ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 9 (436)

УДК 517.968

В.Ф. ВОЛКОДАВОВ, И.Н. РОДИОНОВА

ФОРМУЛЫ ОБРАЩЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА

Решения ряда краевых задач для некоторых гиперболических уравнений третьего порядка в трехмерном евклидовом пространстве сводятся к решению двумерных интегральных уравнений Вольтерра I-го рода, которые однозначно разрешимы. Так, например, уравнение

$$L(u) = (z+y-x)U_{xyz} - \beta U_{xy} + \alpha U_{yz} = 0, \quad 0 < \alpha, \beta < 1, \tag{1}$$

рассмотрим в области Ω, представляющей собой пирамиду, ограниченную плоскостями $x = h$, $y = 0$, $z = 0$, $z = x - y$. Для уравнения (1) в области Ω поставим следующие краевые задачи.

Найти в Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям:

задача I.

$$U(x,y,0) = \psi(x,y), \tag{2}$$

$$U(x,y,x-y) = \tau(x,y), \quad 0 \le y \le x, \ \ 0 \le x \le h, \tag{3}$$

$$\lim_{z\to(x-y)-0} \frac{\partial U}{\partial z} = \nu(x,y); \tag{4}$$

задача II.

$$U(h,y,z) = \Phi(y,z), \quad 0 \le y \le h-z, \ \ 0 \le z \le h, \tag{5}$$

а также (3) и (4);

задача III.

$$U(x,0,z) = \chi(x,z), \quad 0 \le x \le z, \ \ 0 \le z \le h$$

и условиям (3), (5).

Решение задач I–III сводится соответственно к решению следующих интегральных уравнений:

$$\int_0^{x-y}\int_y^{x-z} N_1(s,\xi)(x-\xi-s)^\alpha(\xi-y)^\beta d\xi\, ds = f_1(x,y), \tag{6}$$

$$\int_z^{h-y}\int_0^{y} N_2(s,\xi)(h-\xi-s)^\alpha(y-\xi)^\beta d\xi\, ds = f_2(y,z), \tag{7}$$

$$\int_z^{h-y}\int_y^{h-s} N_3(s,\xi)(h-\xi-s)^\alpha(\xi-y)^\beta d\xi\, ds = f_3(y,z). \tag{8}$$

Обозначим

$$H_1 = \left\{(x,y)\,\middle|\, \begin{array}{l} 0<y<x \\ 0<x<h \end{array}\right\}, \qquad H_2 = \left\{(y,z)\,\middle|\, \begin{array}{l} 0<y<h-z \\ 0<z<h \end{array}\right\}.$$

Будем предполагать, что правые части уравнений (6)–(8) удовлетворяют следующим условиям.

Условия A. $f_1(x,y) = (x-y)^{3+\beta+\varepsilon}\varphi(x,y)$, $\varphi^{(\mathrm{IV})}_{xxyy} \in C(\overline{H}_1)$.

Условия B. $f_2(y,h-y) = f_2(0,z) = 0$, $\frac{\partial^3 f_2(y,z)}{\partial y^2\partial z} \in C(\overline{H}_2)$.

Условия C. $f_3(h-z,z) = 0$, $\frac{\partial^3 f_3(y,z)}{\partial y^2\partial z} \in C(\overline{H}_2)$.

Предположим, что решение уравнения (6) существует. Поменяем в левой части порядок интегрирования

$$\int_y^x (\xi - y)^\beta d\xi \int_0^{x-\xi} N_1(s,\xi)(x-\xi-s)^\alpha ds = f_1(x,y).$$

Обозначим

$$M(x,\xi) = \int_0^{x-\xi} N_1(s,\xi)(x-\xi-s)^\alpha ds. \tag{9}$$

Обе части тождества

$$\int_y^x M(x,\xi)(\xi-y)^\beta d\xi = f_1(x,y) \tag{10}$$

продифференцируем по y, заменим переменную y на t и применим к обеим частям полученного равенства оператор

$$\int_y^x \cdots (t-y)^{-\beta} dt.$$

В левой части поменяем порядок интегрирования, вычислим внутренний интеграл ([1], гл. 1, § 5, с. 23), а в правой проинтегрируем по частям. В результате получим с учетом условий А

$$M(x,y) = \frac{1}{B(1+\beta, 1-\beta)} \int_y^x \frac{\partial^2 f_1(x,t)}{\partial t^2}(t-y)^{-\beta} dt. \tag{11}$$

Для нахождения $N_1(s,\xi)$ из (9) продифференцируем по x обе части тождества (9), заменим ξ на y, x на t и применим к обеим частям полученного равенства оператор

$$\int_y^{x+y} \cdots (x+y-t)^{-\alpha} dt.$$

Поменяв в левой части порядок интегрирования и вычислив внутренний интеграл, получим

$$N_1(x,y) = \frac{1}{B(1-\alpha, 1+\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} \int_y^{x+y} M_t(t,y)(x+y-t)^{-\alpha} dt. \tag{12}$$

Из формулы (11) найдем $M_{xx}(x,y)$, предварительно проинтегрировав по частям два раза в правой части с учетом условий А

$$M_{xx} = \frac{1}{B(1+\beta, 1-\beta)} \int_y^x \frac{\partial^4 f_1(x,z)}{\partial x^2 \partial z^2}(z-y)^{-\beta} dz. \tag{13}$$

После интегрирования по частям в правой части выражения (12) продифференцируем по x и подставим вместо $M_{tt}(t,y)$ ее выражение из формулы (13)

$$N_1(x,y) = \frac{1}{B(1-\beta, 1+\beta)B(1-\alpha, 1+\alpha)} \int_y^{x+y} (x+y-t)^{-\alpha} dt \int_y^t \frac{\partial^4 f_1(t,z)}{\partial t^2 \partial z^2}(z-y)^{-\beta} dz. \tag{14}$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что при выполнении условий А функция (14) удовлетворяет уравнению (6).

В предположении, что решение уравнения (7) существует, продифференцируем обе части тождества (7) сначала по z, затем по y, получим

$$\beta \int_0^y N_2(z,\xi)(h-\xi-z)^\alpha (y-\xi)^{\beta-1} d\xi = -\frac{\partial^2 f_2(y,z)}{\partial z \partial y}. \tag{15}$$

Заменим в выражении (15) y на t и применим к обеим частям оператор

$$\int_0^y \cdots (y-t)^{-\beta} dt.$$

В левой части полученного равенства поменяем порядок интегрирования и вычислим внутренний интеграл, справа проинтегрируем по частям с учетом условий B. Получим

$$N_2(z,y) = -\frac{(h-z-y)^{-\alpha}}{B(1+\beta,1-\beta)}\left[\frac{\partial^2 f_2(0,z)}{\partial z \partial y} y^{-\beta} + \int_0^y \frac{\partial^3 f_2(t,z)}{\partial z \partial t^2}(y-t)^{-\beta} dt\right]. \qquad (16)$$

Непосредственная подстановка показывает, что при выполнении условий B функция (16) удовлетворяет уравнению (7).

Полагая, что решение уравнения (8) существует, продифференцируем данное тождество сначала по z, затем по y. Получим

$$\beta \int_y^{h-z} N_3(z,\xi)(h-\xi-z)^\alpha (\xi-y)^{\beta-1} = \frac{\partial^2 f_3(y,z)}{\partial z \partial y}. \qquad (17)$$

К обеим частям тождества (17) после замены y на t применим оператор

$$\int_y^{h-z} \cdots (t-y)^{-\beta} dt.$$

Рассуждениями, подобными тем, что проводились при решении уравнения (7), получаем, что функция

$$N_3(z,y) = \frac{(h-z-y)^{-\alpha}}{B(1-\beta,1+\beta)}\left\{\frac{\partial^2 f_3(h-z,z)}{\partial t \partial z}(h-z-y)^{-\beta} - \int_y^{h-z} \frac{\partial^3 f_3(t,z)}{\partial t^2 \partial z}(t-y)^{-\beta} dt\right\} \qquad (18)$$

является решением уравнения (8) при выполнении условий C.

Из проведенных выше рассуждений следует, что уравнения (6), (7), (8) при выполнении условий A, B, C имеют единственное решение, которое представлено соответственно функциями (14), (16), (18).

Литература

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* – Т. 1. – 2-е изд. – М.: Наука, 1973. – 294 с.

Самарский государственный университет

Поступила
18.03.1996