ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 3 (478)

УДК 517.577

Б.А. КАЦ, А.Ю. ПОГОДИНА

О ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ НА НЕГЛАДКОЙ КРИВОЙ

1. Введение

Пусть Γ есть простая спрямляемая кривая на комплексной плоскости. Тогда для любой заданной на Γ непрерывной функции $f(t)$ интеграл типа Коши

$$C(\Gamma, f; z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \tag{1}$$

существует и представляет голоморфную в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функцию. Традиционный интерес вызывает вопрос о существовании и свойствах граничных значений этой функции, т. е. пределов $C^{+}(\Gamma, f; t) = \lim\limits_{z\to t} C(\Gamma, f; z)$ и $C^{-}(\Gamma, f; t) = \lim\limits_{z\to t} C(\Gamma, f; z)$, получающихся при приближении z к точке $t \in \Gamma$ слева и справа соответственно. Этот интерес в значительной степени обусловлен приложениями интеграла типа Коши к решению краевых задач и сингулярных интегральных уравнений (см. [1], [2]).

Хорошо известно, что интеграл (1) по замкнутой кусочно-гладкой кривой Γ имеет непрерывные граничные значения на Γ, если его плотность $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера

$$\sup\left\{\frac{|f(t') - f(t'')|}{|t' - t''|^{\nu}} : t', t'' \in \Gamma,\ t' \neq t''\right\} \equiv h_{\nu}(f, \Gamma) < \infty \tag{2}$$

с каким-либо показателем $\nu \in (0, 1]$. Этот результат был известен еще Сохоцкому, Гарнаку и Морера (см., напр., [2], гл. 1).

В дальнейшем он многократно уточнялся и обобщался.

Ниже через $H_{\nu}(\Gamma)$ обозначим пространство Гёльдера, т. е. множество всех заданных на Γ функций, удовлетворяющих условию (2).

Одним из наиболее важных достижений последнего времени в этой области является теорема, доказанная Е.М. Дынькиным [3] и независимо от него Т. Салимовым [4]. Эта теорема дает оценку для модуля непрерывности интеграла (1) по спрямляемой (вообще говоря, негладкой) кривой Γ через модуль непрерывности его плотности f и некоторые величины, характеризующие метрические свойства Γ. Простейшие следствия этой оценки таковы:

(a) если $f \in H_{\nu}(\Gamma)$ при $\nu > 1/2$, то граничные значения $C^{\pm}(\Gamma, f; t)$ существуют и непрерывны без каких-либо дополнительных ограничений на спрямляемую кривую Γ; этот результат вместе с утверждением о его неулучшаемости (см. ниже) может рассматриваться как решение вопроса о возможности перенесения теоремы Гарнака–Морера–Сохоцкого на произвольные негладкие спрямляемые кривые;

(b) если кривая Γ удовлетворяет условию $\theta_{\Gamma}(r) \asymp r$, где $\theta_{\Gamma}(r)$ есть максимальная (по $\zeta \in \Gamma$) суммарная длина дуг Γ, лежащих в круге $|z - \zeta| \leq r$, то граничные значения интеграла (1)

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, (грант 01-01-00088).

с плотностью $f \in H_\nu(\Gamma)$ существуют при любом $\nu \in (0,1]$, причем при $\nu < 1$ справедливы включения $C^\pm(\Gamma, f; t) \in H_\nu(\Gamma)$.

В [3] установлено, что эти результаты неулучшаемы в терминах модулей непрерывности и используемых в этой работе метрических характеристик кривой Γ. В частности, для произвольно фиксированного $\nu \in (0, 1/2]$ построены такая спрямляемая кривая Γ_ν и такая заданная на ней функция $f_\nu(t) \in H_\nu(\Gamma_\nu)$, что интеграл (1) с $\Gamma = \Gamma_\nu$ и $f = f_\nu$ теряет непрерывность в одной из точек контура интегрирования.

Отметим, что условия существования граничных значений интеграла типа Коши и их свойства в [3], [4] описываются в терминах длин. То же относится ко всем другим известным нам работам в этой области.

В данной статье на негладкую кривую Γ накладываются ограничения совершенно иного характера. Их можно трактовать как условия малости площадей, заключенных между Γ и некоторой гладкой дугой. В § 2 опишем интересующие нас классы кривых и плотностей; отметим, что он содержит упомянутый выше пример Е.М. Дынькина. В § 3 формулируются и доказываются основные результаты работы, относящиеся к спрямляемым кривым. § 4 посвящен их обобщению на неспрямляемые дуги.

2. Обозначения и определения

Пусть на отрезке $I = [0, 1]$ действительной оси задана непрерывная вещественная функция $y = Y(x)$. Обозначим ее график через

$$\operatorname{gr} Y = \{x + iy : x \in I, y = Y(x)\}.$$

В качестве основного класса кривых рассмотрим множество $\mathfrak{G}$ всевозможных графиков с концами в точках 0 и 1, т. е. $\mathfrak{G}$ состоит из всех дуг вида $\Gamma = \operatorname{gr} Y$, где Y — любая непрерывная вещественная функция такая, что $Y(0) = Y(1) = 0$.

При конструировании примеров удобно пополнять это множество графиками разрывных функций. Если функция Y имеет разрыв первого рода (скачок) в точке $\xi \in (0, 1)$, то будем включать в множество $\operatorname{gr} Y$ вертикальный отрезок $[\xi + iY(\xi - 0),\ \xi + iY(\xi + 0)]$. Пополненный такими отрезками график функции Y будет жордановой дугой, если эта функция непрерывна в точках 0 и 1. Множество $\mathfrak{GG}$ состоит из всех дуг вида $\Gamma = \operatorname{gr} Y$, где Y есть заданная на отрезке I вещественная функция, непрерывная во всех его точках за возможным исключением не более чем счетного числа точек $\xi_1, \xi_2, \dots$, где она может иметь разрывы первого рода. При этом предполагается, что функция Y непрерывна в точках 0 и 1, $Y(0) = Y(1) = 0$, и если последовательность точек разрыва ξ_n бесконечна, то $\lim \xi_n = 0$.

Через $\mathfrak{RG}$ и $\mathfrak{RGG}$ ниже обозначаются множества спрямляемых дуг, входящих в классы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{GG}$ соответственно. Это значит, что к условиям, налагаемым на функции Y, здесь добавляется условие ограниченности их вариаций.

Наконец, $\mathfrak{R}_\circ\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{R}_\circ\mathfrak{GG}$ суть множества тех дуг классов $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{GG}$ соответственно, для которых функции Y имеют ограниченные вариации на отрезке $[\varepsilon, 1]$ при любом $\varepsilon > 0$, но, вообще говоря, не при $\varepsilon = 0$. Это значит, что дуги $\Gamma^\varepsilon = \{x + iy : \varepsilon \le x \le 1,\ y = Y(x)\}$ спрямляемы при любом $\varepsilon > 0$, но пределы их длин при $\varepsilon \to 0$ могут оказаться бесконечными. Интеграл Коши по кривым этих классов понимается как несобственный:

$$C(\Gamma, f; z) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^\varepsilon} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \tag{3}$$

Будем считать, что дуги всех этих классов обходятся от точки 0 к точке 1. Если Γ_1 и Γ_2 суть две такие дуги, то разность $\Gamma_1 - \Gamma_2$ есть объединение множеств Γ_1 и Γ_2, в котором Γ_1 обходится от 0 к 1, а Γ_2 — от 1 к 0; если какая-либо дуга γ принадлежит одновременно Γ_1 и Γ_2, то она исключается из их разности. Таким образом, разность $\Gamma_1 - \Gamma_2$ представляет собою либо одну простую замкнутую кривую, либо семейство таких кривых (возможно, бесконечное). Каждая из этих кривых ограничивает некоторую конечную область D_j, $j = 1, \dots$, причем все эти области попарно не пересекаются. Сигнатурой разности $\Gamma_1 - \Gamma_2$ назовем заданную во всей комплексной плоскости функцию $s(z) = \sum\limits_j s_j(z)$, где функция $s_j(z)$ равна 1 в замыкании области D_j, если положительное направление обхода границы этой области совпадает с направлением обхода части Γ_1, входящей в эту границу, и -1, если эти направления противоположны. Вне области D_j величина $s(z)$ равна нулю, а суммирование производится по всем областям D_j (для разностей кривых из рассматриваемых классов такая сумма содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых при любом z). В общих точках соседних областей D_j сигнатура равняется либо 0, либо ± 2, но ее предельные значения на границе области D_j непрерывны: при приближении к этой границе снаружи они равны тождественному нулю, а при приближении изнутри — постоянной $+1$ или -1.

Перейдем теперь к описанию класса $\mathfrak{h}_\nu$ плотностей f. Заданную на отрезке I функцию $f(x)$ отнесем к классу $\mathfrak{h}_\nu(I)$, $\nu \in (0,1]$, если $f \in H_\nu(I)$, $f(0) = f(1) = 0$ и $f \in H_1(I^\varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$; здесь $I^\varepsilon = [\varepsilon, 1]$. Такие функции почти всюду дифференцируемы на I, а их производные ограничены на I^ε при любом $\varepsilon > 0$.

Заданную на $\Gamma \in \mathfrak{G}$ (или $\mathfrak{GG}$) функцию $f(z)$ отнесем к классу $\mathfrak{h}_\nu(\Gamma)$, если она представима в виде $f(x+iy) = f^*(x)$, где $f^* \in \mathfrak{h}_\nu(I)$. Фактически каждая функция этого класса может считаться заданной в полосе $\{x + iy : x \in I,\ y \in \mathbb{R}\}$. Для остальных $z = x + iy$ ее можно доопределить нулем. Ниже считается, что это уже сделано. Поэтому вместо $\mathfrak{h}_\nu(I)$ будем писать $\mathfrak{h}_\nu$.

3. Основной результат

Лемма. *Пусть дуги Γ_1 и Γ_2 принадлежат классу $\mathfrak{R}_0\mathfrak{GG}$, а заданная на них функция f принадлежит классу $\mathfrak{h}_\nu$. Пусть, кроме того, выполнены следующие два условия:*

(i) *при любом $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_1$ интеграл типа Коши $C(\Gamma_1, f; z)$ существует в смысле определения* (3);

(ii) *для некоторого $p > 2$ выполняется условие*

$$\int_0^1 \left| \frac{df^*}{dx} \right|^p |Y_1(x) - Y_2(x)|\, dx < \infty. \tag{4}$$

Тогда интеграл типа Коши $C(\Gamma_2, f; z)$ также существует в смысле определения (3) *при любом $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_2$, причем разность $C(\Gamma_1, f; z) - C(\Gamma_2, f; z)$ имеет граничные значения с обеих сторон всюду на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ и при любом $z \in \mathbb{C} \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ представима в виде*

$$C(\Gamma_1, f; z) - C(\Gamma_2, f; z) = s(z) f(z) + \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}} \frac{s(\zeta) dx\, dy}{\zeta - z}, \tag{5}$$

где интегральный член удовлетворяет во всей комплексной плоскости условию Гёльдера с показателем $1 - 2/p$.

Доказательство. Рассмотрим гладкую функцию $\omega^*(x)$, равную нулю при $x < 1$ и единице при $x > 2$. Для малого $\varepsilon > 0$ положим $\omega(x + iy) = \omega^*(x/\varepsilon)$, $\widetilde{f} = \omega f$. Тогда оба интеграла типа Коши $C(\Gamma_1, \widetilde{f}; z)$ и $C(\Gamma_2, \widetilde{f}; z)$ существуют. Согласно формуле Бореля–Помпейю (см., напр., [5], с. 29) их разность при $z \in \mathbb{C} \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ можно представить в виде

$$C(\Gamma_1, \widetilde{f}; z) - C(\Gamma_2, \widetilde{f}; z) = s(z) \widetilde{f}(z) + \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \overline{\zeta}} \frac{s(\zeta) dx\, dy}{\zeta - z}, \tag{6}$$

где $s(z)$ — сигнатура разности $\Gamma_1 - \Gamma_2$, $\zeta = x + iy$. Покажем, что при условиях леммы правая часть этого равенства имеет предел при $\varepsilon \to 0$. Сходимость $s(z)\widetilde{f}(z)$ к $s(z)f(z)$ при $z \in \mathbb{C} \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ очевидна. Разность интегральных членов формул (5) и (6) оценивается сверху интегралом от $\left| f(\zeta) \frac{\partial \omega}{\partial \overline{\zeta}} \right| = O(1/\varepsilon)$ по объединению тех областей D_j, которые лежат в полосе

$\{z = x + iy : 0 \leq x \leq \varepsilon\}$. Но суммарная площадь таких областей есть $o(\varepsilon)$, и поэтому интегральный член равенства (6) стремится к интегральному члену формулы (5). Поэтому из существования $C(\Gamma_1, f; z)$ следует существование $C(\Gamma_2, f; z)$ и равенство (5). Условие (4) означает, что функция $\frac{\partial f}{\partial \bar\zeta} s(\zeta)$ интегрируема в $\mathbb{C}$ в степени $p > 2$. Кроме того, она имеет компактный носитель. Поэтому (см. [5], с. 39) интегральный член правой части (5) дает функцию, которая непрерывна во всей комплексной плоскости и удовлетворяет там условию Гёльдера с показателем $1 - \frac{2}{p}$. $\square$

Если дуга Γ_1 гладкая, то интеграл типа Коши по ней существует и имеет граничные значения, удовлетворяющие условию Гёльдера с тем же показателем ν, что и его плотность. Разность этих значений равна f (этот факт известен как формула Сохоцкого; см. [1], с. 37). Первое слагаемое в правой части (5) имеет такую же разность предельных значений на Γ_1 (с учетом ориентации).

Поэтому справедлива

Теорема 1. *Пусть дуга $\Gamma = \mathrm{gr}\, Y$ принадлежит классу $\mathfrak{R}_\circ\mathfrak{G}\mathfrak{G}$, а заданная на ней функция f — классу $\mathfrak{h}_\nu$. Если для некоторой непрерывно дифференцируемой на отрезке I функции $Y_0(x)$ и некоторого числа $p > 2$ выполняется условие*

$$\int_0^1 \left|\frac{df^*}{dx}\right|^p |Y(x) - Y_0(x)|\, dx < \infty,$$

то интеграл типа Коши $C(\Gamma, f; z)$ существует в смысле определения (3) при любом $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, в любой точке дуги Γ имеет граничные значения с обеих сторон и эти граничные значения удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\mu = \min\{\nu, 1 - 2/p\}$.

Приведем следствие из этой теоремы, которое можно рассматривать как аналог хорошо известной теоремы И.И. Привалова.

Следствие. Пусть дуга $\Gamma = \mathrm{gr}\, Y$ принадлежит классу $\mathfrak{R}_\circ\mathfrak{G}\mathfrak{G}$, а заданная на ней функция f — классу $\mathfrak{h}_\nu$, $\nu < 1$. Если для некоторой непрерывно дифференцируемой на отрезке I функции $Y_0(x)$ выполняется условие

$$\int_0^1 \left|\frac{df^*}{dx}\right|^{2/(1-\nu)} |Y(x) - Y_0(x)|\, dx < \infty,$$

то интеграл типа Коши $C(\Gamma, f; z)$ существует в смысле определения (3) при любом $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, в любой точке дуги Γ имеет граничные значения с обеих сторон и эти граничные значения удовлетворяют условию Гёльдера с тем же показателем ν.

Покажем, что эти результаты позволяют установить существование непрерывных предельных значений интеграла типа Коши в случаях, не подпадающих под условия теоремы Дынькина–Салимова, причем это может происходить и в ситуациях, когда длина дуги Γ конечна. С этой целью рассмотрим следующее семейство ломаных, близкое по своей конструкции к упомянутому выше примеру Е.М. Дынькина.

Фиксируем ν в промежутке $(0, 1)$, обозначим $a_n = 2^{-n}$, $b_n = 2^{-n} + 2^{-n-1}$ и рассмотрим на отрезке I функцию $f(x)$, равную $2^{-n\nu}$ при $x = b_n$, $n = 1, 2, \ldots$, нулю при $x = a_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и линейную на всех отрезках вида $[a_n, b_n]$, $[b_n, a_{n-1}]$, $n = 1, 2, \ldots$ Продолжим эту функцию нулем на оставшуюся часть вещественной оси и положим $f(x + iy) = f(x)$. Известно (см., напр., [3]), что эта функция удовлетворяет условию Гёльдера с показателем ν на отрезке I, следовательно, $f \in \mathfrak{h}_\nu$.

Теперь зададим убывающую последовательность $\{k_1, k_2, \ldots\}$, $0 < k_n < 1$, и положим $I_n = [a_n, a_n + k_n 2^{-n-1}]$, $n = 1, 2, \ldots$ На каждом отрезке I_n определим вещественную функцию ограниченной вариации $\varphi_n(x)$ так, что $|\varphi_n(x)| < 2^{-n}$ при $x \in I_n$, $\int\limits_{I_n} \varphi_n(x)dx = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, и длины λ_n дуг $\{x + iy : x \in I_n,\ y = \varphi_n(x)\}$ образуют сходящийся ряд. Рассмотрим функцию $Y(x)$, равную $a_n + \varphi_n(x)$ при $x \in I_n$, $n = 1, 2, \ldots$, и нулю при всех остальных значениях $x \in I$.

Положим $\Gamma = \mathrm{gr}\, Y$. Очевидно, эта дуга имеет конечную длину, т. е. принадлежит классу $\mathfrak{RG}$. Ее характеристика $\theta_\Gamma(r)$ (см. введение) оценивается снизу величиной $\Lambda_N = \sum\limits_{n=N}^{\infty} \lambda_n$, где N определяется из условия $r > 2^{-N}$. За счет выбора последовательности длин λ_n нетрудно добиться, чтобы величина $\theta_\Gamma(r)$ сходилась к нулю при $r \to 0$ сколь угодно медленно. Поэтому теорема Дынькина–Салимова здесь позволяет лишь утверждать, что граничные значения интеграла (1) непрерывны при $\nu > 1/2$.

Условия теоремы 1 для только что построенных дуги Γ и функции f сводятся при $Y_0 = 0$ к условиям сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k_n 2^{-(2-p(1-\nu))n}$. Он сходится при $p < 2/(1-\nu)$; при $p = 2/(1-\nu)$ он также сходится при выполнении дополнительного условия $\sum k_n < \infty$. Поэтому интеграл типа Коши с построенными выше кривой и плотностью при любом $\nu \in (0,1)$ имеет непрерывные граничные значения с обеих сторон в каждой точке кривой Γ, включая нуль, причем эти граничные значения удовлетворяют условию Гёльдера с любым показателем, меньшим ν, а при условии сходимости ряда из коэффициентов k_n — и с показателем ν.

Данный пример можно видоизменить таким образом, чтобы дуга Γ попала в класс $\mathfrak{RG}$. Для этого входящие в нее вертикальные отрезки нужно наклонить в сторону тех отрезков I_n, к концам которых они примыкают. При достаточно малых углах наклона все свойства интеграла типа Коши сохраняются в силу леммы, длина дуги Γ остается конечной, а ее характеристика $\theta_\Gamma(r)$ стремится к нулю при $r \to 0$ сколь угодно медленно.

4. Случай неспрямляемой дуги

То обстоятельство, что в условиях теоремы 1 фигурирует интеграл от функции Y (а не ее вариация или производная, или иная характеристика, связанная с длиной графика Y), позволяет надеяться на ее справедливость для неспрямляемых кривых. Однако сначала необходимо придать смысл интегралу по такой кривой.

Вопросу об интегрировании по неспрямляемым и в особенности по фрактальным дугам посвящено уже немало статей (см. библиографию в [6]). Однако интеграл по неспрямляемой дуге класса $\mathfrak{G}$ можно определить, не прибегая к каким-либо сложным процедурам.

Если $\Gamma = \mathrm{gr}\, Y$ и $f(x+iy) = f^*(x)$, то можно положить

$$\int_\Gamma f dz = \int_0^1 f^*(x)dx + i\int_0^1 f^*(x)dY(x),$$

понимая последний интеграл в смысле Стильтьеса. Хорошо известно, что такой интеграл существует, если интегранд f^* имеет ограниченную вариацию на отрезке I, а функция Y непрерывна (см., напр., [7], с. 252). Условие непрерывности Y входит в определение класса $\mathfrak{G}$. Однако наше условие $f \in \mathfrak{h}_\nu$ обеспечивает ограниченность вариации функции f^* на отрезке I лишь при $\nu = 1$.

Если $f \in \mathfrak{h}_\nu$ при $\nu < 1$, то вариация этой функции ограничена, вообще говоря, лишь на отрезках $[\varepsilon, 1]$, $\varepsilon > 0$. Таким образом, в этом случае при $\Gamma \in \mathfrak{G}$ существует интеграл

$$\int_{\Gamma^\varepsilon} f dz = \int_\varepsilon^1 f^*(x)dx + i\int_\varepsilon^1 f^*(x)dY(x),$$

а интеграл по всей дуге Γ можно тогда определить как предел

$$\int_\Gamma f dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma^\varepsilon} f dz,$$

если этот предел существует.

К сожалению, в применении к интегралу типа Коши это последнее определение также не приводит к удовлетворительным результатам. Дело в том, что даже при $f \equiv 1$ и фиксированном $z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma$ условие $f(\zeta)/(\zeta - z) \in \mathfrak{h}_\nu$ влечет спрямляемость дуги Γ^ε при любом $\varepsilon > 0$, т. е. включение $\Gamma \in \mathfrak{R}_\circ\mathfrak{G}$.

Дать удовлетворительное определение интеграла типа Коши по неспрямляемой кривой в терминах интеграла Стильтьеса можно следующим образом. Заметим прежде всего, что на гладкой кривой интеграл (1) можно записать в виде

$$C(\Gamma, f; z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\zeta) d_\zeta \log(\zeta - z),$$

где под логарифмом понимается любая его однозначная ветвь, выделенная с помощью разреза, соединяющего точки z и ∞, минуя Γ. Этот интеграл можно понимать как интеграл Стильтьеса по контуру Γ. Контурный интеграл Стильтьеса $\int\limits_\Gamma f dg$ можно определить для любой ориентированной дуги Γ; для этого достаточно рассмотреть разбиения такой дуги точками, упорядоченными направлением обхода, и соответствующие интегральные суммы. При этом известные условия существования интеграла Стильтьеса в терминах непрерывности и ограниченности вариаций функций f и g сохраняют справедливость (контурный интеграл Стильтьеса подробнее описан в [8]). В частности, этот интеграл существует, если функция g непрерывна на Γ, а f имеет там ограниченную вариацию. Для каждого $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ фиксируем разрез λ_z, который соединяет эту точку с бесконечностью, не пересекая при этом дугу Γ. Положим

$$\widetilde{C}(\Gamma, f; z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\zeta) d_\zeta \log(\zeta - z), \tag{7}$$

где однозначная ветвь логарифма выделяется с помощью этого семейства разрезов. Тогда функция $\log(\zeta - z)$ непрерывна по ζ, и интеграл (7) существует, если f имеет ограниченную вариацию на Γ. В частности, он существует для всякой функции $f \in \mathfrak{h}_1$. При $f \in \mathfrak{h}_\nu$, $\nu < 1$, положим

$$\widetilde{C}(\Gamma, f; z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^\varepsilon} f(\zeta) d_\zeta \log(\zeta - z). \tag{8}$$

Если этот предел существует, то будем называть его расширенным интегралом типа Коши. На гладкой кривой совпадает с интегралом типа Коши (1), а на неспрямляемой дуге существует для достаточно обширного класса плотностей f.

Теорема 2. *Пусть дуга $\Gamma = \operatorname{gr} Y$ принадлежит классу $\mathfrak{G}$, а заданная на них функция f — классу $\mathfrak{h}_\nu$. Если для некоторой непрерывно дифференцируемой на отрезке I функции $Y_0(x)$ и некоторого числа $p > 2$ выполняется условие*

$$\int_0^1 \left|\frac{df^*}{dx}\right|^p |Y(x) - Y_0(x)|\, dx < \infty,$$

то расширенный интеграл типа Коши $\widetilde{C}(\Gamma, f; z)$ существует в смысле определения (8) при любом $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, в любой точке дуги Γ имеет граничные значения с обеих сторон и эти граничные значения удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\mu = \min\{\nu, 1 - \frac{2}{p}\}$. Кроме того, для любого $t \in \Gamma$ имеет место равенство

$$\widetilde{C}^+(\Gamma, f; t) - \widetilde{C}^-(\Gamma, f; t) = f(t). \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $\{Y_1, Y_2, \dots\}$ есть последовательность гладких функций, заданных на отрезке I, равномерно сходящаяся к Y и такая, что $Y_n(0) = Y_n(1) = 0$, $n = 1, 2, \dots$ Положим $\Gamma_n = \operatorname{gr} Y_n$. Из классических теорем о переходе к пределу под знаком интеграла Стильтьеса нетрудно вывести равенство $\widetilde{C}(\Gamma, \widetilde{f}; z) = \lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{C}(\Gamma_n, \widetilde{f}; z)$, где $\widetilde{f}$ означает то же, что и в доказательстве леммы. Но на гладкой дуге Γ_n расширенный интеграл Коши совпадает с обычным интегралом типа Коши, и к его разности с интегралом $C(\operatorname{gr} Y_0, \widetilde{f}; z)$ применима формула Бореля–Помпейю. Отсюда нетрудно вывести существование интеграла $\widetilde{C}(\Gamma, f; z)$ и равенство

$$\widetilde{C}(\Gamma, f; z) - C(\operatorname{gr} Y_0, f; z) = s(z) f(z) + \frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{s(\zeta) dx\, dy}{\zeta - z},$$

где $s(z)$ есть сигнатура разности $\Gamma - \mathrm{gr}\, Y_0$; это полный аналог равенства (5), и из него следуют все утверждения теоремы. В частности, формула (9) следует из представления

$$\widetilde{C}(\Gamma, f; z) = C(\mathrm{gr}\, Y_0, f; z) + s(z)f(z) + \frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{s(\zeta) dx\, dy}{\zeta - z};$$

скачки функций $C(\mathrm{gr}\, Y_0, f; z)$ и $s(z)f(z)$ на $\mathrm{gr}\, Y_0$ взаимно уничтожаются, на Γ первая из этих функций скачка не имеет, а вторая имеет скачок f (с учетом ориентации).

Справедливость формулы Сохоцкого для расширенного интеграла типа Коши означает, что он может использоваться для решения краевых задач так же, как обычный интеграл типа Коши.

Литература

1. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* – М.: Физматгиз, 1962. – 600 с.
3. Дынькин Е.М. *Гладкость интеграла типа Коши* // Зап. научн. семин. ЛОМИ АН СССР. – 1979. – Т. 92. – С. 15–133.
4. Салимов Т. *Прямая оценка для сингулярного интеграла Коши по замкнутой кривой* // Научн. тр. МВ и ССО Азерб. ССР. – 1979. – № 5. – С. 59–75.
5. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции.* – М.: Наука, 1988. – 509 с.
6. Кац Б.А. *Интегрирование по плоской фрактальной кривой, задача о скачке и обобщенные меры* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 10. – С. 53–65.
7. Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной.* – М.: ГИТТЛ, 1957. – 552 с.
8. Кац Б.А. *Интеграл Стильтъеса по фрактальному контуру и некоторые его приложения* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 10. – С. 21–32.

Казанская архитектурно-строительная академия

Поступила
05.05.2000