашей K-матрицы распадается на две повторяющие друг друга части — теорема справедлива.

Отметим, что главные направления и инвариантные пучки K-матрицы также должны быть попарно комплексно-сопряженными.

Теперь можно произвести классификацию полей тяготения, которую выражает

Теорема 3. *Существуют три и только три типа полей тяготения.*

Трёхмерная матрица $P(K)$ может иметь только один из трёх возможных типов характеристик: [1 1 1], [2 1], [3], если оставить в стороне случаи, когда некоторые из элементарных делителей имеют одинаковый базис и, следовательно, некоторые из цифр, стоящих в квадратных скобках, придётся заключить в круглые скобки (например, [(11) 1], [(21)] и т. д.).

Характеристика $\overline{P}(K)$ должна иметь такой же вид. Тогда характеристики K-матрицы будут записываться:

$$1.\ [1\overline{1},\ \ 1\overline{1},\ \ 1\overline{1}];\ 2.\ \ [2\overline{2},\ \ 1\overline{1}];\ \ 3.\ [3\overline{3}], \tag{16}$$

где подчёркнутые цифры обозначают показатель степени для элементарного делителя с базисом, комплексно-сопряженным базису элементарного делителя, степень которого выражается предыдущим числом.

Каждый из этих типов полей тяготения в дальнейшем необходимо исследовать отдельно, причем особенно важно получить для каждого из этих типов канонический вид матрицы $\|R_{\alpha\beta}\|$.

§ 3. КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД МАТРИЦЫ $\|R_{\alpha\beta}\|$.

Рассматриваем первый тип с характеристикой: $[1\overline{1},\ 1\overline{1},\ 1\overline{1}]$. Так как в этом случае характеристика — простого типа, то тензор $R_{\alpha\beta}$ имеет 6 не изотропных, взаимно-ортогональных главных направления [6]. Эти направления бивекторного пространства в данной точке T_4 дадут бивекторы специфического строения, как это можно показать.

Обозначим составляющие векторов вещественного ортогонального репера в точке T_4 через $\underset{k}{\xi^i}$ $(k,\ i=1,\dots,4)$, а простые бивекторы $\underset{[k}{\xi^i}\ \underset{l]}{\xi^j}$ $(k \neq l)$, определяющие двумерные площадки, задаваемые векторами репера, будем, для краткости, обозначать $\underset{kl}{\xi^{ij}}$. В бивекторном пространстве эти простые бивекторы определяют 6 независимых, неизотропных взаимно-ортогональных координатных векторов $\underset{\sigma}{\xi^\alpha}=\delta^\alpha_\sigma$, и любой вектор R_6, в частности и векторы главных направлений $R_{\alpha\beta}$, может быть разложен по этим векторам.

Покажем, что в качестве векторов главных направлений (они определяются однозначно только в случае, если корни векового уравнения (12) — различны) можно взять векторы вида

$$W^\alpha=\lambda\left(\underset{1}{\xi^\alpha}\pm i\underset{4}{\xi^\alpha}\right)+\mu\left(\underset{2}{\xi^\alpha}\pm i\underset{5}{\xi^\alpha}\right)+\nu\left(\underset{3}{\xi^\alpha}\pm i\underset{6}{\xi^\alpha}\right). \tag{17}$$

В самом деле, условие того, что W^α определяет главное направление тензора $R_{\alpha\beta}$, запишется:

$$(R_{\alpha\beta}-Kg_{\alpha\beta})\,W^\beta=0. \tag{18}$$

Но эта система 6 уравнений, в силу симметричной сдвоенности K-матрицы, сводится всего к трём уравнениям:

$$(m_{s1}\pm i\,n_{s1}+k)\,\lambda+(m_{s2}\pm in_{s2})\,\mu+(m_{s3}\pm in_{s3})\,\nu=0\ \ (s=1,\ 2,\ 3).$$

Для того, чтобы λ, μ, ν были ненулевыми решениями этой системы, необходимо и достаточно, чтобы K было корнем одного из уравнений

$$|P(K)|=0, \quad |\overline{P}(K)|=0, \tag{19}$$

т. е. корнем векового уравнения (12), что и доказывает теорему.

Вектору W^α (17) многообразия R_6 в данной точке T_4 будет соответствовать бивектор полного ранга

$$W^{ij}=\lambda\left(\underset{14}{\xi^{ij}}\pm i\underset{23}{\xi^{ij}}\right)+\mu\left(\underset{24}{\xi^{ij}}\pm i\underset{31}{\xi^{ij}}\right)+\nu\left(\underset{34}{\xi^{ij}}\pm i\underset{12}{\xi^{ij}}\right). \tag{20}$$

Нетрудно убедиться, что при любом ортогональном преобразовании (вещественном) W^{ij} переходит в бивектор того же типа, причем λ, μ, $\nu\to\overset{*}{\lambda}$, $\overset{*}{\mu}$, $\overset{*}{\nu}$ так, что норма бивектора остается инвариантной:

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2=\overset{*}{\lambda}{}^2+\overset{*}{\mu}{}^2+\overset{*}{\nu}{}^2.$$

Пусть корням (12) K $(s=1, 2, 3)$ соответствуют векторы главного направления $\underset{s}{W^\alpha}$; тогда корням $\underset{s+3}{K}$, согласно предыдущему, должны соответствовать $\underset{s}{\overline{W}^\alpha}$, при надлежащей нумерации корней. Корню $\underset{1}{K}$ соответствует бивектор:

$$\underset{1}{W^{pq}}=\underset{1}{\lambda}\left(\underset{14}{\xi^{pq}}+i\underset{23}{\xi^{pq}}\right)+\underset{1}{\mu}\left(\underset{24}{\xi^{pq}}+i\underset{31}{\xi^{pq}}\right)+\underset{1}{\nu}\left(\underset{34}{\xi^{pq}}+i\underset{12}{\xi^{pq}}\right),$$

а $\underset{4}{K}$ — бивектор

$$\underset{4}{W^{pq}}=\underset{1}{\overline{\lambda}}\left(\underset{14}{\xi^{pq}}-i\underset{23}{\xi^{pq}}\right)+\underset{1}{\overline{\mu}}\left(\underset{24}{\xi^{pq}}-i\underset{31}{\xi^{pq}}\right)+\underset{1}{\overline{\nu}}\left(\underset{34}{\xi^{pq}}-i\underset{12}{\xi^{pq}}\right).$$

Представим бивектор $\underset{1}{W^{pq}}$ в виде суммы двух вещественных бивекторов $\underset{1}{V^{pq}}+i\underset{1}{\overset{*}{V}{}^{pq}}$; тогда

$$\underset{4}{W^{pq}}=\underset{1}{V^{pq}}-i\underset{1}{\overset{*}{V}{}^{pq}}.$$

Пусть

$$\lambda=\underset{1}{a}+i\underset{1}{b}, \quad \mu=\underset{2}{a}+i\underset{2}{b}, \quad \nu=\underset{3}{a}+i\underset{3}{b},$$

где $\underset{s}{a}$, $\underset{s}{b}$ — вещественные числа $(s=1, 2, 3)$, и, следовательно,

$$\underset{1}{V^{pq}}=\underset{1}{a}\underset{14}{\xi^{pq}}+\underset{2}{a}\underset{24}{\xi^{pq}}+\underset{3}{a}\underset{34}{\xi^{pq}}-\underset{1}{b}\underset{23}{\xi^{pq}}-\underset{2}{b}\underset{31}{\xi^{pq}}-\underset{3}{b}\underset{12}{\xi^{pq}};$$

$$\underset{2}{\overset{*}{V}{}^{pq}}=\underset{1}{b}\underset{14}{\xi^{pq}}+\underset{2}{b}\underset{24}{\xi^{pq}}+\underset{3}{b}\underset{34}{\xi^{pq}}+\underset{1}{a}\underset{23}{\xi^{pq}}+\underset{2}{a}\underset{31}{\xi^{pq}}+\underset{3}{b}\underset{12}{\xi^{pq}}.$$

Так как $\underset{1}{W^\alpha}$ — неизотропный вектор R_6, то всегда можно считать, что это единичный вектор

$$g_{\alpha\beta}\underset{1}{W^\alpha}\underset{1}{W^\beta}=1,$$

откуда приходим к выводу:

$$\sum_{s=1}^{3}\underset{s}{a}\underset{s}{b}=0, \tag{21}$$

$$\sum_{s=1}^{3} \underset{s}{b}^2 - \underset{s}{a}^2 > 0. \tag{22}$$

Теперь можно утверждать, что: 1) вещественные бивекторы $\underset{1}{V}^{pq}$ и $\underset{1}{\overset{*}{V}}{}^{pq}$ — *однолистны.*

В самом деле, записывая условие простоты, мы придём к (21); 2) они — 0-*параллельны.*

Они не могут быть $\frac{2}{2}$-параллельными, так как это может быть только при условии, что коэффициенты при одинаковых $\underset{ij}{\xi}^{pq}$ пропорциональны; тогда бы они были нулями. Например:

$$\frac{\underset{1}{a}}{\underset{1}{b}} = -\frac{\underset{1}{b}}{\underset{1}{a}}, \quad \underset{1}{a}^2 + \underset{1}{b}^2 = 0;$$

они не могут быть и $\frac{1}{2}$-параллельными, так как тогда $\underset{1}{W}^{\alpha}$ был бы — однолистный комплексный бивектор, но, записывая условие простоты, мы пришли бы к противоречию с (21) и (22). Таким образом, остается только указанная выше возможность;

3) эти бивекторы $\frac{2}{2}$-*перпендикулярны.* Для этого необходимо и достаточно, чтобы при любых i, j выполнялись равенства:

$$\underset{1}{V}_{is} \overset{*}{V}{}^{sj} = 0.$$

Легко видеть, что они сводятся к (21) и, следовательно, имеют место.

Рассмотрим простой бивектор $\underset{1}{V}^{pq}$. Его норма, в силу (22),

$$g_{\alpha\beta} \underset{1}{V}^{\alpha} \underset{1}{V}^{\beta} = \sum_s \underset{s}{b}^2 - \underset{s}{a}^2 > 0.$$

В плоскости этого вещественного бивектора всегда можно выбрать два вещественных, ортогональных и неизотропных вектора η^p, ν^p. Тогда норма нашего бивектора может быть также выражена в виде

$$2\eta_p\eta^p \cdot \nu_q\nu^q,$$

и, следовательно, эти два вектора либо оба — *пространственные,* либо оба — *временные.* Их нормы не могут быть >0, так как, принимая эти два ортогональные вещественные векторы за координатные, мы пришли бы к противоречию с законом инерции квадратичной формы. Следовательно, эти два вектора имеют отрицательные нормы. Ввиду этого, перенормируя, их можно принять за векторы $\underset{2}{\overset{*}{\xi}}{}^i$, $\underset{3}{\overset{*}{\xi}}{}^i$ нового вещественного ортогонального репера.

Точно так же в плоскости $\underset{1}{\overset{*}{V}}{}^{pq}$ определим два ортогональных вектора (между собою и с $\underset{2}{\overset{*}{\xi}}{}^i$, $\underset{3}{\overset{*}{\xi}}{}^i$), вещественных, неизотропных, но уже с нормами противоположных знаков, так как

$$g_{\alpha\beta} \underset{1}{\overset{*}{\nu}}{}^{\alpha} \underset{1}{\overset{*}{\nu}}{}^{\beta} < 0;$$

эти векторы назовём $\overset{*}{\xi}{}^{i}_{1}$, $\overset{*}{\xi}{}^{i}_{4}$. В этой системе координат

$$\overset{*}{W}{}^{pq}_{1}=\xi^{pq}_{14}+i\,\xi^{pq}_{23},$$

$$\overset{*}{W}{}^{pq}_{4}=\xi^{pq}_{14}-i\,\xi^{pq}_{23}.$$

Отметим, что репер $\{\overset{*}{\xi}\}$ выбран с точностью до вращения в плоскости $\{\overset{*}{\xi}_{2}\overset{*}{\xi}_{3}\}$ и лоренцова вращения в плоскости $\{\overset{*}{\xi}_{1}\overset{*}{\xi}_{4}\}$. Бивекторы W^{pq}_{σ} нас интересуют, конечно, только с точностью до скалярного множителя.

Теперь, записывая условие ортогональности $\overset{*}{W}{}^{pq}_{1}$ и $\overset{*}{W}{}^{pq}_{2}$, получим, очевидно, что бивектор 2-го главного направления должен иметь вид:

$$\overset{*}{W}{}^{pq}_{2}=\overset{*}{\mu}_{2}\left(\overset{*}{\xi}{}^{pq}_{24}+i\,\overset{*}{\xi}{}^{pq}_{31}\right)+\overset{*}{\nu}_{2}\left(\overset{*}{\xi}{}^{pq}_{34}+i\,\overset{*}{\xi}{}^{pq}_{12}\right).$$

Воспользуемся указанным выше произволом в выборе репера и произведем вращения:

$$\left.\begin{aligned}\xi^{p}_{1}&=\operatorname{ch}\varphi\,\overset{*}{\xi}{}^{p}_{1}+\operatorname{sh}\varphi\,\overset{*}{\xi}{}^{p}_{4},\\ \xi^{p}_{4}&=\operatorname{sh}\varphi\,\overset{*}{\xi}{}^{p}_{1}+\operatorname{ch}\varphi\,\overset{*}{\xi}{}^{p}_{4};\end{aligned}\right\}$$

$$\xi^{p}_{2}=\cos\psi\,\overset{*}{\xi}{}^{p}_{2}+\sin\psi\,\overset{*}{\xi}{}^{p}_{3},$$

$$\xi^{p}_{3}=-\sin\psi\,\overset{*}{\xi}{}^{p}_{2}+\cos\psi\,\overset{*}{\xi}{}^{p}_{3}.$$

После этих преобразований W_{1} будет иметь прежний вид, а следовательно, W_{2} также выразится

$$\tilde{W}{}^{pq}_{2}=\tilde{\mu}_{2}\left(\tilde{\xi}{}^{pq}_{24}+i\,\tilde{\xi}{}^{pq}_{31}\right)+\tilde{\nu}_{2}\left(\tilde{\xi}{}^{pq}_{34}+i\,\tilde{\xi}{}^{pq}_{12}\right),$$

где

$$\tilde{\nu}_{2}=\sin\psi\operatorname{ch}\varphi+p\cos\psi\operatorname{ch}\varphi+q\sin\psi\operatorname{sh}\varphi+i(\cos\psi\operatorname{sh}\varphi+$$
$$q\cos\psi\operatorname{ch}\varphi-p\sin\psi\operatorname{sh}\varphi),$$

$$p+iq=\frac{\overset{*}{\nu}_{2}}{\overset{*}{\mu}_{2}},$$

и $\overset{*}{\mu}_{2}$ можно считать отличным от нуля, так как, в противном случае, мы удовлетворились бы значениями $\varphi=\psi=0$. Можно найти вещественные φ и ψ для каждых $\tilde{\nu}_{2}=0$. Теперь репер определен однозначно, и в этом репере, если учесть ортогональность W_{1}, W_{2}, W_{3}, эти бивекторы будут иметь вид (с точностью до скалярного множителя):

$$W^{pq}_{1} = \xi^{pq}_{14} + i\,\xi^{pq}_{23},$$
$$W^{pq}_{2} = \xi^{pq}_{24} + i\,\xi^{pq}_{31},$$
$$W^{pq}_{3} = \xi^{pq}_{34} + i\,\xi^{pq}_{12}$$

и, в силу указанной выше комплексной сопряженности,

$$W^{pq}_{4} = \overline{W}^{pq}_{1},\quad W^{pq}_{5} = \overline{W}^{pq}_{2},\quad W^{pq}_{6} = \overline{W}^{pq}_{3}.$$

Теперь, записывая условие (18) для каждого из этих бивекторов и учитывая, что

$$\xi^{\sigma}_{\alpha} = \delta^{\sigma}_{\alpha},$$

легко найдём

$$m_{ii} = -\alpha_i,\quad m_{ij} = 0,\quad n_{ii} = -\beta_i,\quad n_{ij} = 0\quad (i = 1,\ 2,\ 3;\ i \neq j)$$

и, следовательно, *для первого типа T_4 получаем следующий канонический вид матрицы*:

$$(R_{\alpha\beta}) = \left\|\begin{array}{ccc|ccc} -\alpha_1 & & & -\beta_1 & & \\ & -\alpha_2 & & & -\beta_2 & \\ & & -\alpha_3 & & & -\beta_3 \\ \hline -\beta_1 & & & \alpha_1 & & \\ & -\beta_2 & & & \alpha & \\ & & -\beta_3 & & & \alpha_3 \end{array}\right\|, \tag{23}$$

причем вещественные части стационарных кривизн связаны соотношениями

$$\sum_1^3 \alpha_s = \varkappa, \tag{24}$$

а мнимые части, в силу тождеств Риччи

$$R_{1423} + R_{1234} + R_{1342} = 0,$$

подчиняются условию:

$$\sum_1^3 \beta_s = 0. \tag{25}$$

Переходим к рассмотрению T_4 с характеристикой второго типа: $[21,\ \overline{21}]$. Как было показано выше (§ 2), за главные направления и инвариантные пучки K-матрицы можно взять главные направления и инвариантные пучки матриц $P(K)$ и $\overline{P}(K)$. Отсюда следует, что достаточно изучить, например, матрицу $P(K)$, имеющую характеристику [21].

При такой характеристике тензор $P_{\alpha\beta} = -m_{\alpha\beta} + in_{\alpha\beta}$ трёхмерного пространства имеет [6] одно главное неизотропное направление

$$(P_{\alpha\beta} - \underset{1}{K} g_{\alpha\beta}) \underset{1}{W}^{\beta} = 0, \tag{26}$$

одно, ортогональное к $\underset{1}{W}$, изотропное главное направление $\underset{2}{W}$

$$(P_{\alpha\beta} - \underset{2}{K} g_{\alpha\beta}) \underset{2}{W}^{\beta} = 0. \tag{27}$$

Кроме того, существует изотропный вектор $\underset{3}{W}^{\beta}$, ортогональный к $\underset{1}{W}^{\beta}$ и неортогональный к $\underset{2}{W}^{\beta}$, который вместе с этими последними образует инвариантную площадку $\left\{\underset{2}{W}, \underset{3}{W}\right\}$ тензора $P_{\alpha\beta}$, что выражается соотношением:

$$(P_{\alpha\beta} - \underset{2}{K} g_{\alpha\beta}) \underset{3}{W}^{\beta} = \sigma \underset{2}{W}_{\alpha}, \tag{28}$$

где σ — произвольный скаляр, не равный нулю; его выбор зависит от нас. Произвол этот является результатом того, что $\underset{2}{\overline{W}}, \underset{3}{\overline{W}}$ будучи изотропными, могут быть умножены на любое число без изменения нормы.

Всякое главное направление или пучок $P_{\alpha\beta}$ будут определять соответствующие главные направления и пучки тензора $R_{\alpha\beta}$; все они будут определяться бивекторами типа (17).

Пусть корню $\underset{1}{K}$ соответствует простой элементарный делитель $(K - \underset{1}{K})$ полей K-матрицы и главное направление, определяемое бивектором $\underset{1}{W}^{\alpha}$. Так как этот бивектор — неизотропный, то к нему применимы все рассуждения, проведенные для $\underset{1}{W}^{\alpha}$, рассматривавшегося в предыдущем случае. Следовательно, можно выбрать такой вещественный репер, относительно которого

$$\underset{1}{W}^{pq} = \underset{14}{\xi}^{pq} + i \underset{23}{\xi}^{pq}.$$

Этот репер определяется с точностью до вращения в площадке $\left\{\underset{2}{\bar\xi}\, \underset{3}{\bar\xi}\right\}$ и лоренцова вращения в площадке $\left\{\underset{1}{\bar\xi}\, \underset{4}{\bar\xi}\right\}$. Так как бивекторы $\underset{2}{W}^{pq}$ и $\underset{3}{W}^{pq}$ должны быть ортогональны к $\underset{1}{W}^{pq}$, то они имеют вид:

$$\underset{2}{W}^{pq} = \underset{2}{\mu}\left(\underset{24}{\xi}^{pq} + i \underset{31}{\xi}^{pq}\right) + \underset{2}{\nu}\left(\underset{34}{\xi}^{pq} + i \underset{12}{\xi}^{pq}\right),$$

$$\underset{3}{W}^{pq} = \underset{3}{\mu}\left(\underset{24}{\xi}^{pq} + i \underset{31}{\xi}^{pq}\right) + \underset{3}{\nu}\left(\underset{34}{\xi}^{pq} + i \underset{12}{\xi}^{pq}\right).$$

Условие изотропности этих бивекторов приводит к соотношениям:

$$\underset{2}{\mu}^2 + \underset{2}{\nu}^2 = 0, \quad \underset{3}{\mu}^2 + \underset{3}{\nu}^2 = 0,$$

то есть

$$\underset{2}{\nu} = e_1 i \underset{2}{\mu}, \quad \underset{3}{\nu} = e_2 i \underset{3}{\mu},$$

где e_1 и e_2 равны ± 1. Наконец, записывая тот факт, что они не могут быть ортогональны, получим, что $e_1 = -e_2$. Следовательно можно, например, положить

$$\underset{2}{W}^{pq} = \underset{24}{\xi}^{pq} + i \underset{31}{\xi}^{pq} + i\left(\underset{34}{\xi}^{pq} + i \underset{12}{\xi}^{pq}\right),$$

$$\underset{3}{W}^{pq} = \lambda \left\{\underset{24}{\xi}^{pq} + i \underset{31}{\xi}^{pq} - i\left(\underset{34}{\xi}^{pq} + i \underset{12}{\xi}^{pq}\right)\right\},$$

где λ — произвольный скалярный множитель $\neq 0$.

Теперь остается записать условия, аналогичные условиям (26), (27), (28) для тензора $R_{\alpha\beta}$, учитывая опять, так же как и для предыдущего случая, что $\underset{\nu}{\xi}^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{\nu}$. Эти условия будут иметь вид:

$$(R_{\alpha\beta} - \underset{1}{K} g_{\alpha\beta}) \underset{1}{W}^{\beta} = 0,$$

$$(R_{\alpha\beta} - \underset{2}{K} g_{\alpha\beta}) \underset{2}{W}^{\beta} = 0,$$

$$(R_{\alpha\beta} - \underset{2}{K} g_{\alpha\beta}) \underset{3}{W}^{\beta} = \sigma g_{\alpha\beta} \underset{2}{W}^{\beta}.$$

Тензор $g_{\alpha\beta}$ определится матрицей (6). Полагая здесь $\alpha = 1, 2, \ldots, 6$, легко найдем, что *матрица* $(R_{\alpha\beta})$ *(11) будет иметь вид:*

$$(R_{\alpha\beta}) = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} -\underset{1}{\alpha} & 0 & 0 & -\underset{1}{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & -\underset{2}{\alpha}+\sigma & 0 & 0 & -\underset{2}{\beta} & \sigma \\ 0 & 0 & -\underset{2}{\alpha}-\sigma & 0 & \sigma & -\underset{2}{\beta} \\ \hline -\underset{1}{\beta} & 0 & 0 & \underset{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & -\underset{2}{\beta} & \sigma & 0 & \underset{2}{\alpha}-\sigma & 0 \\ 0 & \sigma & -\underset{2}{\beta} & 0 & 0 & \underset{2}{\alpha}+\sigma \end{array} \right\|, \quad \sigma \neq 0. \tag{29}$$

Здесь σ *можно выбрать по своему усмотрению, но* $\neq 0$; $\underset{s}{\alpha}$ *и* $\underset{s}{\beta}$, *как и в первом случае, связаны соотношениями:*

$$\underset{1}{\alpha} + 2\underset{2}{\alpha} = \varkappa, \quad \underset{1}{\beta} + 2\underset{2}{\beta} = 0. \tag{30}$$

Репер определяется с точностью до вращения в площадке $\left\{\underset{2}{\xi}, \underset{3}{\overline{\xi}}\right\}$ *и лоренцова вращения в площадке* $\left\{\underset{1}{\overline{\xi}}\underset{4}{\overline{\xi}}\right\}$.

Остается рассмотреть третий тип с характеристикой $[3, \overline{3}]$. Для такой характеристики [6] у тензора $P_{\alpha\beta}$ найдется одно главное изотропное направление $\underset{1}{W}^{\beta}$ и, кроме того, еще два вектора $\underset{2}{W}^{\beta}$ и $\underset{3}{W}^{\beta}$, обладающие свойствами:[1]

$$\begin{aligned} (P_{\alpha\beta} - \underset{1}{K}\delta_{\alpha\beta}) \underset{1}{W}^{\beta} &= 0, \\ (P_{\alpha\beta} - \underset{1}{K}\delta_{\alpha\beta}) \underset{2}{W}^{\beta} &= \sigma\delta_{\alpha\beta} \underset{1}{W}^{\beta}, \\ (P_{\alpha\beta} - \underset{1}{K}\delta_{\alpha\beta}) \underset{3}{W}^{\beta} &= \tau\delta_{\alpha\beta} \underset{2}{W}^{\beta}, \end{aligned} \tag{31}$$

где σ и τ — произвольные числа $\neq 0$. Вектор $\underset{2}{W}^{\alpha}$ — неизотропный, а $\underset{3}{W}^{\alpha}$ — изотропный. Кроме того, $\underset{1}{W}^{\alpha}$ ортогонален $\underset{2}{W}^{\alpha}$ и неортогонален $\underset{3}{W}^{\alpha}$, а вектор $\underset{2}{W}^{\alpha}$ — ортогонален $\underset{3}{W}^{\alpha}$.

Так как $\underset{2}{W}^{pq}$ — неизотропный вектор, то, как и в двух предшествовавших случаях, выбирая соответствующим образом репер (с двумя степенями свободы), можно этот бивектор записать в виде:

$$\underset{2}{W}^{pq} = \underset{24}{\xi}^{pq} + i\underset{31}{\xi}^{pq}.$$

Тогда для бивекторов $\underset{1}{W}$ и $\underset{3}{W}$, если учесть указанные выше условия ортогональности и изотропности, получим выражения:

$$\underset{1}{W}^{pq} = \underset{14}{\xi}^{pq} + i\underset{23}{\xi}^{pq} + i(\underset{34}{\xi}^{pq} + i\underset{12}{\xi}^{pq}),$$

$$\underset{3}{W}^{pq} = \lambda\left\{\underset{14}{\xi}^{pq} + i\underset{23}{\xi}^{pq} - i(\underset{34}{\xi}^{pq} + i\underset{12}{\xi}^{pq})\right\},$$

где λ — любое число $\neq 0$. Далее исследование ведется по той же схеме, что и для предшествующего типа характеристики: записываем условия (30) для $R_{\alpha\beta}$, фиксирующие тот факт, что $\underset{1}{W}^{\alpha}$ — вектор главного направления (в бивекторном пространстве), а векторы $\underset{1}{W}^{\alpha}$, $\underset{2}{W}^{\alpha}$, $\underset{3}{W}^{\alpha}$ определяют инвариантный пучок тензора $R_{\alpha\beta}$. Эти условия суть:

$$\begin{aligned}
&(R_{\alpha\beta} - Kg_{\alpha\beta})\underset{1}{W}^{\beta} = 0,\\
&(R_{\alpha\beta} - Kg_{\alpha\beta})\underset{2}{W}^{\beta} = \sigma g_{\alpha\beta}\underset{1}{W}^{\beta},\\
&(R_{\alpha\beta} - Kg_{\alpha\beta})\underset{3}{W}^{\beta} = \tau g_{\alpha\beta}\underset{2}{W}^{\beta},
\end{aligned}\tag{32}$$

где σ и τ — числа, отличные от нуля.

Учитывая, что бивектору $\underset{\sigma}{W}^{pq}$ в данной точке T_4 соответствует в локальном метрическом бивекторном пространстве вектор $\underset{nt}{W}^{pq} \to \underset{\sigma}{W}^{\alpha}$ и имея в виду, что для координатного репера

$$\underset{nt}{\xi}^{pq} \to \underset{\sigma}{\xi}^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{\sigma},$$

легко убедиться, что система уравнений (32) сводится к следующим 9-ти независимым уравнениям:

$$\begin{aligned}
&m_{11} + in_{11} + im_{13} - n_{13} = -K,\\
&m_{12} + in_{12} + im_{23} - n_{23} = 0,\\
&m_{13} + in_{13} + im_{33} - n_{33} = -iK,\\
&m_{12} + in_{12} = -\sigma,\\
&m_{22} + in_{22} = -K,\\
&m_{23} + in_{23} = -\sigma_i,\\
&m_{11} + in_{11} - im_{13} + n_{13} = -K,\\
&m_{12} + in_{12} - im_{23} + n_{23} = -\tau,\\
&m_{13} + in_{13} - im_{33} + n_{33} = iK,
\end{aligned}$$

где $K = \alpha + i\beta$ — один из двух корней третьей кратности векового уравнения

$$|R_{\alpha\beta} - Kg_{\alpha\beta}| = 0,$$

а числа σ, τ — отличны от нуля, а в остальном произвольны. Этот произвол возникает, в силу произвольности числа λ, и является следствием изотропности векторов $\underset{1}{W}^{\alpha}$, $\underset{3}{W}^{\alpha}$. Можно, например, предполагать, что σ и τ — вещественные числа.

Решая эту систему, а также имея в виду условия

$$\sum_{s=1}^{3} e_s m_{ss} = \varkappa, \quad \sum_{s=1}^{3} e_s n_{ss} = 0,$$

нетрудно убедиться, что $\tau = 2\sigma$, $\beta = 0$, $\alpha = \frac{\varkappa}{3}$, *а матрица* $\|R_{\alpha\beta}\|$ *будет иметь вид:*

$$
(R_{\alpha\beta}) = \left\| \begin{array}{ccc|ccc}
-\frac{\varkappa}{3} & -\sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\sigma & -\frac{\varkappa}{3} & 0 & 0 & 0 & -\sigma \\
0 & 0 & -\frac{\varkappa}{3} & 0 & -\sigma & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \frac{\varkappa}{3} & \sigma & 0 \\
0 & 0 & -\sigma & \sigma & \frac{\varkappa}{3} & 0 \\
0 & -\sigma & 0 & 0 & 0 & \frac{\varkappa}{3}
\end{array} \right\|, \tag{33}
$$

где σ — *любое вещественное число, отличное от нуля; репер определяется с точностью до вращения в двумерной площадке* $\{\underset{1}{\xi}\ \underset{3}{\xi}\}$ *и лоренцова вращения в площадке* $\{\underset{2}{\xi}\ \underset{4}{\xi}\}$.

Таким образом, как итог, получается следующая

Теорема. *Существуют три принципиально различных типа полей тяготения:*

1-й тип с характеристикой К-матрицы простого типа $[111, \bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1}]$; *для него в каждой точке* T_4 *однозначно определяется вещественный ортогональный репер, относительно которого матрица* $\|R_{\alpha\beta}\|$ *имеет вид* (23) *при условиях* (24), (25).

2-й тип с характеристикой непростого типа $[21, \bar{2}\,\bar{1}]$; *для него репер определяется с двумя степенями свободы, а матрица* $\|R_{\alpha\beta}\|$ *имеет вид* (29) *при условиях* (30).

3-й тип также имеет характеристику непростого типа [3,3]; *репер также имеет две степени свободы, а матрица* $\|R_{\alpha\beta}\|$ — *вид (33).*

Здесь надчеркнутые в характеристиках числа означают показатели степеней тех элементарных делителей, которые имеют базисы, комплексно-сопряженные, соответствующие ненадчеркнутым числам.

Три указанные типа допускают, очевидно, дальнейшую, более детальную, классификацию. Например, можно выделить случаи кратных или вещественных корней, как это и делалось нами ранее. Этот результат, полученный мною в 1950 г., был впервые опубликован в 1951 г. [1]. В этой статье имеется неточность в формулировке. Доказательство 3-й теоремы § 2 было дано также А. П. Норденом в 1952 г. (в печати не опубликовано), который исходил из исследуемых им биаффинных пространств. Приводимое здесь доказательство представляет собою третий вариант и является, повидимому, наиболее простым.

Относительно исследования, проведенного в § 3, т. е. определения канонического вида матрицы $(R_{\alpha\beta})$ для ортогонального неголономного репера, необходимо сделать следующее примечание. На первый взгляд задачу можно было бы решать так: поскольку известна характеристика матрицы $\|R_{\alpha\beta} - Kg_{\alpha\beta}\|$, казалось бы возможным сразу выписать канонический вид этой матрицы на основании общей алгебраической теории [6]. Однако этого сделать нельзя, так как в качестве коэффициентов допустимых линейных вещественных преобразований мы можем брать лишь числа вида

$$A_{\alpha}^{\alpha'} = 2A_{ij}^{[i'j']},$$

где $A_i^{i'} = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)_P$ — коэффициенты некоторого вещественного ортогонального преобразования в данной точке P многообразия T_4. То есть мы можем пользоваться только преобразованиями некоторой подгруппы всей группы ортогональных вещественных преобразований 6-мерного пространства.

Этот факт, делающий необходимыми рассуждения § 3, является в данном случае очевидным и представляет из себя конкретное приложение общей теоремы, доказанной Г. Б. Гуревичем [7].

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. З. Петров. О пространствах, определяющих поля тяготения. ДАН СССР, т. XXXI, 149—152 (1951).

[2] Л. Ландау и Е. Лифшиц. Теория поля. М.— Л. 1941 г., стр. 263—268.

[3] В. Ф. Каган. О некоторых системах чисел .... Изд. 1 МГУ (1926—27), стр. 1—24.

[4] Я. С. Дубнов. О симметрично-сдвоенных ортогональных матрицах. Там же, стр. 33—54.

[5] А. М. Лопшиц. Векторное решение задачи о симметрично-сдвоенных матрицах. Труды Всероссийского съезда математиков в Москве в 1927 г. М.—Л. (1928), 186—187.

[6] А. З. Петров. К теореме о главных осях тензора. Известия Казанск. физико-математ. общества, т. 14, стр. 43 (1949).

[7] Г. Б. Гуревич. О некоторых линейных преобразованиях симметрических тензоров или поливекторов. Мат. сб., т. 26, 463—469 (1950).