ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 11 (450)

УДК 514.763

С.И. ОКРУТ

ГОЛОМОРФНЫЕ КОНФОРМНЫЕ СУБМЕРСИИ

Введение

Объектом изучения в этой работе являются кэлеровы многообразия, допускающие голоморфную конформную субмерсию ν с вертикальным показателем конформности (определение 1.1) и вполне геодезическими слоями. Метрику таких многообразий можно рассматривать как кэлеров аналог скрещенного произведения римановых многообразий. В примерах 1.1 и 1.2 приведено семейство неприводимых кэлеровых многообразий, допускающих описанную выше субмерсию.

Основной целью данной статьи является описание локального строения метрики кэлерова многообразия, допускающего голоморфную конформную субмерсию ν указанного выше типа. Для субмерсии с одномерными слоями такое описание получено в теореме 2.2. Можно показать, что метрики кэлеровых y-продолжений, полученные в заключении теоремы 2.2, локально представляют из себя метрики Калаби ([1], формула (3.2)).

Произвольно выбираемые многообразия, функции и тензорные поля предполагаются гладкими (класса C^∞). Основные понятия и обозначения соответствуют принятым (напр., из [2]–[4]).

1. Определения и локальные примеры

Для всякой субмерсии ν риманова многообразия E на риманово многообразие M в каждой точке $\Xi \in E$ имеется прямое ортогональное разложение касательного пространства $T_\Xi E = V_\Xi + H_\Xi$ на вертикальное и горизонтальное подпространства. Соответствующие им символы V и H будут одновременно служить для обозначения операторов ортогонального проектирования на одноименно обозначенные распределения. Операторы V и H стандартным образом ([2], гл. 1, предложение 2.12) продолжаются на всю алгебру тензоров в каждой точке многообразия E. Тензор K, в том числе вектор или форма, будет называться вертикальным (горизонтальным), если его горизонтальная (вертикальная) компонента равна нулю $HK = 0$ ($VK = 0$, соответственно).

Определение 1.1. Пусть имеется субмерсия ν из L на M и пусть g и g_M — римановы метрические тензоры в L и M соответственно. Субмерсия ν из L на M называется конформной, если существует функция f на L такая, что $Hg = \exp(2f)\nu^* g_M$.

При этом f называется *вертикальным показателем* конформности субмерсии, если f — вертикальная функция, т. е. $Xf = 0$ для всякого горизонтального вектора X.

Пример 1.1. Пусть кэлерова 2-форма Φ_M, определенная на M, обладает кэлеровым потенциалом F_M, т. е. $\Phi_M = -2i\partial\overline{\partial}F_M$. И пусть $y(t)$ — вещественная функция, определенная на некотором вещественном интервале (a,b) (допустимо и $a=-\infty$, $b=+\infty$), и имеющая отрицательную производную $\dot y(t) = \frac{dy}{dt}$. На комплексном многообразии

$$E = \Big\{(\zeta, z) \in \mathbb{C}\times M \mid a < \frac{1}{2}(\zeta+\overline{\zeta}) - 2\pi F_M(z,\overline{z}) < b\Big\} \tag{1.1}$$

формулами
$$t = \frac{1}{2}(\zeta + \overline{\zeta}) - 2\pi F_M, \tag{1.2}$$
$f = y(t(\zeta, z))$ определим пару функций t и f. Тогда 2-форма Φ, задаваемая равенством
$$\Phi = e^{2f}\left(\frac{2i}{\pi}\dot{y}^{-1}\partial f \wedge \overline{\partial} f + \Phi_M\right), \tag{1.3}$$
превращает E в кэлерово многообразие. Действительно, т. к. Φ является формой типа $(1,1)$, то ее инвариантность относительно почти комплексной структуры $J\Phi = \Phi$ очевидна. Докажем замкнутость этой формы. Имеем
$$\begin{aligned} d\Phi = 2e^{2f} df \wedge \left(\frac{2i}{\pi}\dot{y}^{-1}\partial f \wedge \overline{\partial} f + \Phi_M\right) - \\ - \frac{2i}{\pi} e^{2f}(\dot{y}^{-3}\ddot{y} df \wedge \partial f \wedge \overline{\partial} f - \dot{y}^{-1}\overline{\partial}\partial f \wedge \overline{\partial} f + \dot{y}^{-1}\partial f \wedge \partial\overline{\partial} f) = \\ = 2e^{2f} df \wedge \Phi_M - \frac{2i}{\pi} e^{2f}\dot{y}^{-1} df \wedge \partial\overline{\partial} f = 2e^{2f} df \wedge (\Phi_M + 2i\partial\overline{\partial} F_M) = 0. \end{aligned}$$
Здесь многократно использовалось разложение $d = \partial + \overline{\partial}$, а также следующее преобразование
$$df \wedge \partial\overline{\partial} f = \ddot{y} df \wedge \partial t \wedge \overline{\partial} t + \dot{y} df \wedge \partial\overline{\partial} t = -2\pi\dot{y} df \wedge \partial\overline{\partial} F_M.$$
Так как для любого вектора Z типа $(1,0)$ выполняется $\overline{\partial} f(\overline{Z}) = \partial f(Z)$, то положительная определенность симметрической 2-формы $g(P,Q) = \Phi(JP,Q)$ ассоциированной с формой Φ очевидна в силу равенства
$$g(Z, \overline{Z}) = i\Phi(Z, \overline{Z}) = e^{2f}\Big(-\frac{1}{\pi}\dot{y}^{-1}(Zf)^2 + g_M(Z, \overline{Z})\Big)$$
и положительной определенности эрмитовой метрики базы ассоциированной с Φ_M. Положим $W = \partial/\partial\zeta$ и $\overline{W} = \partial/\partial\overline{\zeta}$. Используя формулы (9)–(12) ([3], § 5, гл. IX), получим $\nabla_W \overline{W} = 0$, $\nabla_W W = qW$, где $q = -2\pi(\dot{y} + \frac{1}{2}\ddot{y}\dot{y}^{-1})$. А так как связность кэлерова, то этим доказано, что построенные слои вполне геодезические.

Из способа задания кэлеровой формы Φ формулой (1.3) видно, что проекция ν на M является конформной субмерсией с показателем конформности равным f. Нетрудно убедиться, что $Hdf = 0$, и поэтому показатель конформности является вертикальным. В итоге построено кэлерово многообразие E, допускающее голоморфную конформную субмерсию ν с вертикальным невырожденным показателем конформности и вполне геодезическими слоями.

Определение 1.2. Пусть кэлерово многообразие E допускает голоморфную субмерсию ν на кэлерово многообразие M (базу субмерсии) такое, что $\dim_c M + 1 = \dim_c E$ и вертикальную относительно субмерсии ν невырожденную функцию $t : E \mapsto \mathbb{R}$. Пусть любая точка базы обладает такой окрестностью U, что открытое множество $\nu^{-1}(U)$ изоморфно кэлерову многообразию из примера 1.1. Многообразие E будем называть кэлеровым y-продолжением базы M. И в этом случае y — функция продолжения, а t — несущая функция продолжения.

Пример 1.2. Используя предыдущий пример, можно построить кэлерово многообразие E, допускающее голоморфную конформную субмерсию с вертикальным показателем конформности и вполне геодезическими слоями, но с размерностью слоев k уже большей, чем 1. Пусть α, β в этом примере меняются от 1 до k. Пусть, как и в примере 1.1, $(M,\ \Phi_M)$ — кэлерово многообразие, а F_M — его кэлеров потенциал. Пусть k вещественных функций $y_\alpha(t_\alpha)$ от вещественных переменных t_α, изменяющихся на интервалах $(a_\alpha; b_\alpha)$, возможно несобственных, имеют отрицательные производные $\dot{y}_\alpha(t_\alpha) < 0$. На комплексном многообразии
$$E = \{(\zeta^1, \ldots, \zeta^k; z) \in \mathbb{C}^k \times U \mid a_\alpha < \operatorname{Re}\zeta_\alpha - 2\pi F_M < b_\alpha\ \forall\alpha\}$$

зададим 2-форму

$$\Phi = \sum_{\alpha} \exp(2f_\alpha)\left(\frac{2i}{\pi}\dot{y}_\alpha^{-1}\partial f_\alpha \wedge \overline{\partial} f_\alpha + \Phi_M\right),$$

где $f_\alpha = y_\alpha(t_\alpha(\zeta, z))$ и $t_\alpha = \operatorname{Re}\zeta_\alpha - 2\pi F_M$. Эта 2-форма определяет на E структуру кэлерова многообразия. Подобно примеру 1.1 можно показать, что проекция из E на M является голоморфной конформной субмерсией с вертикальным показателем конформности и вполне геодезическими слоями. Размерность слоев субмерсии в этом примере равна k.

2. Основные результаты

Далее всюду в статье вертикальные векторные поля субмерсии обозначаются через U, V, W, а базисные, т. е. проектируемые и горизонтальные, — через X, Y, Z. Последние также часто называются в литературе горизонтальными лифтами и когда нужно подчеркнуть то обстоятельство, что базисное поле получено из векторного поля X, заданного на базовом многообразии M, будем его обозначать через X^H. Локальная проектируемость векторного поля P эквивалентна следующему свойству. Его производная Ли вдоль любого вертикального векторного поля U есть также вертикальное векторное поле

$$L_U P = [U, P] \in V. \tag{2.1}$$

Голоморфность субмерсии немедленно влечет инвариантность относительно комплексной структуры вертикального распределения, а эрмитовость метрики g на E (т. е. $g(JP, Q) = -g(P, JQ)$) — инвариантность горизонтального распределения. Имеем

$$\nu_* J = J\nu_*, \quad JV = V, \quad JH = H. \tag{2.2}$$

Инвариантность горизонтального распределения и первое равенство в (2.2) приводят к тому, что операторы горизонтального лифта и действия комплексной структуры перестановочны между собой, $J(X^H) = (JX)^H$, поэтому в таких случаях скобки будут опускаться.

Следующая лемма показывает, что является мерой неинтегрируемости горизонтального распределения.

Лемма 2.1. *Пусть E — кэлерово многообразие, допускающее голоморфную конформную субмерсию ν с вертикальным показателем конформности f и вполне геодезическими слоями на кэлерово многообразие M. Тогда для любых векторных полей X, Y на M выполняется следующее равенство*:

$$[X^H, Y^H] = [X, Y]^H + 2\Phi(X^H, Y^H)\operatorname{gr}^c f,$$

где $\operatorname{gr}^c f = J \operatorname{gr} f$, а $\operatorname{gr} f$ — градиент показателя конформности.

Теорема 2.1. *Пусть кэлерово многообразие E допускает голоморфную конформную субмерсию ν с вертикальным показателем конформности f и вполне геодезическими слоями на кэлерово многообразие M, и пусть $\dim_c M > 1$. Тогда тензор кривизны многообразия E удовлетворяет следующим равенствам*:

а) $R(U, W)X = 2d\omega^c(U, W)JX$,
б) $R(X, Y)U = g(JX, Y)(\nabla_U \operatorname{gr}^c f + \nabla_{JU} \operatorname{gr} f)$,
в) $R(U, X)W = d\omega^c(U, JW)X + d\omega^c(U, W)JX$,
г) $R(X, U)Y = g(X, Y)\nabla_U \operatorname{gr} f + g(JX, Y)\nabla_U \operatorname{gr}^c f + (\omega(U)\cdot g(X, Y) + \omega^c(U)\cdot g(JX, Y))\cdot \operatorname{gr} f + (\omega(U)g(JX, Y) - \omega^c(U)g(X, Y))\operatorname{gr}^c f$,

где, как и прежде, U, W — вертикальные, а X, Y — горизонтальные векторы, $\omega = df$, $\omega^c = J\omega$.

Напомним, что вполне вещественная бисекционная кривизна $B(p)$ определяется формулой

$$B(p) = g(R(Q, JQ)JS, S),$$

где p — вполне вещественная плоскость в касательном пространстве, натянутая на ортонормальные векторы Q и S, т. е. $g(Q, JS) = g(Q, S) = 0$, $\|Q\| = \|S\| = 1$.

Следствие 2.1. Пусть выполнены предположения теоремы 2.1. Тогда

а) $g(\nabla_U \operatorname{gr}^c f + \nabla_{JU} \operatorname{gr} f, W) = 2d\omega^c(U, W)$,

б) $R(X, Y, U, W) = 2g(JX, Y)d\omega^c(U, W)$,

в) вполне вещественная бисекционная кривизна $B(X \wedge W) = 2d\omega^c(JW, W)$ в смешанных двумерных направлениях зависит лишь от вертикального двумерного направления $W \wedge JW$; здесь W — единичный вектор.

Лемма 2.2. *Пусть E и M — кэлеровы многообразия и $\dim_c M + 1 = \dim_c E > 2$. Если E допускает голоморфную конформную субмерсию ν на M с вертикальным невырожденным показателем конформности f и вполне геодезическими слоями, то существует вертикальная невырожденная функция t на E (единственная с точностью до константы) такая, что выполняется равенство*

$$dt = -2\pi \exp(-2f)\|\operatorname{gr} f\|^{-2} df. \tag{2.3}$$

Теорема 2.2. *Пусть кэлерово многообразие E допускает голоморфную конформную субмерсию ν на кэлерово многообразие M, $\dim_c M + 1 = \dim_c E > 2$, с невырожденным вертикальным показателем конформности f и вполне геодезическими слоями. Тогда E локально изоморфно кэлерову y-продолжению, причем $f = y(t)$, где t — несущая функция продолжения, удовлетворяющая уравнению (2.3), а ν — субмерсия продолжения.*

3. Субмерсии с произвольной размерностью слоя

Напомним, что инвариант О'Нейла A ([4], п. 9.20),

$$A_P Q = H\nabla_{HP} VQ + V\nabla_{HP} HQ,$$

где P, Q — произвольные векторные поля тотального пространства субмерсии, является тензорным полем типа $(2, 1)$ и определен для любой, не обязательно римановой, субмерсии.

Лемма 3.1. *Пусть E и M — кэлеровы многообразия, а ν — голоморфная конформная субмерсия из E на M с вертикальным показателем конформности f и вполне геодезическими слоями. Тогда*

$$A_X U = \nabla_U X = \omega(U)X + \omega^c(U)JX,$$

где A — инвариант О'Нейла субмерсии ν, а вертикальные 1-формы ω и ω^c определяются формулами $\omega = df$, $\omega^c = J\omega$.

Доказательство. Пусть X, Y — базисные векторные поля, а U — вертикальное векторное поле. По свойству замкнутости кэлеровой формы Φ многообразия E имеем $d\Phi(JU, X, JY) = 0$. Отсюда следует соотношение

$$JU\Phi(X, JY) + \Phi(JU, [X, JY]) = 0. \tag{3.1}$$

Из формулы Кошуля для связности Леви-Чивита ([2], предложение 2.3, гл. IV) и определения кэлеровой формы получаем равенство $2\Phi(\nabla_U X, Y) = U\Phi(X, Y) - \Phi(JU, [X, JY])$. Из формулы (3.1) и полученного выражения имеем

$$2\Phi(\nabla_U X, Y) = U\Phi(X, Y) + JU\Phi(X, JY). \tag{3.2}$$

Используя связь между кэлеровой метрикой и ассоциированной с ней кэлеровой формой, $\Phi(X, Y) = g(X, JY)$, а также конформность субмерсии (определение 1.1), получим равенство

$$(L_U\Phi)(X, Y) = 2\omega(U)\Phi(X, Y). \tag{3.3}$$

Свойство проектируемости (2.1) полей X, Y влечет $L_U\Phi(X, Y) = U\Phi(X, Y)$. Поэтому, подставляя в формулу (3.2) соответствующие выражения вида (3.3), получим равенство

$$\Phi(\nabla_U X, Y) = \omega(U)\Phi(X, Y) + \omega(JU)\Phi(X, JY).$$

Из невырожденности кэлеровой формы, ее эрмитовости, т. е. $\Phi(X, JY) = -\Phi(JX, Y)$, и определения результата действия почти комплексной структуры на 1-форму $J\omega(U) = -\omega(JU)$ следует $H\nabla_U X = \omega(U)X + \omega^c(U)JX$. Вполне геодезичность слоев влечет равенство $H\nabla_U X = \nabla_U X$. Таким образом, второе равенство леммы доказано. Первое равенство леммы теперь следует из определения инварианта О'Нейла A. □

Лемма 3.2. *Для голоморфной субмерсии с вполне геодезическими слоями на кэлеровом многообразии* $(L_X\Phi)(U, W) = 0$.

Доказательство. Интегрируемость почти комплексной структуры означает следующее: $J[X, W] = J[JX, JW] + [X, JW] + [JX, W]$. Применяя эту формулу в следующих вычислениях, получим

$$\begin{aligned}(L_X g)(U, W) &= -X\Phi(U, JW) + \Phi([X, U], JW) + \Phi(U, J[X, W]) \\ &= -(L_X\Phi)(U, JW) + \Phi(U, J[JX, JW] + [JX, W]).\end{aligned} \tag{3.4}$$

Учитывая соглашения об обозначениях горизонтальных и вертикальных векторных полей, принятые выше, из условия леммы получим равенство

$$V[JX, W] = V\nabla_{JX}W. \tag{3.5}$$

Отсюда $V(J[JX, JW] + [JX, W]) = VJ\nabla_{JX}JW + V\nabla_{JX}W = 0$, т. к. комплексная структура J параллельна, а субмерсия голоморфная. Применяя полученный результат к (3.4), видим, что последнее слагаемое в крайней правой части цепочки равенств равно нулю. Итак, получим следующее равенство $(L_X g)(U, W) = -(L_X\Phi)(U, JW)$. Как известно ([5], теорема 5.23), равенство нулю левой части последнего тождества служит критерием того, что слои субмерсии вполне геодезичны. □

Доказательство леммы 2.1. Учитывая ν-связность ($\nu_* X^H = X$) горизонтальных лифтов векторных полей и их проекций, для доказательства равенства леммы 2.1 достаточно доказать равенство лишь вертикальных компонент в левой и правой частях.

Если положить в формуле (3.1) $W = JU$, воспользоваться метричностью связности и леммой 3.1, то в результате получим цепочку равенств

$$\begin{aligned}\Phi([X, Y], W) = W\Phi(X, Y) = Wg(X, JY) = \omega(W)g(X, JY) + \omega^c(W)g(JX, JY) + \\ + \omega(W)g(X, JY) - \omega^c(W)g(X, Y) = 2\omega(W)g(X, JY).\end{aligned} \tag{3.6}$$

Сравнение крайних частей в полученной цепочке равенств (3.6) позволяет получить формулу

$$\Phi([X^H, Y^H], W) = 2\omega(W)\Phi(X^H, Y^H) = 2\Phi(X^H, Y^H)\Phi(\mathrm{gr}^c f, W),$$

где W — произвольный вертикальный вектор. Теперь лемма следует из невырожденности кэлеровой формы. □

Лемма 3.3. *Пусть* $\nu : E \mapsto M$ — *голоморфная конформная субмерсия кэлеровых многообразий с вертикальным показателем конформности* f *и вполне геодезическими слоями, причем* $\dim_c M > 1$. *Пусть* $\omega = df$, $\omega^c = J\omega$. *Тогда верно следующее*:

а) $d\omega^c(X, Y) = -\Phi(X, Y)\|\,\mathrm{gr}\, f\|^2$ *для любых горизонтальных векторов* X, Y;

б) $\|\,\mathrm{gr}\, f\|$ — *вертикальная функция.*

Доказательство. Пусть векторные поля X, Y — горизонтальные лифты, совпадающие с заданными по условию векторами в некоторой точке. Применим предложение 3.11 из ([2], гл. 1) и лемму 2.1. Имеем

$$d\omega^c(X, Y) = -\frac{1}{2}\omega^c([X, Y]) = -\Phi(X, Y)\omega^c(\mathrm{gr}^c f).$$

а) Этот пункт следует из метрической двойственности векторных полей $\operatorname{gr} f$, $\operatorname{gr}^c f$ и 1-форм ω и ω^c:

$$g(\operatorname{gr} f, Q) = \omega(Q), \quad g(\operatorname{gr}^c f, Q) = \omega^c(Q). \tag{3.7}$$

б) В произвольной точке $\Xi \in E$ для любого горизонтального вектора X выберем горизонтальные векторы Y и $Z = JY$ так, чтобы они были ортогональные вектору X. Продолжим все эти векторы до базисных полей. Из свойства оператора внешнего дифференцирования $d^2 = 0$ получим следующее равенство:

$$0 = d^2\omega^c(X, Y, Z) = \mathfrak{S}_{X,Y,Z}(X d\omega^c(Y, Z) + d\omega^c(X, [Y, Z]))$$

(здесь символом $\mathfrak{S}$ обозначается циклическая сумма). Воспользуемся равенством п. а), замкнутостью кэлеровой формы Φ и леммой 2.1, тогда последнее выражение преобразуется следующим образом:

$$\mathfrak{S}_{X,Y,Z}(d\omega^c(X, V[Y, Z]) - \Phi(Y, Z) \cdot X\|\operatorname{gr} f\|^2) = \mathfrak{S}_{X,Y,Z}\Phi(Y, Z)(2d\omega^c(X, \operatorname{gr}^c f) - X\|\operatorname{gr} f\|^2).$$

Применяя формулу для внешнего дифференцирования, двойственность (3.7) и вполне геодезичность слоев субмерсии, получим

$$2d\omega^c(X, \operatorname{gr}^c f) - X\|\operatorname{gr} f\|^2 = \omega^c([\operatorname{gr}^c f, X]) = g(\operatorname{gr}^c f, \nabla_{\operatorname{gr}^c f} X - \nabla_X \operatorname{gr}^c f) = -X\|\operatorname{gr} f\|^2/2.$$

Подставим полученное выражение в предыдущую формулу, в рассматриваемой точке Ξ получим следующее: $0 = -\Phi(Y, JY)X\|\operatorname{gr} f\|^2/2$. $\square$

Лемма 3.4. *Пусть $\nu : E \mapsto M$ — голоморфная конформная субмерсия кэлеровых многообразий с вертикальным показателем конформности f и вполне геодезическими слоями, причем $\dim_c M > 1$. Пусть $\omega = df$, $\omega^c = J\omega$. Тогда для любого вертикального вектора W и любого горизонтального X выполняется равенство $d\omega^c(W, X) = 0$.*

Доказательство. По определению дифференцирования Ли, учитывая связь кэлеровой формы с метрикой, имеем

$$(L_X\Phi)(\operatorname{gr} f, \operatorname{gr}^c f) = -X\|\operatorname{gr} f\|^2 + g([X, \operatorname{gr} f], \operatorname{gr} f) + g(\operatorname{gr}^c f, [X, \operatorname{gr}^c f]).$$

Воспользовавшись леммой 3.3 б) и двойственностью (3.7), получим равенство

$$(L_X\Phi)(\operatorname{gr} f, \operatorname{gr}^c f) = \omega([X, \operatorname{gr} f]) + \omega^c([X, \operatorname{gr}^c f]). \tag{3.8}$$

Из определения вертикальной формы ω и леммы 3.3 следует равенство

$$\omega([X, \operatorname{gr} f]) = X\omega(\operatorname{gr} f) - \operatorname{gr} f\omega(X) - 2d\omega(X, \operatorname{gr} f) = 0. \tag{3.9}$$

Из формул (3.8) и (3.9) следует

$$(L_X\Phi)(\operatorname{gr} f, \operatorname{gr}^c f) = \omega^c([X, \operatorname{gr}^c f]) = -2d\omega^c(X, \operatorname{gr}^c f).$$

Эрмитовость формы $d\omega^c$ непосредственно следует из ее определения, приведенного выше, $d\omega^c = 2i\partial\overline{\partial}f$. Из эрмитовости формы $d\omega^c$ и леммы 3.2 вытекают равенства

$$d\omega^c(X, \operatorname{gr}^c f) = 0, \quad d\omega^c(Y, \operatorname{gr} f) = 0.$$

Наконец, если вектор W ортогонален к $\operatorname{gr} f$ и $\operatorname{gr}^c f$, то $\omega(W) = \omega^c(W) = 0$. Поэтому для базисного векторного поля X имеем

$$2d\omega^c(W, X) = -\omega^c([W, X]) = -g(\operatorname{gr}^c f, [W, X]).$$

Учитывая равенство (3.5), метричность связности и эрмитовость метрического тензора, получим продолжение предыдущей последовательности равенств

$$g(\operatorname{gr}^c f, \nabla_X W) = -g(J\nabla_X \operatorname{gr} f, W) = -g(\operatorname{gr} f, \nabla_X JW) =$$
$$= -g(\operatorname{gr} f, [X, JW]) = -\omega([X, JW]) = 2d\omega(X, JW) - X\omega(JW) = 0,$$

где последнее равенство следует из замкнутости ω и выбора W. $\square$

Доказательство теоремы 2.1. Продолжим векторы X, Y до базисных векторных полей, а U — до вертикального векторного поля. По лемме 3.1

$$\nabla_U \nabla_W X = U\omega(W)X + \omega(W)(\omega(U)X + \omega^c(U)JX) +$$
$$+ U\omega^c(W)JX + \omega^c(W)J(\omega(U)X + \omega^c(U)JX) \qquad (3.10)$$
$$\nabla_{[U,W]} X = \omega([U, W])X + \omega^c([U, W])JX. \qquad (3.11)$$

а) Этот пункт немедленно следует из формул (3.10), (3.11) и выражения для внешнего дифференциала, неоднократно применявшегося выше.

б) Применим лемму 3.1 и воспользуемся вполне геодезичностью слоев субмерсии. Тогда получим $HR(X,U)Y = H(\nabla_X(\omega(U)Y + \omega^c(U)JY) - H\nabla_U(H\nabla_X Y + V\nabla_X Y) - \omega([X,U])Y - \omega^c([X,U]))JY = X\omega(U)Y + X\omega^c(U)JY - \omega([X,U])Y - \omega^c([X,U])JY = 2d\omega^c(X,U)JY = 0$. Последние два равенства следуют из вертикальности 1-форм ω и ω^c, замкнутости формы ω и из леммы 3.1. Таким образом, $HR(X,U)Y = 0$. Отсюда и из 1-го тождества Бьянки следует

$$HR(X,Y)U = HR(X,U)Y - HR(Y,U)X = 0.$$

Для нахождения вертикальной составляющей значения тензора кривизны на выбранной тройке векторов воспользуемся алгебраическими свойствами тензора кривизны, п. а), выражением для внешнего дифференциала 1-формы, двойственностью (3.7), метричностью связности Леви-Чивита и отсутствием у нее кручения. Имеем

$$g(R(X,Y)U,W) = g(R(U,W)X,Y) = 2d\omega^c(U,W)g(JX,Y) = (U\omega^c(W) -$$
$$-W\omega^c(U) - \omega^c([U,W]))g(JX,Y) = (Ug(\operatorname{gr}^c f, W) - Wg(\operatorname{gr}^c f, U) - \omega^c(\nabla_U W) + \omega^c(\nabla_W U))g(JX,Y) =$$
$$= (g(\nabla_U \operatorname{gr}^c f, W) - g(\nabla_W \operatorname{gr}^c f, U))g(JX,Y) = g(JX,Y)g(\nabla_U \operatorname{gr}^c f + \nabla_{JU} \operatorname{gr} f, W).$$

Последнее в цепочке равенство, доказывающее б), следует из параллельности комплексной структуры и симметричности гессиана функции ([4], с. 53)

$$\operatorname{hes} f(W,V) = g(\nabla_W \operatorname{gr} f, V) = (\nabla_W \omega)(V). \qquad (3.12)$$

в), г) Отсутствие вертикальной составляющей в правой части равенства п. в) вытекает из вполне геодезичности слоев и алгебраических свойств тензора кривизны. Воспользуемся свойством проектируемости (2.1) базисных полей. Имеем

$$R(U,X)W = HR(U,X)W = \nabla_U A_X W - A_X \nabla_U W =$$
$$= ((\nabla_U \omega)(W) + \omega(U)\omega(W) - \omega^c(U)\omega^c(W))X + ((\nabla_U \omega^c)(W) + \omega^c(U)\omega(W) + \omega(U)\omega^c(W))JX.$$

Полученное представление для $R(U,X)W$ допускает упрощение. Из алгебраических свойств тензора кривизны, предыдущей формулы и двойственности (3.7) следует

$$g(R(X,U)Y,W) = g(R(U,X)W,Y) = g(X,Y)g(\nabla_U \operatorname{gr} f + \omega(U)\operatorname{gr} f - \omega^c(U)\operatorname{gr}^c f, W) +$$
$$+ g(JX,Y)g(\nabla_U \operatorname{gr}^c f + \omega^c(U)\operatorname{gr} f + \omega(U)\operatorname{gr}^c f, W). \qquad (3.13)$$

В 1-м тождестве Бьянки используем полученное выражение вместо второго и третьего слагаемых и выражение из п. б). Имеем

$$0 = g(R(X,Y)U + R(Y,U)X + R(U,X)Y, W) =$$
$$= g(JX,Y)g(\nabla_{JU} \operatorname{gr} f - \nabla_U \operatorname{gr}^c f - 2\omega(U)\operatorname{gr}^c f - 2\omega^c(U)\operatorname{gr} f, W).$$

Учитывая в последнем выражении симметричность гессиана функции (3.12), получим тождество

$$g(\nabla_U \operatorname{gr}^c f, W) + 2\omega^c(W)\omega(U) = -g(\nabla_W \operatorname{gr}^c f, U) - 2\omega^c(U)\omega(W).$$

Таким образом, корректно определена вертикальная 2-форма Ψ

$$\Psi(U,W) = g(\nabla_U \operatorname{gr}^c f, W) + 2\omega^c(W)\omega(U) = d\omega^c(U,W) + 2\omega \wedge \omega^c(U,W). \tag{3.14}$$

Последнее равенство следует из кососимметричности Ψ и выражения для внешнего дифференцирования из следствия 8.6 ([2], гл. 3), которое применительно к рассматриваемому случаю приводит к равенству

$$2d\omega^c(U,W) = (\nabla_U \omega^c)(W) - (\nabla_W \omega^c)(U),$$

если учитывать двойственность векторного поля $\operatorname{gr}^c f$ к внешней 1-форме ω^c по формулам (3.7). Кроме того, из равенства (3.14) следует

$$d\omega^c(U,W) = (\nabla_U \omega^c)(W) + \omega^c(U)\omega(W) + \omega^c(W)\omega(U).$$

Используя двойственность (3.7), параллельность комплексной структуры и последнее равенство, нетрудно получить соотношение

$$d\omega^c(U,JW) = (\nabla_U \omega)(W) + \omega(U)\omega(W) - \omega^c(U)\omega^c(W).$$

Полученное выше выражение для $R(U,X)W$ совместно с двумя последними равенствами доказывают в). Так как из алгебраических свойств тензора кривизны и б) следует, что горизонтальная компонента $R(X,U)Y$ нулевая, то равенство (3.13) доказывает г). $\square$

Доказательство следствия 2.1 а). Равенство этого пункта следует из алгебраических свойств тензора кривизны и пп. а), б) теоремы 2.1.

б). Равенство этого пункта есть следствие п. б) теоремы 2.1.

в). В равенстве б) выберем горизонтальный вектор X единичным, а $Y = JX$. $\square$

4. Субмерсии с одномерными слоями

Лемма 4.1. *Пусть E и M — кэлеровы многообразия и $\dim_c M + 1 = \dim_c E > 2$. Если E допускает голоморфную конформную субмерсию ν на M с вертикальным невырожденным показателем конформности f и вполне геодезическими слоями, то*

$$d\omega^c = -\frac{\varkappa}{\|\operatorname{gr} f\|^2}\omega \wedge \omega^c - e^{2f}\|\operatorname{gr} f\|^2 \nu^*\Phi_M,$$

где $\omega = df$, $\omega^c = J\omega$, Φ_M — кэлерова форма для многообразия M, а $\varkappa = B(X \wedge W)$ — вполне вещественная бисекционная кривизна в смешанных двумерных направлениях, являющаяся функцией на E.

Доказательство. Пусть $P = U + X$, $Q = W + Y$ — разложение векторов на вертикальную и горизонтальную составляющие. На основании леммы 3.4 имеет место равенство

$$d\omega^c(P,Q) = d\omega^c(U,W) + d\omega^c(X,Y). \tag{4.1}$$

Равенствами $\eta = \operatorname{gr} f/\|\operatorname{gr} f\|$, $\xi = J\eta$ определим единичные взаимно ортогональные векторные поля. Из следствия 2.1 б), выбрав горизонтальный вектор Z единичным, получим

$$d\omega^c(U,W) = \frac{1}{2\|\operatorname{gr} f\|^2} g(R(Z,JZ)(\omega(U)\eta + \omega^c(U)\xi), \omega(W)\eta + \omega^c(W)\xi).$$

Так как вертикальное двумерное направление в случае одномерных слоев единственное, то по следствию 2.1 в) из предыдущей формулы находим

$$d\omega^c(U,W) = -\frac{\varkappa}{\|\operatorname{gr} f\|^2}\omega \wedge \omega^c(U,W). \tag{4.2}$$

Лемма 3.3 а), вертикальность 1-форм ω и ω^c совместно с равенствами (4.1) и (4.2) приводят к следующей формуле:

$$d\omega^c(P,Q) = -\frac{\varkappa}{\|\operatorname{gr} f\|^2}\omega \wedge \omega^c(P,Q) - \|\operatorname{gr} f\|^2\Phi(X,Y). \tag{4.3}$$

Из определения конформности субмерсии ν следует, что $\Phi(X,Y) = H\Phi(P,Q) = e^{2f}\nu^*\Phi_M(P,Q)$. Подставляя полученное выражение в равенство (4.3), приходим к утверждению леммы. □

Лемма 4.2. *В предположениях леммы* 4.1 *верно следующее*:

а) $d\|\operatorname{gr} f\|^2 = -(\varkappa + 2\|\operatorname{gr} f\|^2)\omega$,

б) *дифференциал функции смешанной бисекционной кривизны* $\varkappa$ *коллинеарен форме* ω.

Доказательство. а) Из точности внешнего дифференцирования, его перестановочности с кодифференциалом субмерсии и замкнутости кэлеровой формы по лемме 4.1 имеем

$$0 = d^2\omega^c = -d\frac{\varkappa}{\|\operatorname{gr} f\|^2} \wedge \omega \wedge \omega^c + \frac{\varkappa}{\|\operatorname{gr} f\|^2}\omega \wedge d\omega^c - d(e^{2f}\|\operatorname{gr} f\|^2) \wedge \nu^*\Phi_M.$$

В эту формулу подставим во втором слагаемом выражение для $d\omega^c$ из леммы 4.1. После преобразований получим

$$d\frac{\varkappa}{\|\operatorname{gr} f\|^2} \wedge \omega \wedge \omega^c = -(d(e^{2f}\|\operatorname{gr} f\|^2) + \varkappa e^{2f}\omega) \wedge \nu^*\Phi_M. \tag{4.4}$$

В последней формуле слева стоит, как минимум, дважды вертикальная форма, а справа — дважды горизонтальная, т. к. форма $\nu^*\Phi_M$ базисная. Таким образом, слева и справа на самом деле стоит нулевая форма. Правая часть формулы (4.4) после дифференцирования дает следующее равенство:

$$(d\|\operatorname{gr} f\|^2 + (\varkappa + 2\|\operatorname{gr} f\|^2)\omega) \wedge \nu^*\Phi_M = 0.$$

Теперь утверждение а) следует из невырожденности кэлеровой формы.

б) Продифференцировав обе части равенства а), получим следующее равенство: $(d\varkappa + 2d\|\operatorname{gr} f\|^2) \wedge \omega = 0$. Теперь утверждение б) следует из утверждения а). □

Доказательство леммы 2.2. По условию функция f невырождена на E. А по лемме 4.2 квадрат нормы градиента $\|\operatorname{gr} f\|^2$ является функцией лишь от f. Поэтому любая первообразная

$$t = -2\pi\int e^{-2f}\|\operatorname{gr} f\|^{-2}df$$

определяет вещественную функцию $t = t(f)$, а суперпозиция $t = t \circ f$, где в качестве f уже выступает показатель конформности, задает функцию, определенную всюду на E. Вертикальность t следует из вертикальности f. □

Следствие 4.1. В предположениях леммы 4.1 показатель конформности допускает представление $f = y(t)$ в виде суперпозиции функции t из леммы 2.2 и вещественной функции y.

Лемма 4.3. *Пусть выполнены условия леммы* 2.2 *и* t — *функция из этой леммы. Если* U — *открытое множество базы* M *такое, что функция* F_M *является кэлеровым потенциалом для* Φ_M *в* U, *то функция* $\xi = t + 2\pi F_M$, *определенная на множестве* $\nu^{-1}(U)$, *является плюригармонической.*

Доказательство. В нижеприведенных вычислениях последовательно используется лемма 2.2, лемма 4.2 a) и лемма 4.1.

$$dd^c(t+2\pi F_M) = d(-2\pi e^{-2f}\|\mathrm{gr}\, f\|^{-2}d^c f + 2\pi d^c F_M) =$$
$$= (4\pi e^{-2f}\|\mathrm{gr}\, f\|^{-2} - 2\pi e^{-2f}(\varkappa + 2\|\mathrm{gr}\, f\|^2)\|\mathrm{gr}\, f\|^{-4})\omega\wedge\omega^c +$$
$$+2\pi dd^c F_M = -\frac{2\pi\varkappa\exp(-2f)}{\|\mathrm{gr}\, f\|^{-4}}\omega\wedge\omega^c - 2\pi e^{-2f}\|\mathrm{gr}\, f\|^{-2}d\omega^c - 2\pi\nu^*\Phi_M =$$
$$= -2\pi e^{-2f}\|\mathrm{gr}\, f\|^{-2}\left(\frac{\varkappa}{\|\mathrm{gr}\, f\|^2}\omega\wedge\omega^c + d\omega^c + \exp(-2f)\|\mathrm{gr}\, f\|^2\nu^*\Phi_M\right) = 0. \quad \square$$

Доказательство теоремы 2.2. Обозначим $\omega = df$, $\omega^c = J\omega$. Пусть J — ортогональный оператор, и слои субмерсии — вещественно-двумерные подмногообразия, поэтому $Vg = (\omega^2 + (\omega^c)^2)/\|\,\mathrm{gr}\, f\|^2$, где g — кэлерова метрика на E. Из условия конформности субмерсии и предыдущего равенства находим метрику $g = (\omega^2 + (\omega^c)^2)/\|\,\mathrm{gr}\, f\|^2 + e^{2f}\nu^* g_M$ на E. Полученное равенство перепишется для ассоциированных с g и g_M кэлеровых форм в виде

$$\Phi = -\frac{2}{\|\,\mathrm{gr}\, f\|^2}\omega\wedge\omega^c + e^{2f}\nu^*\Phi_M.$$

Из следствия 4.1 вытекает $f = y(t)$, т.е. показатель конформности f является суперпозицией некоторой вещественной функции y и функции t из леммы 2.2. Нетрудно посчитать, что $\|\mathrm{gr}\, f\|^2 = -2\pi\exp(-2f)\dot{y}(t)$. Поэтому равенство (1.3) для кэлеровой формы многообразия E, суженной на $\nu^{-1}(U)$, теперь следует из определения конформной субмерсии и вертикальности показателя конформности. Из леммы 4.3 следует, что в некоторой окрестности O каждой точки Ξ_0 существует голоморфная функция ζ такая, что $\xi = \mathrm{Re}\,\zeta$ и выполняется равенство (1.2). Следует отметить, что в отличие от ξ мнимая часть $\eta = \mathrm{Im}\,\zeta$ этой функции может быть определена (как однолистная функция) не всюду в $\nu^{-1}(U)$. По лемме 2.2 t является невырожденной вертикальной функцией. Поэтому ζ является комплексной координатой вдоль слоя. Очевидно, окрестность O можно выбрать голоморфно эквивалентной множеству из правой части равенства (1.1). $\square$

Литература

1. Calabi E. *Métriques kähleriennes et fibrés holomorphes* // Ann. sci. Ecole norm. super. – 1979. – V. 12. – № 2. – P. 269–294
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 1. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
3. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 2. – М.: Наука, 1981. – 461 с.
4. Бессе А. *Многообразия Эйнштейна.* – М.: Мир, 1990. – 703 с.
5. Tonder Ph. *Foliations on Riemannien manifolds.* – N. Y.: Springer-Verlag, 1988. – 247 p.

Харьковский государственный университет

Поступила 08.10.1996